مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التعليم أولاً

الرياضيات

المستوى الثالث - الفصلان الدراسيان (2,3)

العبيكان Obekan

McGraw Hill Education

طبعة ١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧ م

طبعة تجريبية

الرياضيات

المستوى الثالث

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان

Original Title:

Precalculus
Algebra 2

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

English Edition Copyright © the McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

حقوق الطبعة الإنجليزية محفوظة لشركة ماجروهل©

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. ©

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل©

لا يسمح بإعادة إصدار هذا الكتاب أو نقله في أي شكل أو واسطة، سواءً أكانت إلكترونية أو ميكانيكية، بما في ذلك التصوير بالنسخ «فوتوكوبي»، أو التسجيل، أو التخزين والاسترجاع، دون إذن خطي من الناشر.

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على نبينا محمد، وعلى آله وصحبه.

عزيزي الطالب، نقدّم لك هذا الكتاب، الذي يضمّ العديد من التمارين المتنوعة والشاملة لكل درس، وهي امتداد للتمارين الواردة في كتابك المدرسي. وقد أعدت هذه التمارين بعناية؛ لتساعدك على التعلُّم، وتُفسح لك المجال للتدرّب على المهارات الأساسية لكل درس.

وقد خُصِّص لكل تمرين فراغ، لتدوّن إجابتك فيه. ولا يتسع هذا الفراغ – غالبًا – إلا للإجابة النهائية، وهذا لا يمنع أن تستعمل أوراقًا إضافية لتدوّن فيها خطوات حلّك.

ويمكنك حلّ هذه التمارين داخل الفصل تحت إشراف معلمك وتوجيهه، وقد يحدد لك المعلم بعضًا منها لتكون واجبًا منزليًّا.

وإنا – إذ نقدم لك عزيزي الطالب هذا الكتاب– لنأمل أن يجعل لتعلُّم مادة الرياضيات متعة أكثر، وفائدة أكبر.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الوحدة الأولى:

المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة الثانية:

القطوع المخروطية

الوحدة الثالثة:

المتجهات

الفهرس

الوحدة الرابعة:

الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة الخامسة:

النهايات والاشتقاق

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية علمًا بأن: $0° < \theta < 90°$.

1) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{5}{13}$

2) $\sin \theta$ ، إذا كان $\cot \theta = \frac{1}{2}$

3) $\sec \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = 4$

4) $\cot \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = \frac{2}{5}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $180° < \theta < 270°$.

5) $\sec \theta$ ، إذا كان $\sin \theta = -\frac{15}{17}$

6) $\cot \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -\frac{3}{2}$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من النسب المثلثية الآتية ، علمًا بأن: $270° < \theta < 360°$.

7) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{3}{10}$

8) $\sec \theta$ ، إذا كان $\csc \theta = -8$

9) $\sin \theta$ ، إذا كان $\tan \theta = -\frac{1}{2}$

10) $\cot \theta$ ، إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$

بسّط كل عبارة ممّا يأتي:

11) $\csc \theta \tan \theta$

12) $\frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta}$

13) $\sin^2 \theta \cot^2 \theta$

14) $\cot^2 \theta + 1$

15) $\frac{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}$

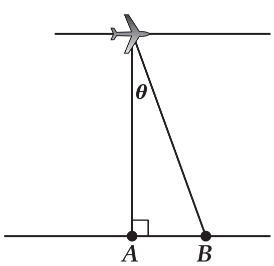
16) $\frac{\csc \theta - \sin \theta}{\cos \theta}$

17) $\sin \theta + \cos \theta \cot \theta$

18) $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$

19) $\sec^2 \theta \cos^2 \theta + \tan^2 \theta$

20) التصوير الجوي: يُبيّن الشكل المجاور طائرة تلتقط صورة جوية للنقطة A . وبما أن النقطة تقع تحت الطائرة تمامًا، فإنه لا يوجد تشويه أو عيوب في الظل أو الصورة. وفي النقاط التي لا تقع مباشرة أسفل الطائرة يوجد تشويه في الصورة، يعتمد مقداره على بُعد النقاط عن الموقع أسفل الطائرة. وعندما تزيد المسافة من الكاميرا إلى المنطقة المراد تصويرها يقل زمن عرض الصورة على فيلم التصوير في الكاميرا، بحسب العلاقة: $\sin \theta (\csc \theta - \sin \theta)$. اكتب هذه العلاقة بدلالة $\cos \theta$ فقط.



21) الأمواج: المعادلة $y = a \sin \theta t$ تُمثّل ارتفاع الأمواج على العوامة عند الزمن t بالثواني. عبّر عن a بدلالة $\csc \theta t$.

