10D2	مهارات الاحتمالات Compound Events	البيانات والاحتمالات DATA & PROBABILITY

المؤشِّر

بنهاية هذه الوحدة الدِّراسيَّة، سيكون الطَّلبة قادرين على:

- التحقق من بعض الامثلة في الاحتمالات وحساب الاحتمالات المركَّبة للأحداث المستقلَّة وغير المستقلَّة والاحتمالات المشروطة باستخدام بيانات مدرجة في جداول.

Indicator

By the end of the grade, students will be able to:

Investigate probability situations and calculate compound probabilities for independent and dependent events and conditional probabilities from tabled data

مُخرجات التَّعلُّم Learning Outcomes

سيتعلَّم الطَّالب أن: *Students learn to:*

	مُتقِن Mastered	مُتقدِّم Developing	مُبتدئ Emerging
10D2.1	يستخدم فراغ العينة أو مُخطَّط الشَّجرة **لحلِّ المسائل** الَّتي تتضمَّن احتمالات احداث مستقلَّة مُركَّبة Use the sample space or tree diagrams **to solve problems** involving probabilities of compound independent events	**يرسم مُخطَّط الشَّجرة** لإيجاد فراغ العينة لأحداث مستقلَّة مُركَّبة. **Construct tree diagrams** to list the sample space of simple compound independent events	يوجد **فراغ العينة** لأحداث **مستقلَّة مُركَّبة** مُعرَّفة في صورة بسيطة List the **sample space** of simple **compound independent** events

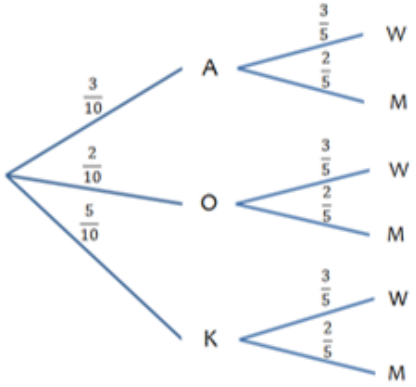
ملاحظات توضيحيَّة Explanatory Notes

- خلال السَّنوات الدِّراسيَّة السَّابقة، تعلَّم الطَّلبة حساب الاحتمالات التَّجريبيَّة والنَّظريَّة. وقاموا بتسجيل فراغ العينة لنتائج تجربة ما، ورسم مخطَّطات شجرة بسيطة واستخدموا ذلك في حساباتهم. تعامل الطَّلبة مع أمثلة كانت فيها الأحداث مستقلَّة. وتعلَّم الطَّلبة استخدام متمِّم الحدث لحساب الاحتمالات. يوفِّر المخرج التَّعلميُّ هذه الفرصة للطَّلبة لمراجعة هذه المهارات تمهيدًا لمواصلة التَّوسُّع في فهمهم لمبادئ الاحتمالات. في الصَّفِّ 10: يستخدم الطَّلبة معرفتهم بنتائج الاحتمالات لرسم المخطَّطات وتوسيع نطاق المسائل الَّتي سيقومون بحلِّها.
- بالنِّسبة **لمستوى المُبتدئ:** يقوم الطَّلبة بتسجيل فراغ العينة لأحداث مُركَّبة تمهيدًا لرسم مخطَّط الشَّجرة. ينبغي عليهم الانتباه إلى التَّرتيب الذي قد تظهر فيه الأحداث والأخذ في الاعتبار الاحتمالات البسيطة لكلِّ حدث.
- قد يستخدم الطَّلبة جدولًا للقيم، مخطَّط شجرة أو قائمة كطريقة متناسقة لايجاد جميع النَّتائج. ينبغي عليهم تطوير أساليب ملائمة لتسجيل النَّتائج.
- تقتصر الأمثلة على تلك الَّتي تُنتج حتى 8 نتائج فقط. لا تقتصر الأحداث على تلك الَّتي تكون متساوية في الاحتمال رغم أنَّ تلك يجب أن تؤخذ في الاعتبار، ومثال ذلك:

- In previous grade levels, students learned to calculate experimental and theoretical probabilities. They recorded sample spaces for the outcomes of an experiment, drew simple tree diagrams and used these in calculations. Students worked with examples in which events were independent. Students learned to use the complement of an event to calculate probabilities. This LO is an opportunity for students to revisit these skills in preparation for further expanding their understanding of probability. In Grade 10 students use their knowledge of probability results to draw diagrams and extend the range of problems that they will solve.
- For **Emerging**, students list the sample space of compound events in preparation for drawing tree diagrams. They pay attention to the order in which the events may occur and consider simple probabilities for each event.
- Students may use a table of values, a tree diagram or a list as a systematic way of finding all outcomes. They should develop suitable methods for listing outcomes.
- Limit examples to examples which will produce up to 8 outcomes only. Events are not limited to equally likely events although these should be considered e.g.

