التكامل بالتعويض Integration by Substitution

المجموعة التمهيدية :

أوجدي تكامل كل من

1) $\int x(x^2+1)dx$
2) $\int x^3\sqrt{x^2}\,dx$
3) $\int cos7xdx$
4) $\int x(x^2+1)^{10}dx$
5) $\int x^2\sqrt{x^3+1}dx$
6) $\int xcos(7x^2)dx$

Group one

Use an appropriate substitute and solve the following:-

1) $\int(x+2)^5dx$
2) $\int(3x+2)^5dx$
3) $\int x(x^2-1)^5dx$
4) $\int\sqrt{4x-1}dx$
5) $\int 2x(x^2+1)^3dx$
6) $\int 2x(x^2+1)^5dx$
7) $\int 2x(x^2+4)^{100}dx$
8) $\int(x+3)\sqrt{x^2+6x+1}dx$
9) $\int\frac{(-2x+1)}{\sqrt[3]{-x^2+x+3}}dx$

Group two

Use an appropriate substitute and solve the following integrals:-

1) $\int x\sqrt{4x-1}dx$
2) $\int x(x+1)^5dx$
3) $\int x(1-3x)^5dx$
4) $\int(x+2)(2x-1)^5dx$
5) $\int\frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}dx$ Use substitution $a)\ u=x+2$ $b)\ u=\sqrt[4]{x+2}$
6) $\int x^3\sqrt{x^2+1}dx$ Use substitution $a)\ u=x^2+1$ $b)\ u=\sqrt{x^2+1}$

Group three

Use an appropriate substitute and solve the following integrals:-

1) $\int \cos(7x+5)\,dx$
2) $\int (2x-1)\sin(x^2-x+3)\,dx$
3) $\frac{(x+1)}{cos^2(x^2+2x+3)}dx$
4) $\int 2\sin x\cos x\,dx$
5) $\int cos^4\theta\sin\theta\;\;d\theta$
6) $\int x[1+\tan^2(x^2-1)]dx$

Group Four

a) استخدم تعويضا u وكامل من $u(a)$ إلى (b) .

1) $\int_1^3 \sqrt{y-1}\,dy$

2) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{\theta}}{(1+\theta^{\frac{3}{2}})^2}d\theta$

3) $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}\,(5t^4+2)dt$

b) استخدم تعويضا مناسبا .... ثم

ا) كامل بالنسبة إلى u من $u(a)$ إلى $u(b)$.

ب) أوجد مشتقة عكسية بالنسبة إلى u ضع u مكان التعبير في x ثم احسب التكامل من a إلى b

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 3x)\sin 3x\,dx$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}}dx$

أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int (2x+1)^9 \, dx$

أرشاد ضع $u = 2x+1$

.....
.....
.....
.....

(2) $\int \frac{dx}{(1-3x)^9}$

.....
.....
.....
.....

(3) $\int \sqrt[3]{(x-4)} \, dx$

.....
.....
.....
.....

(4) $\int (x^2-3)^5 \, x \, dx$

(أرشاد ضع $u = x^2-3$)

.....
.....
.....
.....

(5) $\int (1-\frac{1}{x})^5 \frac{dx}{x^2}$

إرشاد : ضع $u = 1 - \frac{1}{x}$

.....
.....
.....
.....
.....

(6) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$

إرشاد : ضع $u = \cos x$

.....
.....
.....

(7) $\int \sin^7 x \, dx$

(أرشاد ضع $u = \cos x$)

.....
.....
.....
.....

(8) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$

(أرشاد ضع $u = \sqrt{1-x}$)

.....
.....
.....
.....
.....

(9) $\int \sin^2 (\sin x) \cos x \, dx$

.....
.....
.....
.....

(11) $\int \frac{x^3}{(x^2-1)^2 (x^2+1)^2} \, dx$

.....
.....
.....
.....

(12) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x + \cos x - 2} \, dx$

.....
.....
.....
.....

(13) $\int \sqrt[3]{x^3+x^5}\ dx$

(أرشاد ضع $u = x^2+1$)

.....

.....

.....

.....

(14) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos x + \cos^2 x}\ dx$

.....

.....

.....

(15) $\int x(x-5)^7\ dx$

.....

.....

.....

(16) $\int (x+3)(2-x)^5\ dx$

إرشاد ضع $u = 2-x$

.....

.....

.....

(17) $\int (x-3)(x^2-4x+7)^{3/2}\ dx$

.....

.....

.....

.....

(18) $\int x^2(x^2-3)^4\ dx$

.....

.....

.....

.....

(19) $\int (x-2)\sqrt{x^2-4x+1}\ dx$

.....

.....

.....

.....

(20) $\int \frac{2}{x^2}(3 - \frac{4}{x})^3 \, dx$

.....
.....
.....
.....

(21) $\int x^7(1 + \frac{3}{x})^7 \, dx$

.....
.....
.....
.....

(22) $\int (x^2 - 6x + 9)^4 \, dx$

.....
.....
.....
.....

(23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(2\sqrt{x}+1)^2} \, dx$

.....
.....
.....
.....
.....

(24) $\int x^{10}(1 - \frac{3}{x})^9 \, dx$

.....
.....
.....
.....
.....

(25) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \sec^2 x dx$

(26) $\int \cot^2 x \csc^2 x \ dx$

(27) $\int (\cot^3 x \csc x)^2 \ dx$

(28) $\int \frac{x \sin\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}} \ dx$

(29) $\int \frac{\csc^2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \ dx$

(30) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \ dx$

(31) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}\,dx$

.....
.....
.....
.....