1-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

1) $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \sec^2\theta$

2) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin^2\theta} = 1$

3) $(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta) = \cos^2\theta$

4) $\tan^4\theta + 2\tan^2\theta + 1 = \sec^4\theta$

5) $\cos^2\theta\cot^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta$

6) $\sin^2\theta(\csc^2\theta + \sec^2\theta) = \sec^2\theta$

7) **فيزياء:** مربع السرعة الابتدائية لجسيم قُذف من سطح الأرض هو $v^2 = \frac{2gh}{\sin^2\theta}$ ، حيث θ زاوية القذف، و h أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم. و g مقدار تسارع الجاذبية الأرضية. أثبت صحّة المتطابقة الآتية:

$$\frac{2gh}{\sin^2\theta} = \frac{2gh\sec^2\theta}{\sec^2\theta - 1}$$

8) **ضوء:** تُقاس شدة مصدر الضوء بالشمعة، من خلال المعادلة $I = ER^2\sec\theta$ ، حيث E مقدار الإنارة بالشمعة لكل قدم مربعة على السطح، و R المسافة بالأقدام من مصدر الضوء، و θ الزاوية بين شعاع الضوء والخط العامودي على السطح. برهن المتطابقة التالية: $ER^2(1 + \tan^2\theta)\cos\theta = ER^2\sec\theta$.

1-3 المتطابقات المثلثية للمجموع وللفرق

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

1) $\cos 75°$

2) $\cos 375°$

3) $\sin (-165°)$

4) $\sin (-105°)$

5) $\sin 150°$

6) $\cos 240°$

7) $\sin 225°$

8) $\sin (-75°)$

9) $\sin 195°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

10) $\cos (180° - \theta) = -\cos \theta$

11) $\sin (360° + \theta) = \sin \theta$

12) $\sin (45° + \theta) - \sin (45° - \theta) = \sqrt{2} \sin \theta$

13) $\cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$

14) الطاقة الشمسية: في 21 من شهر مارس، تُحدّد القيمة العظمى للطاقة الشمسية الساقطة على القدم المربع من سطح الكرة الأرضية في موقع معيّن بالتعبير: $E \sin (90° - \phi)$ ، حيث ϕ خط العرض الجغرافي للموقع، و E مقدار ثابت. استخدم صيغة النسب المثلثية للفرق بين الزوايا لإيجاد كمية الطاقة الشمسية بدلالة جيب التمام $(\cos \phi)$ للموقع الجغرافي الذي يُمثّله خط العرض ϕ .

15) كهرباء: تُحدّد شدة التيار (c) بالأمبيرات في دائرة كهربائية فيها تيار متردّد بالصيغة: $c = 2\sin(120t)$ بعد t ثانية.

a) أعد كتابة الصيغة باستعمال النسب المثلثية لمجموع زاويتين.

b) استعمل صيغة النسب المثلثية لمجموع الزوايا في إيجاد قيمة التيار عند $t = 1$ ثانية.

1-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ إذا كان:

1) $\cos \theta = \frac{5}{13}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{8}{17}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{1}{4}; 270° < \theta < 360°$

4) $\sin \theta = -\frac{2}{3}; 180° < \theta < 270°$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي:

5) $\tan 105°$

6) $\tan 15°$

7) $\cos 67.5°$

8) $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثّل متطابقة:

9) $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\tan \theta - \sin \theta}{2 \tan \theta}$

10) $\sin 4\theta = 4 \cos 2\theta \sin \theta \cos \theta$

11) صور جوية: في التصوير الجوي يوجد تناقص في درجة وضوح صور الفيلم لأي نقطة X لا تقع مباشرة أسفل الكاميرا. يُعطى التناقص في وضوح الصورة E_θ بالعلاقة $E_\theta = E_0 \cos^4 \theta$ ، حيث θ الزاوية بين الخط العامودي على الكاميرا إلى سطح الأرض والخط من الكاميرا إلى النقطة X ، و E_0 درجة الوضوح للنقطة الموجودة مباشرة تحت الكاميرا. استعمل المتطابقة $2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$ في إثبات أن:

$$E_0 \cos^4 \theta = E_0\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

حل المعادلات المثلثية

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

1) $\sqrt{2}\cos\theta = \sin 2\theta; 0° \le \theta \le 360°$

2) $\sin 2\theta = \cos\theta; 90° \le \theta < 180°$

3) $\cos 4\theta = \cos 2\theta; 180° \le \theta < 360°$

4) $\cos\theta + \cos(90 - \theta) = 0; 0 \le \theta < 2\pi$

5) $2 + \cos\theta = 2\sin^2\theta; \pi \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

6) $\tan^2\theta + \sec\theta = 1; \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

7) $\cos^2\theta = \sin^2\theta$

8) $\cot\theta = \cot^3\theta$

9) $\sqrt{2}\sin^3\theta = \sin^2\theta$

10) $\cos^2\theta\sin\theta = \sin\theta$

11) $2\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

12) $\sec^2\theta = 2$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

13) $\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta$

14) $\csc^2\theta - 3\csc\theta + 2 = 0$

15) $\frac{3}{1+\cos\theta} = 4(1 - \cos\theta)$

16) $\sqrt{2}\cos^2\theta = \cos^2\theta$

حُلَّ كل معادلة مما يأتي:

17) $4\sin^2\theta = 3$

18) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

19) $2\sin^2\theta - 3\sin\theta = -1$

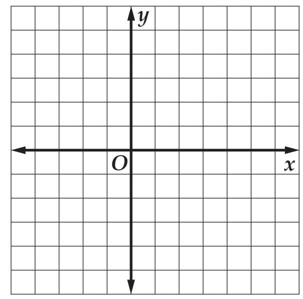
20) $\cos 2\theta + \sin\theta - 1 = 0$

21) **كهرباء:** يمكنك وصف شدة التيار الكهربائي المتردد المار في دائرة كهربائية ما بالعلاقة: $j = 3\sin 240t$ ، حيث j شدة التيار الكهربائي بالأمبير، و t الزمن بالثواني. اكتب عبارة تصف الزمن عندما لا يوجد تيار كهربائي.

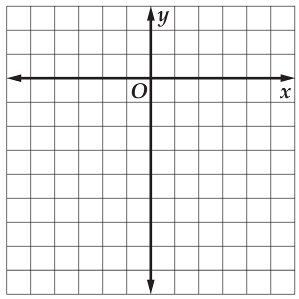
2-1 القطوع المكافئة

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $(x-1)^2 = 8(y-2)$

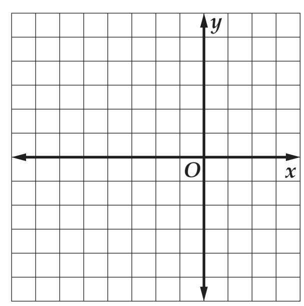


2) $y^2 + 6y + 9 = 12 - 12x$

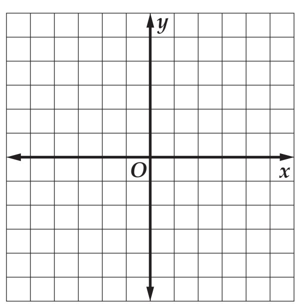


اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3, 4 ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

3) الرأس $(-2, 4)$ ، والبؤرة $(-2, 3)$



4) الرأس $(0, 1)$ ؛ مفتوح أفقيًّا إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.



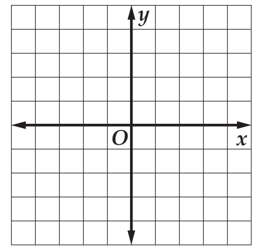
5) اكتب المعادلة $x^2 + 8x = -4y - 8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه.

6) **قمر اصطناعي:** افترض أن طبقًا هوائيًّا على شكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبِل 2 ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجّه إلى أعلى. أوجد معادلةً تمثِّل مقطعًا عرضيًّا للطبق.

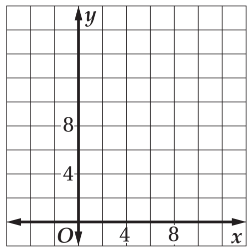
2-2 القطوع الناقصة والدوائر

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$



2) $25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

3) الرأسان $(4, 6)$, $(-12, 6)$ ، و البؤرتان $(2, 6)$, $(-10, 6)$

4) البؤرتان $(-2, 1)$, $(-2, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 10 وحدات.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

5) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(y+2)^2}{64} + \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

7) المركز $(-6, 1)$ ، والقطر 8 .

8) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 3 .

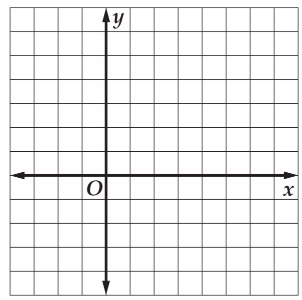
9) النقطتان $(-4, 1)$,$(2, 3)$ طرفا قطر فيها.

10) **نجارة:** يُستعمل قوس على شكل نصف قطع ناقص لتصميم لوحة رأسية لإطار سرير، ويساوي ارتفاع اللوحة الرأسية عند المركز 2 ft ، وعرضها 5 ft عند القاعدة. فأين يجب أن يضع النجار البؤرتين لتصميم اللوحة؟

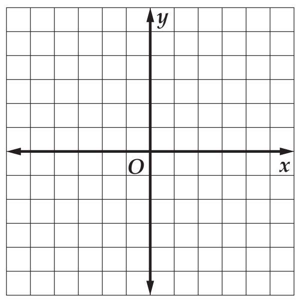
القطوع الزائدة

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

1) $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$



2) $\frac{y^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

3) الرأسان $(4, 6)$, $(-10, 6)$ ، والبؤرتان $(6, 6)$, $(-12, 6)$

4) البؤرتان $(0, -4)$, $(0, 6)$ ، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

5) حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-7)^2}{36} - \frac{(y+10)^2}{121} = 1$

6) **صوت:** المسافة بين بيتي صديقين ميلٌ واحدٌ، وقد سمعا صوت طائرة في أثناء حديثهما معًا على الهاتف، وقد سمع أحدهما الصوت قبل الآخر بثانيتين. إذا كانت سرعة الصوت 1100 ft/s ، فاكتب معادلة القطع الزائد الذي يحدِّد موقع الطائرة.