1) أوجِد فراغ العينة لتجربة رمي ثلاث عملات معدنيَّة وسجِّل النَّتائج الممكنة ما إن كانت صورة أم كتابة. 1) List the sample space of the experiment which is tossing 3 coins and recording whether head or tails are obtained	الحلُّ: باستخدام الرَّمز (H) - للدَّلالة على الكتابة والرَّمز (T) للدَّلالة على الصُّورة، فإنَّ فراغ العينة يُظهر 8 نتائج هي **{HHH HHT HTH THH HTT THT HTT TTT}** قد لا يفهم الطَّلبة أنَّ النَّتيجة **HTH** تختلف عن **HHT** – حيث إنَّ كلاهما يحتوي على صورتين وكتابة واحدة. قد يفيد استخدام 3 عملات معدنيَّة مختلفة القيمة، مثل 25 فلسًا و 50 فلساً ودرهمًا واحدًا (1 درهم) لتوضيح ذلك.

2) يتمُّ رمي حجر نرد وسحب كرة من حقيبة تحتوي على كرة حمراء وكرة زرقاء وكرة خضراء. ويتمُّ ارجاع الكرة بعد سحبها كلَّ مرة. أوجِد فراغ العينة. 2) A dice is rolled and counter drawn from a bag containing a red, blue and green counter. The counter is replaced after each draw. List the sample space.	الحلُّ: قد نستخدم جدول لتكوين قائمة النتائج Solution A table may be used to form a list | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | R | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | R6 | | B | B1 | B2 | B3 | B4 | B5 | B6 | | G | G1 | G2 | G3 | G4 | G5 | G6 |
3) يقدِّم أحد المطاعم 3 أنواع من المقبلات و5 أنواع من الوجبات الرَّئيسيَّة و4 أنواع من الحلوى. ما هو عدد النَّتائج المحتملة إذا أراد سالم اختيار نوع من المقبلات ووجبة ونوع من الحلوى. 3) A restaurant has 3 starters, 5 mains and 4 deserts. How many possible outcomes will there be if Salem wants to choose one starter, one main and one desert.	الحلُّ: سيكون هناك 60 نتيجة محتملة $\mathbf{3 \times 5 \times 4 = 60}$ [لا يحتاج هذا المثال لتكوين قائمة] Solution: There will be $3 \times 5 \times 4 = 60$ possible outcomes. [This example does not require students to form a list]

بالنِّسبة **لمستوى المُتقدِّم:** يقوم الطَّلبة بإنشاء مخطَّط الشَّجرة للأحداث المستقلَّة ويستخدمون النَّتائج : مجموع الاحتمالات = 1 وكذلك $P(A') = 1 - P(A)$ لاستكمال بيانات الاحتمالات. يجب أن تكون مخطَّطات الشَّجرة ذات حجم معقول حيث إنَّ التَّركيز في هذه المرحلة يكون على فهم العمليَّة. ويمكن تشجيع الطَّلبة على تخيُّل أمثلة ذات حجم أكبر، فقط من أجل "ترتيب" النَّتائج المُمكنة لحلِّ مسألة، ومثال ذلك:	▪ For **Developing**, students construct tree diagrams for independent events and use the results – sum of probabilities = 1 and $P(A') = 1 - P(A)$ to complete probability data. ▪ Tree diagrams should be of a reasonable size as the emphasis is on understanding the process. Students may be encouraged to imagine larger sized examples larger but only in order to 'sort' possible outcomes for the solution of a problem e.g.
يُمكن أن يختار أحمد قطعة واحدة من الفاكهة ومشروبًا واحدًا لوجبته الخفيفة في فترة ما بعد الظُّهر. يحتوي صحن الفاكهة على 3 تفاحات (A)، وبرتقالتين (O) و 5 حبَّات من فاكهة الكيوي (K). وتحتوي صينيَّة المشروبات على 3 زجاجات مياه (W) وزجاجتين من عصير المانجو (M). قرَّر أحمد أن يغلق عينيه ويختاربطريقة عشوائيَّة. ارسم مخطَّط الشَّجرة (مع الاحتمالات) لإظهار خيارات أحمد. Ahmed may choose one piece of fruit and one drink for his afternoon snack. The fruit bowl contains 3 Apples, 2 Oranges and 5 Kiwifruit. The drinks tray has 3 bottles of Water and 2 bottles of Mango juice. Ahmed decides to close his eyes and choose randomly. Draw a tree diagram (with probabilities) to show Ahmed's choices.	الحلُّ: Solution:  تُكتب الاحتمالات بالكسور أو بالأرقام العشريَّة يمكن رسم مخطَّط الشَّجرة في هذه الحالة بوضع خياري المشروبات أوَّلًا. Probabilities fractions or decimals For this case the tree diagram may be drawn with the two choices of drink first.

▪ بالنِّسبة **لمستوى المُتقِن:** يستخدم الطَّلبة قواعد الضَّرب وقواعد **الجمع** لحلِّ المسائل الَّتي يمكن رسم مخطَّطات الشَّجرة لها. يجب تعليم الطَّلبة عمليَّة الضَّرب للاحتمالات المُركَّبة الواحدة (على طوال الفروع) ثمَّ إضافة الاحتمالات للحالات المتعدِّدة (إلى أسفل الشَّجرة). ▪ يُمكن للطَّلبة مناقشة (أو استخدام) طرق أخرى لحلِّ المسائل مثل تسجيل قائمة لجميع الطُّرق الممكنة لوقوع الأحداث المطلوبة. ▪ ينبغي على الطَّلبة أن يكونوا مدركين للاستخدامات الممكنة لقواعد الاحتمالات الأخرى للمساعدة في إجراء العمليَّات الحسابيَّة، مثل استخدام المتمِّم في الحالات الَّتي يكون ذلك فيها ممكنًا، ومثال ذلك:	▪ For **Mastered,** students use the multiplication **and addition** rules to solve problems for which tree diagrams are able to be drawn. Students should be taught to multiply for single compound probabilities (along the branches) and then to add probabilities for multiple cases (down the tree) ▪ Students may discuss (or use) other methods to solve problems such as listing all possible occurrences of the events required. ▪ Students should be made aware of possible uses of other probability rules to help with calculations such as using the complement for cases where it is appropriate e.g.