المعادلات التفاضلية القابلة لانفصال المتغيرين Separable Differential Equations

حل المعادلة التفاضلية التالية

$(2x+1)\,dy + (3y+2)\,dx = 0$

.....
.....
.....
.....

Integration by Parts التكامل بالتجزئ

Primary group

How can we solve the following integrals:-

1) $\int x(x-1)dx$
2) $\int (x-2)(x+3)dx$
3) $\int x(x-1)^{100}dx$
4) $\int x sin\, x^2\, dx$
5) $\int x\, sin\, x\, dx$

Group one:-

solve the following integrals

1) $\int x\, cos\, x\, dx$

$Let\ u = x$ $\qquad dv = cos\, x\, dx$

$du = dx$ $\qquad v = sin\, x$ then solve the integration

$\therefore \int x\, cox\, xdx = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . - \int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . \ldots\ldots\ldots . . - \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c$

2) $\int xe^x\, dx$

$u = \cdots \ldots\ldots\ldots . .$ $\quad dv = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . dx$

$du = \ldots\ldots\ldots\ldots .$ $\quad V = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore \int x\, e^x dx = \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . - \int \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots . \ldots\ldots\ldots . . - \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c$

3) $\int x\sqrt{x+1}dx$
4) $\int \ln x\, dx$

Group two:

Frequent use of integration by parts

Solve the following integrals

1) $\int x^2 e^x dx$
2) $\int x^2 \sin x \, dx$
3) $\int x^2 \sqrt{1-x} dx$

Group three :

تكامل بالتجزئ لا ينتهي

Solve the following integrals

1) $\int e^x \cos x \, dx$
2) $\int \cos x \, dx$

Group four :-

Defined Integrals

1) $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$
2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 2x \, dx$
3) $\int_{-3}^{2} e^{-2x} \sin 2x \, dx$
4) $\int_1^e \ln x \, dx$

المجموعة الخامسة

التكامل الجدولي :

مثال : استخدم التكامل الجدولي في إيجاد $\int x^2 \cos x dx$

الإشارات	$f(x)$ و مشتقاتها	$g(x)$ و تكاملاتها
+	x^2	cos x
-	2x	sin x
+	2	-cos x
-	0	- sin x

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2x(-\cos x) + 2(-\sin x) + c$$

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c$$

باستخدام التكامل الجدولي : أحسب

(11) $\int x^2 \sin x \, dx$

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

(12) إذا كان $f(2)=5 \, , f(0)=2 \, , f'(2)=1 \, , f'(0)=-2 \, , f''(2)=3 \, , f''(0)=2$ فاوجد قيمة

$$\int_0^2 x^2 f'''(x)dx$$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

(13) $\int e^x \sin x \, dx$

.....
.....
.....
.....
.....

المجموعه السادسة :

قيم التكامل باستخدام التعويض والتكامل بالتجزئ

$$\int sin\sqrt{x}dx$$

الكسور الجزئية Partial Fractions

التمارين التمهيدية :-

1) أوجد ناتج القسمة والباقي ثم اكتب الناتج علي صورة

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

$g(x) = x^2 + 1$

2) اعيدي كتابة الاتي علي صورة مقدار نسبي واحد

$$\frac{3}{x-4} + \frac{2}{x+3}$$

3- Find the values of a, b, c where $p(x) = q(x)$

$If \quad p(x) = 2x^2 - 4x + 5$

$q(x) = ax^2 + (2b - a)x + 3b - c$

Group one

Denominator can be analyzed to linear non repeated coefficients

1) $\int \frac{-x+10}{x^2+x-12} dx$
2) $\int \frac{x}{x^2+4x-5} dx$
3) $\int \frac{x-1}{x^2-4} dx$
4) $\int \frac{x+2}{x^2+7x+12} dx$
5) $\int \frac{4}{x^2-2x-3} dx$

Group two

Denominator can be analyzed to a linear repeated coefficients.

1) $\int \frac{x+2}{x(x-1)^2} dx$

$$\frac{x+2}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$$x + 2 = A(x-1)^2 + B\,x\,(x-1) + C\,x$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 0 + 2 = A(0-1)^2 \quad \rightarrow A = 1$$

$$x = 1 \rightarrow \quad 1 + 2 = C \times 1 \quad \rightarrow \quad C = 3$$

$$x = 2 \rightarrow \quad 2 + 2 = 1(2-1)^3 + B\,x\,2\,(2-1) + 3 \times 2 \rightarrow \quad B = \frac{-3}{2}$$

Students continue solving the question

2) $\int \frac{2}{x(x+1)^2} dx$
3) $\int \frac{x-1}{x^2(x-2)} dx$
4) $\int \frac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x} dx$

Group three

Nominator power is greater than or equal the denominator power:-

We write $f(x)$ on the form $q(x) + \frac{r(x)}{h(x)}$ where $r(x)$ is less power than $h(x)$

1) $\int \frac{x^3-2}{x^2+x} dx$
2) $\int \frac{x^2}{x^2+x-2} dx$
3) $\int \frac{x^2-x}{x^2-9} dx$
4) $\int \frac{x^3+x-2}{x^2+x-2} dx$
5) $\int \frac{2x^3-4x^2+8}{x^3-4x} dx$
6) $\int \frac{x^2+2}{x+2} dx$

Group four

Find the equivalent partial fractions

Denominator has a second degree coefficient and can't be analyzed

Find the equivalent partial fractions for the following :-

1) $\int \frac{x^2+4x+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$
2) $\int \frac{x^2+3x+1}{x^3+1}\,dx$
3) $\int \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x}\,dx$