تحديد أنواع القطوع المخروطية

اكتب كلًّا من المعادلات الآتية على الصورة القياسية، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله:

1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

2) $25x^2 - 50x^2 + 16y^2 - 375 = 0$

3) $x^2 - 12y - 6x + 69 = 0$

4) $9x^2 - 4y^2 + 8y - 40 = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

5) $5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0$

6) $16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$

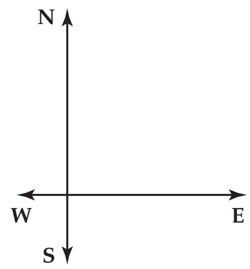
7) $4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0$

8) $2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0$

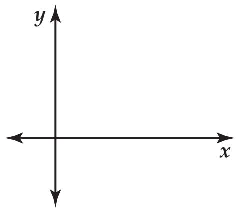
3-1 مقدمة في المتجهات

استعمل مسطرة ومنقلة لرسم متجه يمثِّل كل كمية مما يأتي، واكتب مقياس الرسم في كل حالة :

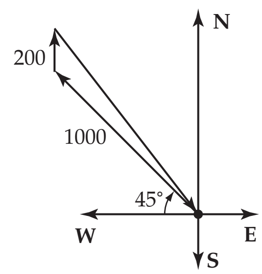
1) $\mathbf{r} = 60$ m باتجاه N 45° E



2) $\mathbf{t} =$ 100 باوند باتجاه 60° مع الأفقي



3) تسوُّق: سار محمد مسافة 1000 ft من منزله في اتجاه 45° شمال الغرب، ثم سار 200 ft في اتجاه الشمال؛ فوصل إلى مركز التسوُّق. كم أصبح بُعد محمد عن منزله؟ وفي أي اتجاه؟



4) بناء: يدفع عبد الله صندوقًا يحتوي على مواد بناء بقوة مقدارها 60 N وبزاوية قياسها 42° مع الأفقي.

a) ارسم شكلًا يُبيّن تحليل القوة التي يؤثِّر بها عبد الله في الصندوق إلى مركبتيها المتعامدتين.

b) أوجد مقدار كل من المركبتين الأفقيَّة والرأسيَّة للقوة.

3-2 المتجهات في المستوى الإحداثي

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(1 $A(2, 4), B(-1, 3)$

(2 $A(4, -2), B(5, -5)$

(3 $A(-3, -6), B(8, -1)$

إذا كان $\mathbf{w} = \langle -3, 5 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(4 $3\mathbf{v}$

(5 $\mathbf{w} - 2\mathbf{v}$

(6 $4\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

(7 $5\mathbf{w} - 3\mathbf{v}$

أوجد متجه وحدة $\mathbf{u}$ له اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ مما يأتي:

(8 $\mathbf{v} = \langle -3, 6 \rangle$

(9 $\mathbf{v} = \langle -8, -2 \rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافق خطي لمتجهي الوحدة $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ في كلٍّ مما يأتي:

(10 $D(4, -5), E(6, -7)$

(11 $D(-4, 3), E(5, -2)$

(12 $D(4, 6), E(-5, -2)$

(13 $D(2, 1), E(3, 7)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع المحور الأفقي في كلٍّ مما يأتي:

(14 $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 42°$

(15 $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 132°$

(16 **بستنة:** يقوم علي ومحمد بدفع حجر من حديقتهم. إذا كان علي يدفع الحجر بقوة مقدارها 120 N بزاوية تميل $60°$ عن المحور الأفقي، في حين يدفع محمد الحجر بقوة مقدارها 180 N بزاوية تميل $40°$ عن المحور الأفقي، فأوجد مقدار محصلة القوى الناتجة عن تأثير قوتي الدفع معًا.

3-3 الضرب الداخلي

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين في كلٍّ مما يأتي :

1) $\mathbf{u} = \langle 3, 6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2 \rangle$

2) $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

3) $\mathbf{u} = \langle 2, 0 \rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1 \rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle -1, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 12 \rangle$

5) $\mathbf{u} = \langle -6, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 12 \rangle$

6) $\mathbf{u} = 27\mathbf{i} + 14\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 7\mathbf{j}$

7) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

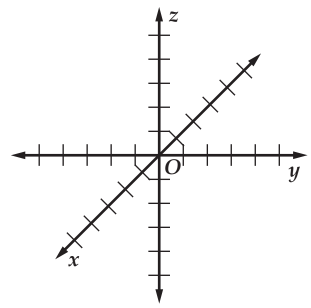
8) **مواصلات:** انطلق القطاران A , B من نقطة واحدة. إذا كان $\langle 33, 12 \rangle$ يُمثّل مسار القطار A ، و $\langle 55, 4 \rangle$ يُمثّل مسار القطار B ، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين.