يُمكن أن يختار أحمد قطعة واحدة من الفاكهة ومشروبًا واحدًا لوجبته الخفيفة في فترة ما بعد الظهر.

يحتوي صحن الفاكهة على 3 تفاحات (A)، وبرتقالتين (O) و 5 حبَّات من فاكهة الكيوي (K). وتحتوي صينيَّة المشروبات على 3 زجاجات مياه (W) وزجاجتين من عصير المانجو (M).

قرَّر أحمد أن يغلق عينيه ويختار بطريقة عشوائيَّة.

أ) ارسم مخطَّط الشَّجرة مع بيان الاحتمالات لإظهار.
استخدم مخطَّط الشَّجرة لحساب:
ب) احتمال أن يختار تفاحة ومشروب مياه
ج) احتمال أن يختار برتقالة **أو** حبَّة كيوي **و**مشروب مانغو.

لا يرغب أحمد في اختيار أيٍّ من الكيوي أو مشروب المياه، ما احتمال أن يحصل على أحدهما أو كليهما معًا؟

Ahmed may choose one piece of fruit and one drink for his afternoon snack.
The fruit bowl contains 3 Apples, 2 Oranges and 5 Kiwifruit. The drinks tray has 3 bottles of water and 2 bottles of mango juice.
Ahmed decides to close his eyes and choose randomly.

a) Draw a tree diagram with probabilities
Use the tree diagram to calculate;
b) The probability that he chooses an apple and a drink of water
c) The probability that he chooses an orange **or** a kiwifruit and a mango drink.

Ahmed does not want either a kiwifruit or a drink of water, what is the probability that he will get one or both of these?

الحلُّ:

أ) استعن بالمثال السَّابق لكتابة الحلِّ: See the solution above for Developing

ب) $P(A \text{ and } W) = \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{50} = 0.18$

جـ) $P(OM) + P(KM) = \frac{2}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{4}{50} + \frac{10}{50}$

$= \frac{14}{50} = 0.28$

د) هناك أربع طرق يستطيع من خلالها أحمد الحصول على واحد من الخيارين أو كليهما.

There are four ways that he can get one or both of these choices.

Calculations

الحسابات

$= \frac{9}{50} + \frac{6}{50} + \frac{15}{50} + \frac{10}{50}$

$= \frac{40}{50} \qquad (0.8)$

أو باستخدام الأحداث المتمِّمة- هذا يبقي لأحمد خيارين جيِّدين فقط- (التُّفاح والمانغو أو البرتقال والمانغو) واحتمال **ألَّا** يحصل على أيٍّ منهما هو:

$= 1 - \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{10} \times \frac{2}{5}\right)$

$= 1 - \frac{10}{50} = \frac{40}{50} = \qquad 0.8$

مُبتدئ Emerging	مُتقدِّم Developing	مُتقِن Mastered	
يستخدم مخططات ڤن لحل مسائل الاحتمالات للأحداث المشتركة **Use Venn diagrams** to solve probability problems for joint events	يستخدم مخططات ڤن أو **جداول الاحتمالات المزدوجة** (ثنائية الاتجاه) لحل مسائل الاحتمالات للأحداث المشتركة Use Venn diagrams or **two way tables** to solve probability problems for joint events	**ينشئ ويستخدم** مخططات ڤن وجداول الاحتمالات المزدوجة (ثنائية الاتجاه) لحلّ مسائل الاحتمالات للأحداث المشتركة أو الاحتمال الشرطي **Construct** and use Venn diagrams or two way tables to solve probability problems for joint events or conditional probability	**10D2.2**

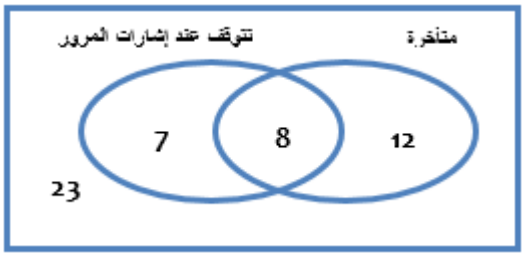
ملاحظات توضيحيَّة Explanatory Notes

- خلال السَّنوات الدِّراسيَّة السَّابقة، تعلَّم الطَّلبة استخدام متمِّم الحدث لحساب الاحتمالات. هذه هي المرَّة الأولى الَّتي يستخدم فيها الطَّلبة مخطَّطات ڤن وجداول الاحتمالات المزدوجة (ثنائيَّة الاتِّجاه) لحلّ مسائل الاحتمالات رغم أنَّهم قد يكونوا شاهدوها تُستخدَم في ترتيب المعلومات.
- ويتعلَّق هذا المُخرَج التَّعلُّميُّ **بمفاهيم** الاحتمالات. **ومن غير المتوقَّع** أن يستخدم الطَّلبة الصِّيَغ الَّتي تربط احتمالات اتِّحاد الأحداث (أو الأحداث المتقاطعة) أو صيغًا لحساب الاحتمالات المشروطة.
- ليس مطلوبًا من الطَّلبة استخدام مصطلحات "اتِّحاد" أو "تقاطع" أو "الأحداث المتعارضة" أو "الاحتمال الشرطيّ" ، مع ضرورة التَّركيز على فهم الطَّلبة المفاهيم المتعلِّقة بمخطَّطات ڤن.
- على الطَّلبة حلّ المسائل باستخدام لغة هذه المفاهيم من خلال استكشاف المعلومات باستخدام مخطَّطات ڤن أو الجداول المزدوجة. ينبغي عليهم استكشاف اللُّغة المستخدمة كليًّا من خلال حساب احتمال كلٍّ من " A **أو** B "، " A **و** B " ، "**إن** كانت A **فإن** B " أو "احتمال B **مُعطى** A ".
- بالنِّسبة **لمستوى المُبتدئ:** يرتِّب الطَّلبة المعلومات في مخطَّطات ڤن ويستخدمونها لحلّ مسائل الاحتمالات. وينبغي أن تقتصر الحالات على حدثين متقاطعين والمنطقة الخارجيَّة، ومثال ذلك:

- In previous grade levels, students learned to use the complement of an event to calculate probabilities. This is the first time that students have used Venn diagrams and two way tables to solve probability problems although they may have seen these used to sort information.
- This outcome is about probability **concepts**. There is **no expectation** that students will use formulas which relate the probabilities of union of events (or intersections) or formulas for calculating conditional probability.
- There is no requirement for students to use the terms 'union', 'intersection', 'mutually exclusive' or 'conditional probability' instead the emphasis should be on students understanding the concepts in relation to Venn diagrams.
- Students should be solving problems using the language of these concepts by exploring the information using Venn diagrams or two way tables. They should fully explore the language used by calculating probabilities for 'A **or** B', 'A **and** B', '**If** A **then** probability B', or Probability B **given** A'

For **Emerging,** students sort information into Venn diagrams and use these to solve probability problems. Situations should be limited to two intersecting events and the external region e.g

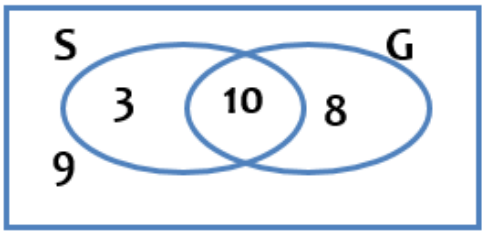
1) عندما تقود علياء سيارتها إلى العمل، تقابل مجموعة واحدة من إشارات المرور.
إذا توقَّفت عند إشارات المرور فقد تتأخَّر عن العمل.
سجَّلت علياء رحلتها إلى العمل على مدى 50 يومًا لمعرفة ما اذا كان بامكانها حساب احتمال تأخُّرها في الوصول إلى عملها في أحد الأيَّام.
سجَّلت علياء النَّتائج باستخدام مخطَّط ڤن.



استخدم المخطَّط لحساب:
أ) احتمال أن تتأخَّر عن العمل
ب) احتمال أن تصل إلى العمل مبكِّرًا
ج) احتمال أن تتوقَّف عند إشارات المرور
د) احتمال أن تتوقَّف عند إشارات المرور وتتأخَّر عن العمل
هـ) احتمال أن تتوقَّف عند إشارات المرور وتصل إلى عملها مبكِّرًا (غير متأخِّرة)

الحلول:
أ) هنا نستخدم العدد الإجماليَّ في دائرة التَّأخير.
ب) هذا هو العدد الإجماليُّ **باستثناء** ذلك الموجود في دائرة التَّأخير.
جـ) هذا هو العدد الإجماليُّ في دائرة التَّوقُّف عند الإشارة.
د) هذا هو العدد الموجود في التَّقاطع .
هـ) هذا هو المجموع في دائرة الوقوف وغير الموجود في دائرة التَّأخير.

2) يتألَّف فريق نادي الجاهلي لكرة القدم من **30** لاعبًا. يشكِّل **13** منهم الفريق الرَّئيسيَّ (**S**). ولقد سجَّل 10 من هؤلاء اللَّاعبين هدفًا (**G**) هذا الموسم. بينما **12** فقط من لاعبي الفريق **لم** يسجِّلوا أيَّ هدف حتَّى الآن في هذا الموسم. ويوضِّح مخطَّط ڤن هذه المعلومات.



باستخدام مخطَّط ڤن، أوجد ما يلي:

أ) احتمال أن يسجِّل أحد أفراد الفريق الرَّئيسيِّ هدفًا في موسم ما.

ب) احتمال أن يسجِّل واحد من الأفراد غير المنتمين للفريق الرَّئيسيِّ هدفًا.

ج) إن قابلت لاعبًا من الفريق فما هو احتمال ألَّا يكون من الفريق الرَّئيسيِّ وألَّا يكون قد سجَّل هدفًا.

الحلُّ:

يجب على الطَّلبة أن يدركوا أنَّ الملاحظات المتعلِّقة بفئة ما تشمل منطقة الفئة بأكملها. ينبغي عليهم أوَّلًا البحث عن المعلومات حول تقاطعات الفئات، أي أعداد اللَّاعبين في الفريق الرَّئيسيِّ الذين سجَّلوا هدفًا.