9) **فيزياء:** يدفع شخص عربة على أرض مستوية بقوة مقدارها 100N، بزاوية لأسفل قياسها $30°$ عن الأفقي. أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله الشخص إذا حرّك العربة مسافة 6m، وَقرّب الناتج إلى أقرب عدد صحيح. (إرشاد: استعمل الصيغة $W = F \cdot d$ ، حيث W الشغل بالجول، وَ F القوة بالنيوتن، وَ d المسافة بالأمتار).

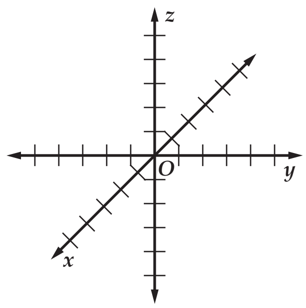
3-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد

عيّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد أدناه :

1) $(-3, 4, -1)$

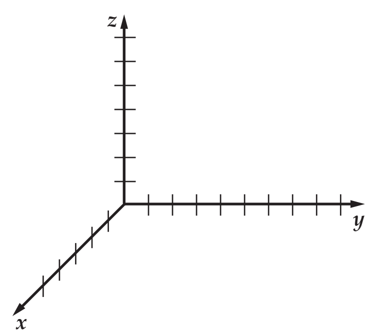


2) $(2, 0, -5)$

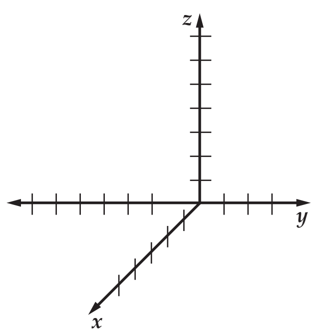


مثّل كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد أدناه :

3) $\langle 4, 7, 6 \rangle$



4) $\langle 4, -2, 6 \rangle$



أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه وحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$:

5) $A(2, 1, 3), B(-4, 5, 7)$

6) $A(4, 0, 6), B(7, 1, -3)$

7) $A(-4, 5, 8), B(7, 2, -9)$

8) $A(6, 8, -5), B(7, -3, 12)$

أوجد إحداثيي نقطة المنتصف، وطول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفيها في كلٍّ مما يأتي :

9) $(3, 4, -9), (-4, 7, 1)$

10) $(-17, -3, 2), (3, -9, 5)$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهين $\mathbf{v} = \langle 2, -4, 5 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 6, -8, 9 \rangle$:

11) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$

12) $5\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$

3-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

1) $\langle -2, 0, 1\rangle , \langle 3, 2, -3\rangle$

2) $\langle -4, -1, 1\rangle , \langle 1, -3, 4\rangle$

3) $\langle 0, 0, 1\rangle , \langle 1, -2, 0\rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة:

4) $\mathbf{u} = \langle 1, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 3, -2\rangle$

5) $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, -2, 5\rangle$

6) $\mathbf{u} = \langle 2, -4, 4\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -1, 6\rangle$

أوجد الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

7) $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 4\rangle , \mathbf{v} = \langle -1, 0, -1\rangle$

8) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -6\rangle , \mathbf{v} = \langle -2, 4, 3\rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle 3, 1, 2\rangle , \mathbf{v} = \langle 2, -3, 1\rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle 4, -1, 0\rangle , \mathbf{v} = \langle 5, -3, -1\rangle$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي:

11) $\mathbf{u} = \langle 9, 4, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -4, 2\rangle$

12) $\mathbf{u} = \langle 2, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, -8, -5\rangle$

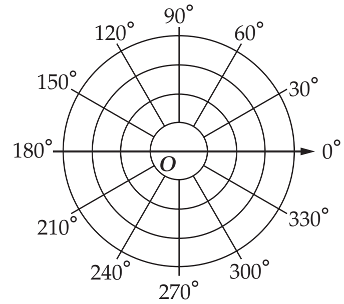
13) أوجد حجم متوازي السطوح الذي تكون فيه المتجهات $\langle 2, -5, -8\rangle , \langle 7, -2, -6\rangle , \langle 9, -2, 3\rangle$ أحرفًا متجاورة.

الوحدة الثالثة: المتجهات

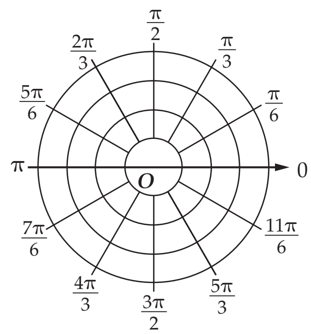
4-1 الإحداثيات القطبية

مثِّل كل نقطة مما يأتي في المستوى القطبي أدناه:

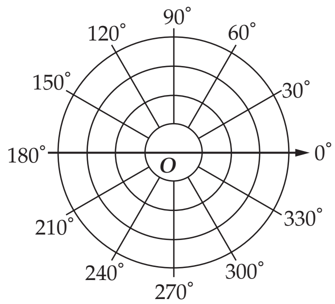
1) $(2.5, 0°)$



2) $(-2, \frac{\pi}{4})$

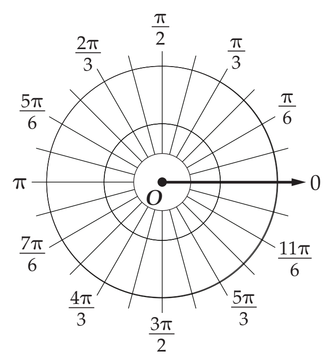


3) $(-1, -30°)$

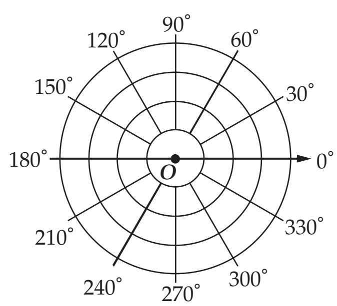


مثِّل كل معادلة قطبية مما يأتي بيانيًّا في المستوى القطبي أدناه:

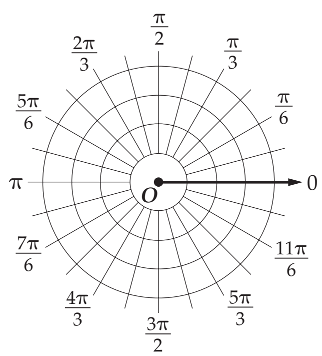
4) $r = 3$



5) $\theta = 60°$

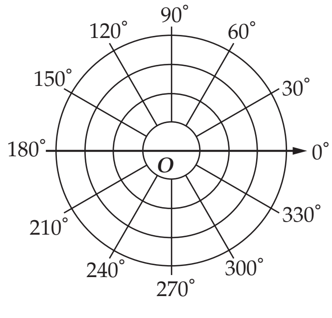


6) $r = 4$



7) منظر طبيعي: صمَّم أحد المعماريين حديقة في مبنى جديد.

a) إذا وضع المصمِّم نخلة عند النقطة $(3, -135°)$، فمثِّل موقع النخلة في المستوى القطبي أدناه.



b) إذا أراد المصمم وضع مقعد عند $(-4, 85°)$ ، وإنشاء بركة عند $(1, 105°)$ فأوجد المسافة بين المقعد والبركة، مقرّبًا الناتج إلى أقرب جزءمن مئة إذا لزم الأمر.

4-2 الصورة القطبية والصورة الديكارتية للمعادلات

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية، لكل نقطة مما يأتي:

1) $(6, 120°)$ **2)** $(-4, 45°)$ **3)** $(4, \frac{\pi}{6})$

أوجد زوجين مختلفين كل منهما يمثِّل إحداثيات قطبية لكل نقطة معطاة بالإحداثيات الديكارتية، في كلٍّ مما يأتي:

4) $(2, 2)$ **5)** $(2, -3)$ **6)** $(-3, \sqrt{3})$

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القطبية:

7) $x^2 + y^2 = 9$ **8)** $y = 3$

اكتب كلًّا من المعادلتين القطبيتين الآتيتين على الصورة الديكارتية:

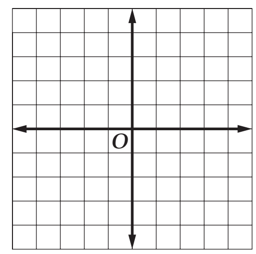
9) $r = 4$ **10)** $r \cos \theta = 5$

11) مساحة: وجد مسّاح حدًّا لأرض عند نقطة إحداثياها القطبيين $(40, 62°)$. ما الإحداثيات الديكارتية لهذه النقطة؟

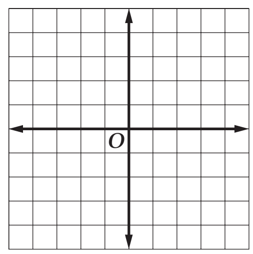
4-3 الأعداد المركبة ونظرية ديموافر

مثّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى المركب، وأوجد قيمته المطلقة (قرب إلى أقرب جزء من مئة):

1) $2+3\boldsymbol{i}$



2) $-1+4\boldsymbol{i}$



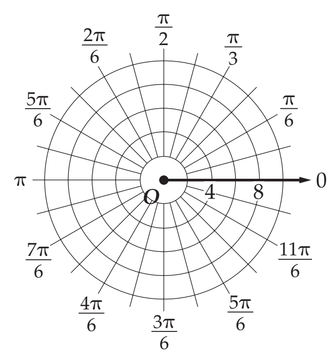
اكتب كلًّا من العددين المركبين الآتيين على الصورة القطبية:

3) $2+2\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$

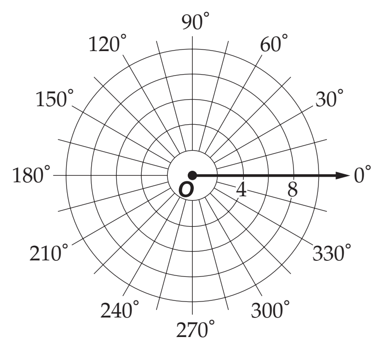
4) $3\sqrt{3}-3\boldsymbol{i}$

مثِّل كلًّا من العددين المركبين الآتيين في المستوى القطبي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