أ) $P(S \text{ and } G) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$

ب) $P(S' \text{and } G) = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

- بالنِّسبة **لمستوى المُتقدِّم**: يستخدم الطَّلبة جداول (احتمالات) مزدوجة لحلِّ المسائل الَّتي تتضمَّن احتمالات مشروطة. تكون الجداول بحدٍّ أقصى 3 × 3 فقط (بدون المجاميع).
- رغم أنَّ الجداول ستكون لبيانات الأحداث المتعارضة، إلَّا أنَّه من غير المتوقَّع أن يستخدم الطَّلبة هذا المصطلح. يجب أن يصل فهم هذه الجداول إلى مرحلة يدرك فيها الطَّلبة أنَّها غير ملائمة للحالات الَّتي لا يمكن فيها وضع الأرقام في خلايا معيَّنة، ومثال ذلك:

في إحدى المدارس الصغيرة يوجد 500 طالب يأتون جميعًا إلى المدرسة كلَّ يوم بالحافلة أو بالسَّيَّارة. يصل الطَّلبة إلى المدرسة إمَّا مبكِّرًا (أو في الموعد) أو يصلون متأخِّرين (بعد بدء الطَّابور الصَّباحيّ). الجدول التَّالي يبيّن هذه المعلومات ليوم مدرسيٍّ اعتياديٍّ:

	الحافلة	السَّيَّارة	المجموع
مبكِّر	280	170	450
متأخِّر	20	30	50
المجموع	300	200	500

أوجد الاحتمالات التَّالية:

أ) احتمال أن يصل طالب إلى المدرسة بالسَّيَّارة

ب) احتمال أن يصل طالب إلى المدرسة مبكِّرًا

ت) احتمال **إن** استخدم طالب السَّيَّارة **فإنَّه** يصل متأخِّرًا إلى المدرسة

ث) **بمعرفة** أنَّ طالبًا وصل متأخِّرًا ما هو احتمال أن يكون قد استقلَّ الحافلة للذَّهاب إلى المدرسة.

ج) ما هو احتمال أنَّ أحد الطَّلبة قد يستقلُّ الحافلة **و** يصل متأخِّرًا؟

ح) ما هو احتمال أنَّ أحد الطَّلبة إمَّا يستقلُّ السَّيَّارة إلى المدرسة **أو** يصل مبكِّرًا؟

الحلول:

أ) $P(C) = \frac{200}{500} \text{ or } 0.4$

ب) $P(E) = \frac{450}{500} \text{ or } 0.9$

ج) نأخذ في الاعتبار الطَّلبة الذين يستخدمون السَّيَّارة فقط؛ نستخدم عمود "السَّيَّارة" فقط.

$$P(L \text{ if } C) = \frac{30}{200} \text{ or } 0.15$$

د) نأخذ في الاعتبار الطَّلبة الذين يصلون متأخِّرين فقط؛ نستخدم صفًّا "متأخِّر" فقط.

$$P(B \text{ if } L) = \frac{20}{50} \text{ or } 0.4$$

ه) هذه حالة تقاطع؛ نأخذ القيمة المشتركة والَّتي تظهر في كلٍّ من عمود "الحافلة" وصفِّ "مبكِّر". وتلك تختلف عن احتماليَّة أنَّ الطَّالب الَّذي **يستقلُّ الحافلة** يصل مبكِّرًا- وفي هذه الحالة نأخذ في الاعتبار عمود "الحافلة" فقط.

و) هذه حالة اتِّحاد- نجمع عدد الطَّلبة الَّذين يستخدمون السَّيَّارات وعدد الطَّلبة الَّذين يصلون مبكِّرًا ولكن لا نضاعف العدد، نوجد عدد الَّذين يستخدمون السَّيَّارة ويصلون مبكِّرًا. ويمكن حلُّ المسألة باستخدام الأحداث المتمِّمة.

$$P(C \text{ or } E) = 480/500 \text{ or } 0.96$$

طريقة الأحداث المتمِّمة- جميع الطَّلبة باستثناء أولئك الَّذين يستخدمون الحافلة ويصلون إلى المدرسة متأخِّرين.

تمَّ سؤال 80 طالبًا من طلبة الصَّفَّين 10 و11 عن فريق كرة القدم الَّذي يشجّعونه. الجدول المزدوج التَّالي يظهر إجاباتهم.

	يونايتد	سيتي	أرسنال	المجموع
الصَّفُّ 10	18	20	10	48
الصَّفُّ 11	12	16	4	32
المجموع	30	36	14	80

أ) إن تمَّ اختيار أحد الطَّلبة من الصَّفِّ 11 عشوائيًّا، فما هو احتمال أنَّه يشجّع الأرسنال. أعط إجابتك في أبسط صورة.

ب) أوجد احتمال أنَّ أحد الطَّلبة من الصَّفِّ 10 سيشجّع فريق يونايتد.