5) $4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\boldsymbol{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$



6) $5\,(\cos 150°+\boldsymbol{i}\sin 150°)$



أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

7) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 5\left(\cos\frac{\pi}{3}+\boldsymbol{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)$

8) $8\,(\cos 240°+\boldsymbol{i}\sin 240°)\div 4\,(\cos 210°+\boldsymbol{i}\sin 210°)$

أوجد الناتج لكلٍّ مما يأتي، ثم عبِّر عنه بالصورة الديكارتية:

9) $(-\sqrt{3}+\boldsymbol{i})^5$

10) $(1+\boldsymbol{i})^{10}$

أوجد جميع الجذور المطلوبة للعددين المركبين الآتيين:

11) الجذور الرباعية للعدد $-8+8\sqrt{3}\,\boldsymbol{i}$

12) الجذور السباعية للعدد $\boldsymbol{i}$

13) كهرباء: أوجد شدة التيار المار في دائرة كهربائية فرق جهدها $12\,V$، ومعاوقتها $(2-4\boldsymbol{j})\,\Omega$ مستعملاً الصيغة $V=I\cdot Z$، حيث V فرق الجهد بالفولت، و I شدة التيار بالأمبير، و Z المعاوقة بالأوم (قرِّب إلى أقرب جزء من عشرة).

(إرشاد: يستعمل مهندسو الكهرباء الرمز $\boldsymbol{j}$ للدلالة على العدد التخيلي $\boldsymbol{i}$؛ لذا فهم يكتبون العدد المركب على الصورة $a+b\boldsymbol{j}$. عبِّر عن كلّ عدد على الصورة القطبية وعوِّضها في الصيغة المعطاة، ثم اكتب مقدار شدّة التيار على الصورة الديكارتية).

5-1 تقدير النهايات بيانيًّا

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} (4-\sqrt{x})$

2) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{3-x}{|x-3|}$

3) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x+7}{x^2+8x+7}$

5) $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x+7}{x^2+8x+7}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2}$

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي:

7) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x^2}{x^2+1}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x-2}{x-1}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty} (2.7)^{3x+2}$

11) **مُعدّل التغيّر:** يرتكز سلم طوله 20 ft على جدار. سُحِبت قاعدة السلم بعيدًا عن الجدار بمُعدّل 3 ft/sec. فبدأ الطرف العلوي للسلم في بالهبوط بمُعدّل $r(x) = \dfrac{3x}{\sqrt{400-x^2}}$ قدمًا لكل ثانية، حيث x المسافة بين قاعدة السلم والجدار. قدّر $\lim\limits_{x\to 20^-} r(x)$ باستعمال التمثيل البياني بالآلة البيانية.

12) **كتب:** تمثل الدالة $v(t) = \dfrac{300}{6+35(0.2)^t}$ سعر كتاب بالدرهم بعد t سنة من نشره. كم يكون الثمن النهائي للكتاب؟ أيْ أوجد $\lim\limits_{t\to\infty} v(t)$ باستعمال التمثيل البياني بالآلة البيانية.

13) **تلوُّث:** يمكن تقدير تكلفة تنظيف بقعة ملوثة بمخلفات كيميائية بالدالة $C(x) = \dfrac{312\,x}{100-x}$، حيث C التكلفة بالدرهم، و x كمية المخلفات الكيميائية بالجرامات، $0 \le x < 100$. قدّر $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x)$.

5-2 حساب النهايات جبريًا

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

1) $\lim_{x\to 3} (x^2+3x-8)$

2) $\lim_{x\to -6} \frac{x^2-36}{x+6}$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{(3+x)^2-9}{x}$

4) $\lim_{x\to 4} \sqrt{x^2-2x+1}$

5) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{2x^2+5x-7}$

6) $\lim_{x\to 3^+} \frac{x^2}{2+\sqrt{x-3}}$

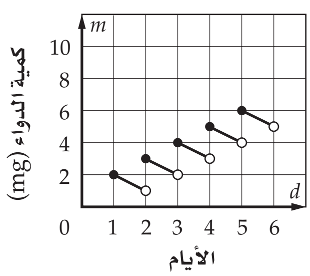
7) $\lim_{x\to \infty} (2-6x+5x^3)$

8) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5-8x^2}{4x^5+3x}$

9) $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-4x+1}{5x^4-2x^2}$

10) $\lim_{x\to -\infty} (6x^7-x^2)$

11) **دواء:** يتناول عامر 2mg من الدواء يوميًّا، ويبيّن الشكل المجاور كمية الدواء $m(d)$ المتبقية في دمه بعد d يومًا. أوجد $\lim_{d\to 3^-} m(d)$ ، $\lim_{d\to 3^+} m(d)$.