ج) ما هو احتمال أن يكون واحد من مشجّعي نادي سيتي من الصَّفِّ 10؟

الحلول:

أ) $P = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

ب) $P = \frac{18}{48} = \frac{3}{8}$

ج) $P = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

- بالنِّسبة **لمستوى المُتقِن**: يقرِّر الطَّلبة استخدام تمثيل مناسب أو طريقة لحلِّ المسائل الَّتي تتضمَّن تقاطعات واتِّحادات واحتمالات شرطيَّة. مرَّة أخرى ينبغي أن تقتصر الحالات على قدر معقول من المعلومات (حتَّى 5 قطع منفصلة). ويَنْصَبُّ التَّركيز على فهم الطَّلبة لغة وطرق الحلِّ وليس على التَّعامل مع حجم كبير من المعلومات، ومثال ذلك:

سأل معلِّم صفًّا مكوَّنًا من 30 طالبًا إن كانوا قد زاروا عُمان أو الأردنَّ.
أجاب 18 منهم أنَّهم قد زاروا الأردنَّ، بينما أجاب 8 أنَّهم قد زاروا عُمان فقط، في حين أجاب 6 أنَّهم قد زاروا كلا البلدين.

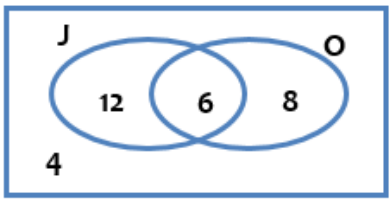
أ) أوجد احتمال أن يكون طالب قد زار الأردنَّ وليس عُمان.

ب) أوجد احتمال أنَ يكون طالب قد زار عُمان.

ج) أوجد احتمال أنَ طالبًا لم يزرْ عُمان ولا الأردنَّ.

د) أوجد احتمال أنَ طالبًا ممَّن زاروا الأردنَّ زار عُمان أيضًا.

الحلول:
تنطوي المسألة على تقاطعات- وسيكون من المناسب استخدام مخطَّط ڤن لترتيب المعلومات. (يمكن إجراء ذلك دون استخدام المخطَّط).



أ) $P = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

ب) $P = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

ج) $P = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$

د) هذا احتمال مشروط- وهنا نأخذ في الاعتبار فقط الطَّلبة الَّذين زاروا الأردنَّ.

تمَّ الطلب من 17 ولدًا و15 بنتًا تَسْمِيَةَ نوع الفيلم المفضَّل لديهم من بين أفلام الإثارة والدّراما والكوميديا.

أجاب 12 ولدًا أنَّ أفلام الإثارة هي المفضَّلة لديهم.
أجابت مجموعة من 13 شخصًا، من بينهم 8 بنات، أنَّهم يفضِّلون أفلام الكوميديا.
واختارت 3 بنات أفلام الدّراما.

أ) أوجِد احتمال أنَّ إحدى الفتيات الَّتي تمَّ اختيارها عشوائيًّا تفضِّل أفلام الإثارة؟
ب) تمَّ اختيار ولدٍ عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون قد اختار أفلام الدّراما على أنَّها المفضَّلة له؟
ج) ما هو احتمال أن يكون شخص ممَّن اختاروا أفلام الإثارة على أنَّها المفضلة ولدًا؟

الحلول:
هذه المسألة تتضمَّن معلومات على شكل مجموعات من الفئات الَّتي لا تتقاطع (متعارضة) - لذلك سيكون استخدام الجدول المزدوج أداة جيدة لنا، رغم أنَّه يمكن حلُّ المسألة دون الحاجة لاستخدامه.

	إثارة	دراما	كوميدي	المجموع
الأولاد	12	0	5	17
البنات	4	3	8	15
المجموع	16	3	13	32

يتضمَّن الجدول المعلومات المعطاة والَّتي تمَّ إدخالها باللَّون الأسود- الأعداد الَّتي تمَّ إدخالها باللَّون الأحمر تمَّ حسابها من المعطيات.

أ) $P = \frac{4}{15}$

ب) $P = \frac{0}{17} = 0$

مُبتدئ Emerging	مُتقدِّم Developing	مُتقِن Mastered	
يميز الأحداث على أنَّها **مستقلّة** أو **غير مستقلّة**. Identify events as **independent or dependent**	يميز الأحداث على أنَّها مستقلّة أو غير مستقلّة، **ويرسم مخطَّط الشَّجرة** للأحداث غير المستقلّة Identify events as independent or dependent and **draw tree diagrams** for dependent events	يميز الأحداث على أنَّها مستقلّة أو غير مستقلّة، ويرسم مخطَّط الشَّجرة، **ويحلّ المسائل** الَّتي تحتوي على **أحداث غير مستقلّة مُركَّبة** Identify events as independent or dependent, draw tree diagrams and **solve problems** involving **compound** dependent events	**10D2.3**

ملاحظات توضيحيَّة

- خلال السَّنوات الدِّراسيَّة السَّابقة، تعلَّم الطَّلبة التَّعرُّف على مواقف في الاحتمالات حيث تكون النَّتائج مستقلَّة. أجروا تجارب باستخدام حجر النَّرد والأقراص الدَّوَّارة وأوراق اللَّعب والكرات الملوَّنة وأدركوا أنَّ نتيجة تجربة سابقة لا تؤثِّر على احتمالات التَّجربة الَّتي يوشكون على إجرائها. في الصَّفِّ 10: يوسِّع الطَّلبة مدى فهمهم للاحتمالات ليمتدَّ إلى الحالات الَّتي تكون فيها احتمالات النَّتائج **معتمدة** على النَّتائج السَّابقة.
- طريقة جيدة لتناول هذا الموضوع هو أن يعتبر للطَّلبة تجارب يتمُّ فيها أخذ العيّنات **"دون استبدال"** كمثال لسلسلة من الأحداث **غير المستقلَّة**.
- بالنِّسبة **لمستوى المُبتدئ**: سيحكم الطَّلبة إن كانت الأحداث "مستقلَّة" أو "غير مستقلَّة" من خلال الأخذ في الاعتبار إن كان احتمال الحدث الثَّاني سيتأثَّر بوقوع الحدث الأوَّل. ومن غير المتوقَّع أن يتعلَّم الطَّلبة أو يستخدموا أيَّ صيغة للتَّحقُّق من استقلاليَّة الأحداث.
- ينبغي على الطَّلبة أن يتناولوا الأحداث غير المستقلَّة سواء في ما يتعلَّق بالتَّجارب الَّتي ستتغيَّر فيها الاحتمالات نتيجة شرط "عدم الاستبدال" أو في ما يتعلَّق بالأمثلة "البديهيَّة" مثل "صفِّ الطَّالب" و"طول الطَّالب" ، ومثال ذلك:

- In previous grade levels, students learned to recognize probability situations where outcomes are independent. They performed experiments using dice, spinners, cards and counters and recognized that the outcome of a previous trial had no effect on the probabilities for the trial that they were about to perform. In Grade 10 students extend their understanding of probability to situations where probabilities of outcomes are **dependent** on previous results.
- A good way to approach this topic is for students to consider experiments where sampling is conducted **'without replacement'** as an example of series of **dependent** events.
- For **Emerging**, students judge events as 'independent' or 'dependent' by considering whether the probability of the second event will be affected by the occurrence of the first. There is no expectation that students will learn or use any formula to check independence.

Students should consider dependent events both in relation to experiments where probabilities will alter as a result of 'without replacement' conditions and in relation to 'intuitive' examples such as the events 'grade level of student' and 'height of student' e.g

قرر ما إذا كان كلٌّ واحد من الأحداث أدناه مستقلّاً أو غير مستقلٍّ- برِّر إجابتك.

أ) الرَّمية 4 لعملة معدنيَّة إذا كانت الـ 3 رميات السَّابقة هي صورة.

ب) الخيار الأول لعدد من حقيبة تحتوي على بلاطات مرقَّمة والخيار الثَّاني وذلك في لعبة في الصَّفِّ لاختيار "رقم الحظِّ".

ج) يوم من أيام الأسبوع، ولعب كرة القدم مع أصدقائك.

د) بُعد مسكنك عن المدرسة وأن تكون الشَّخص الأوَّل في الرُّكوب في حافلة المدرسة في نهاية اليوم.

الحلول:

أ) مستقلٌّ- احتمال الحصول على "صورة" هو $\frac{1}{2}$ دائمًا.

ب) غير مستقلٍّ- أوَّلًا هذا يعتمد على الخيار الأوَّل بألَّا يكون "رقم الحظِّ". إن لم يكن الحال كذلك، فإنَّ احتمال وقوع الحدث الثَّاني يتغيَّر حيث سيَقلُّ عدد البلاطات الَّتي سيتمُّ الاختيار منها.

ج) غير مستقلٍّ- من المتوقَّع أن تكون هناك بضعة أيَّام لن ترى فيها أصدقائك للعب كرة القدم معهم، مثل يوم الجمعة.

د) مستقلٌّ- مكان مسكنك ليس له تأثير على ما يحدث لك في نهاية اليوم الدِّراسيّ.

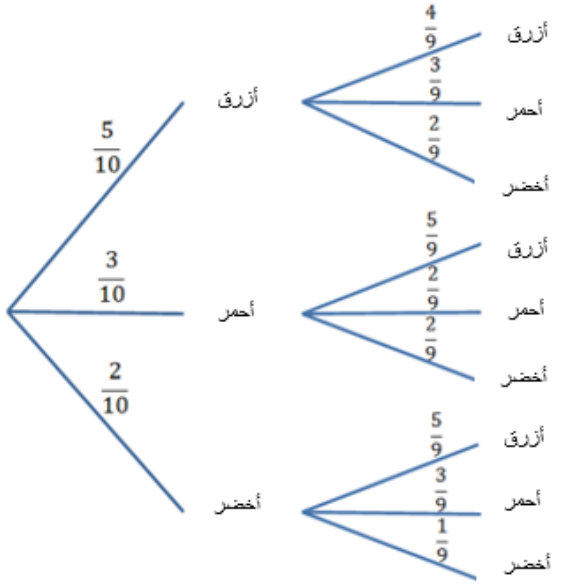
تلعب هدى لعبة الألواح مع شقيقاتها الثَّلاث. تبدأ اللُّعبة عندما يرمي أحد اللَّاعبين حجر النَّرد ويظهر الرَّقم 6.
ترتيب هدى هو الثَّالث في الدَّائرة المؤلَّفة من أربعة لاعبين. عائشة هي إحدى شقيقات هدى.

أ) هل الحدثان عائشة ترمي الرَّقم 6 وهدى ترمي الرَّقم 6 مستقلَّان أم غير مستقلَّين؟

ب) هل الحدثان هدى تبدأ اللُّعبة وعائشة تبدأ اللُّعبة مستقلَّان أم غير مستقلَّين؟

أ) هذان الحدثان مستقلَّان؛ فالرَّقم النَّاتج عن رمي إحدى الفتيات لحجر النَّرد لا يتأثَّر بالرَّقم النَّاتج عن رمي اللَّاعبة الأخرى لحجر النَّرد.

ب) غير مستقلَّين- إذا رمت عائشة حجر النَّرد قبل هدى، فقد تبدأ هي اللُّعبة- والأمر نفسه ينطبق على هدى إذا ما رمت حجر النَّرد قبل عائشة، ولذلك فإنَّ الحدثان غير مستقلَّين.

بالنِّسبة **لمستوى المُتقدِّم**: يستخدم الطَّلبة الأمثلة حيث يتمُّ اختيار العناصر بدون استبدال لرسم مخطَّطات الشَّجرة. يجب على الطَّلبة رسم مخطَّطات الشَّجرة الخاصَّة بهم وتحديد الاحتمالات على كلِّ فرع. ينبغي أن يكون حجم مخطَّط الشَّجرة معقولًا نسبيًّا. قد يجري الطَّلبة بعض التَّجارب، ولكنَّ غالبية العمل يُمكن إجرائه باستخدام الاحتمالات النَّظريَّة، مثال ذلك:	▪ For **Developing,** students use examples where items are chosen without replacement to draw probability trees. Students must draw their own trees and identify the probabilities on each branch. Trees should be restricted to a reasonable size. Students may perform some experiments but the majority of the work can be done using theoretical probabilities e.g.
لدى سلمى حافظة أقلام تحتوي على 5 أقلام زرقاء و3 أقلام حمراء، وقلمين لونهما أخضر. في بداية الحصَّة، مدَّت يدها إلى حافظة الأقلام واختارت قلمًا واحدًا دون النَّظر إلى لونه ووضعته على مكتبها. وبعدها اختارت قلمًا آخرَ. ارسم مخطَّط شجرة يُظهر جميع الخيارات الممكنة للأقلام المتاحة لسلمى.	الحلول: 

▪ بالنِّسبة **لمستوى المُتقِن**: يقرّر الطَّلبة الطَّريقة، وعلى الأرجح تكون رسم مخطَّط شجرة. يحتاج الطَّلبة إلى اختيار جميع الأفرع ووضع الاحتمالات الصحيحة على كلِّ فرع. يجب أن تقتصر الأمثلة على مخطَّطات شجرة ذات حجم معقول. يجب أن يكون التَّركيز على إظهار الطَّلبة فهمًا لعمليَّات الاحتمالات الَّتي تتضمَّنها الأمثلة، ومثال ذلك:	▪ For **Mastered,** students decide on the method, which is likely to be drawing a tree diagram. Students need to choose the branches and fit correct probabilities to each branch. Examples should be limited to tree diagrams of a reasonable size. The emphasis is on students showing understanding of the probability processes involved e.g.
لدى سلمى حافظة أقلام تحتوي على 5 أقلام زرقاء، و3 أقلام حمراء، وقلمين لونهما أخضر. في بداية الحصَّة، مدَّت يدها إلى حافظة الأقلام واختارت قلمًا واحدًا دون النَّظر إلى لونه ووضعته على مكتبها. وبعدها اختارت قلمًا آخرَ. ما احتمال أن تختار سلمى: أ) قلمين لونهما أزرق ب) قلمًا أزرق وقلمًا أحمر ج) قلمين لهما اللَّون نفسه د) قلمين مختلفي اللَّون	الحلول: باستخدام مخطط الشَّجرة في الحلِّ السَّابق، أ) $P(2B) = \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$ (0.22) ب) $P(BR) + P(RB)$ $= \frac{30}{90}$ (0.33) ج) $P(BB) + P(RR) + P(GG)$ $= \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9}$ $= \frac{28}{90}$ (0.31) د) هذه هي جميع الحالات باستثناء الحالة الَّتي تكون فيها ألوان الأقلام متشابهة. $P = 1 - \frac{28}{90} = \frac{62}{90}$ (0.69)

فاز فريق كرة القدم في إحدى المدارس بجائزة ستقدَّم لقائد الفريق أو نائبه خلال اجتماع لمجلس المدرسة.

قائد الفريق كان حاضرًا في الاجتماع في 95% من المرَّات.

نائب قائد الفريق كان حاضرًا في 93% من المرَّات الَّتي كان قائد الفريق حاضرًا فيها. في حال غياب قائد الفريق، كان نائب القائد حاضرًا في 73% من المرَّات.

لا يعلم أفراد الفريق بأنَّه سيتمُّ منح الجائزة للفريق.

أرسم مخطَّط الشَّجرة واستخدمه لإيجاد:

أ) احتمال حضور كلٍّ من القائد ونائبه في يوم تقديم الجائزة.

ب) احتمال إمكانيَّة تقديم الجائزة في اليوم الَّذي تمَّ اختياره لإنَّ القائد أو نائبه أو كليهما سيتواجدان في وقت اجتماع مجلس المدرسة.

الحلول:

أ) $P = 0.95 \times 0.93$

ب) من الأفضل حسابه كحدث متمِّم- أي 1- احتمال عدم حضور كليهما.

$= 1 - 0.01$
$= 0.99$

[تمَّ تقريب الإجابات إلى رقمين عشريَّين]