5-3 المماس والسرعة المتجهة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقطة المعطاة :

1) $y = x^2 - x, (3, 6)$

2) $y = \frac{5}{x}, (-1, -5)$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

3) $y = -2x + 1$

4) $y = x^3 - 2x^2$

تمثّل $h(t)$ في كلٍّ مما يأتي، بُعد جسم متحرك بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللحظية لهذا الجسم عند الزمن المعطى :

5) $h(t) = 300 - 16t^2, t = 2$

6) $h(t) = -16t^2 + 200t + 700, t = 3$

تمثل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن :

7) $h(t) = 17t^2 + 8$

8) $h(t) = 5t^3 - 6t^2 + 4t + 1$

9) $h(t) = \sqrt{t} - 2t^2$

10) $h(t) = \frac{3}{t} + 2t$

11) مظلّيّ: يمكن تمثيل ارتفاع مظلّيّ عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية بالدالة $h(t) = 18000 - 16t^2$. أوجد سرعة المظلي المتجهة اللحظية $v(t)$.

12) كرة قدم: ركل علي كرةً بسرعة ابتدائية مقدارها 58 ft/sec. وتمثل الدالة $h(t) = -16t^2 + 58t + 6$ ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية.

a) أوجد سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$.

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد 1.5 sec ؟

5-4 المشتقّات

أوجد مشتقة كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة :

1) $g(x) = 3x^2 - 5x, x = -2, 1$

2) $h(x) = 4x^3 - x^2, x = 3, 0$

3) $f(x) = x^2 - 4x + 7, x = 2, -3$

4) $m(x) = -2x^2 - 6x + 1, x = 0, -3$

5) $q(x) = -1 + x^3 - 2x^4, x = -1, 3$

6) $t(x) = 3x^7 - 1, x = -1, 1$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

7) $f(x) = (x^2 + 5x)^2$

8) $f(x) = x^2 (x^3 + 3x^2)$

9) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$

10) $h(x) = -\dfrac{3}{x^6}$

11) $p(x) = -4x^5 + 6x^3 - 5x^2$

12) $n(x) = (3x^2 - 2x)(x^3 + x^2)$

13) $r(x) = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 2}$

14) $q(x) = \sqrt{x}\,(x^2 - 3)$

15) فيزياء: تسارع جسم متحرك هو مُعدّل تغيّر سرعته. تمثل الدالة $v(t) = 3t^2 - 6t + 5$ سرعة جسم متحرك بالمتر لكل ثانية. أوجد تسارع الجسم بالمتر لكل ثانية تربيع بعد 5 sec (إرشاد: التسارع هو مشتقة السرعة).

5-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ والمحور x ، على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي باستعمال الطرف المعطى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة :

1) $f(x) = x + 3$

$[1, 5]$

الطرف الأيسر

2) $f(x) = -x^2 + 6x - 4$

$[2, 5]$

الطرف الأيمن

3) $f(x) = 3x^3$

$[0, 4]$

الطرف الأيسر

4) $f(x) = 1 + x^2$

$[1, 6]$

الطرف الأيمن

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطى بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

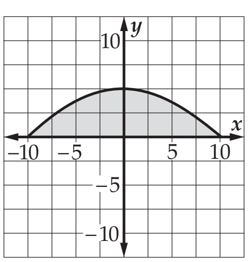
5) $\int_0^2 x^2\, dx$

6) $\int_1^6 6x^2 dx$

7) $\int_1^3 (x^2 - x)\, dx$

8) $\int_{-2}^{1} (-x^2 - 2x + 11)\, dx$

9) تصميم وعمارة : يصمم مهندس نافذة زجاجية يمكن نمذجتها بِـ $y = 5 - 0.05\, x^2$ ، والممثلة بيانيًّا في الشكل المجاور. ما مساحة سطح النافذة؟



5-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي :

(1 $f(x) = 4x^3$

(2 $f(x) = 2x + 3$

(3 $f(x) = x(x^2 - 3)$

(4 $f(x) = 8x^2 + 2x - 3$

احسب كل تكامل مما يأتي :

(5 $\int 8\,dx$

(6 $\int (2x^3 + 6x)\,dx$

(7 $\int (-6x^5 - 2x^2 + 5x)\,dx$

(8 $\int_2^5 2x\,dx$

(9 $\int_{-5}^{-1} (-4x^3 - 3x^2)\,dx$

(10 $\int_{-2}^{1} (1 - x)(x + 3)\,dx$

(11 فيزياء: الشُّغل اللازم بوحدة الجول لضغط نابض مسافة ℓ قدم من وضعه الطبيعي يُعطى بالصيغة $W = \int_0^{\ell} 2x\,dx$. ما مقدار الشُّغل اللازم لضغط النابض مسافة 6 in من وضعه الطبيعي؟

(12 أعمال النجارة: افرض أن عدد الساعات التي يحتاج إليها نجار لصناعة p قطعة أثاث مُعطى بالتكامل $h = \int_0^{p} (30 - 3x)\,dx$ ، فكم ساعة يحتاج هذا النجار لصناعة 6 قطع أثاث؟

التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل