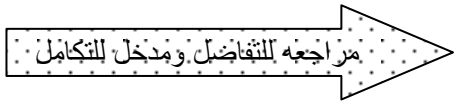
Revision مراجعة

قواعد الاشتقاق :

	الدالة	المشتقة
1.	$f(x) = c$ حيث ثابت	
2.	$f(x) = x$	
3.	$f(x) = cx$	
4.	$f(x) = x^n \quad n \in R$	
5.	$f(x) = cx^n$	
6.	$f(x) = R(x) \mp N(x)$	
7.	$f(x) = R(x) \times N(x)$	
8.	$f(x) = \frac{R(x)}{N(x)} \quad N(x) \neq 0$	
9.	$f(x) = \frac{c}{N(x)} \quad N(x) \neq 0$	
10.	$f(x) = \frac{R(x)}{c} \quad c \neq 0$	
11.	$f(x) = (N(x))^n$	
12.	$f(x) = \sqrt[n]{(R(x))^m}$	

مشتقات الدوال المثلثية :

	الدالة	المشتقة
1.	$f(x) = csc\, x$	
2.	$f(x) = \sec x$	
3.	$f(x) = \cot x$	
4.	$f(x) = \tan x$	
5.	$f(x) = \cos x$	
6.	$f(x) = \sin x$	



السؤال الاول :- **أوجد مشتقات الدوال الآتيه ؟**

- $f(x) = x^3 + 5\text{x} - 7$

  ……

  ……

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{5}{x} + \pi^2$

  ……

  ……

- $f(x) = (\boldsymbol{3x + 2})(\boldsymbol{4x - 1})$

  ……

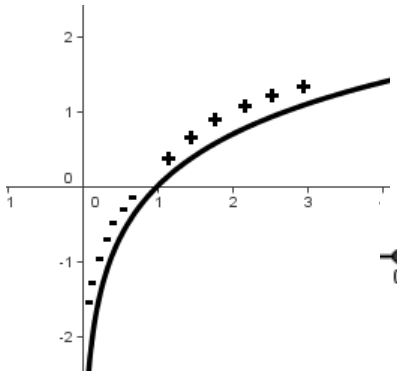
  ……

- $f(x) = \frac{2x+1}{5+3x}$

  ……

  ……

دالة اللوغاريتم الطبيعي



1) $\ln x$: مجالها $R_+ \leftarrow R$ (متصلة)

2) متزايدة : ليس لها قيم قصوى محلية

3) تقعرها لأسفل على مجالها (ليس لها نقاط انعطاف)

4) دراسة الإشارة :

قوانين هامة :

$1)\ \ln e = 1$

$2)\ \ln 1 = 0$

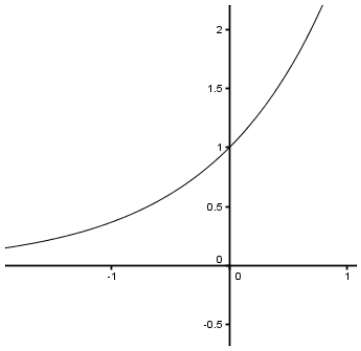
$3)\ \ln e^x = x \ln e = x$

$4)\ \ln a^n = n \ln a$

$5)\ \ln(a+b) = \ln a + \ln b$

$6)\ \ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

الدالة الأسية الطبيعية



خواص :

1) e^x : مجالها $R \leftarrow R_+$ (متصلة)

2) متزايدة (ليس لها قيم قصوى محلية)

3) تقعرها لأعلى (ليس لها نقاط اعطاف)

4) دراسة الإشارة : $\forall x \in R$.....$e^x > 0$ ، $e^x \neq 0$

قوانين هامة (نفس قوانين الأسس)

$1) e^x \times e^y = e^{x+y}$

$2) \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$

$3) (e^x)^y = e^{xy}$

$4) \frac{1}{e} = e^{-1}$

$5)\ \ln e^x = x$

$6) e^{\ln x} = x$

اشتقاق الدوال الاسية الطبيعية واللوغاريتمية الطبيعية

اشتقاق	
دالة اللوغاريتم الطبيعي	دالة الآس الطبيعي
$\frac{d}{dx}\ln\lvert x\rvert = \ldots\ldots\ldots x \neq 0$	$\frac{d}{dx}e^{x} = \ldots\ldots\ldots$
$\frac{d}{dx}\ln\lvert f(x)\rvert = \ldots\ldots\ldots$	$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = \ldots\ldots\ldots$

السؤال الأول: أوجدي $\frac{dy}{dx}$

المجموعة (أ)	المجموعة (ب)
$y = \ln\lvert x^3\rvert$	$y = \ln\lvert\sin x\rvert$
$y = \sin\left(\frac{5}{\ln\lvert x\rvert}\right)$	$y = x^3\ln\lvert x\rvert$
$y = \ln(2-\cos x)$	$y = \ln(\ln x)$
$y = (\ln x)^5$	$y = \ln(\sin x + x)$
$y = \ln((x+1)(x-2))$	$y = \sin(\ln x) + \ln(\sin x)$

السؤال الأول: أوجدي $\frac{dy}{dx}$

المجموعة (أ)	المجموعة (ب)
$y = 2e^{x}$	$y = xe^{2} - e^{x}$
$y = e^{\sqrt{x}}$	$y = x^{-\sqrt{2}}$
$y = x^{\pi}$	$y = 2e^{\frac{2x}{3}}$

تمرين1 : أوجد معادلة المماس للمنحني $y=e^{x}$ والذي يمر بنقطة الأصل والعمودي عليه.

الرياضيات سواء أحببناها او كرهناها ، سواء عشقناها أو بغضناها فهي أولا وأخيرا الملكة ، ملكة العلوم جميعها ، ولأللملكة تاج ، فإن علم التفاضل والتكامل هو تاج هذه الملكة . ليكون التكامل هو لؤلؤة هذا التاج . ولأن التكامل كما يجمع الكثيرون سواء من عشاق الرياضيات أو كارهوها ، على أنه من أصعب فروع الرياضيات عامة .

مثال :

بين أن الدالة : $N(x) = 4x^2 + 5$ هي دالة المشتقة العكسية للدالة $f(x) = 8x$.

تمارين **إثبت أن الدالة** $f(x) = x^3 - \cos x + 7$ هي المشتقة العكسية للدالة

$g(x) = 3x^2 + \sin x \quad x \in [0, \pi]$

مثال : **إثبت أن** المشتقة العكسية للدالة $f(x) = \frac{-5}{(x-5)^2}$ حيث $x \in [1,5]$ هي

$$F(x) = \frac{x}{(x-5)} - 1$$

تمرين إثبت أن الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x^3+5}$ هي المشتقة العكسية للدالة

$$g(x)=\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+5)^2}}$$

1) $f:[2,5]\to R$

$f(x)=e^{2x}\left(\frac{1}{x}+\ln 9x^2\right)$ **أثبت أن** الدالة $g(x)=e^{2x}\,ln(3x)$ هي المشتقة العكسية للدالة f على [2,5] .

2) $f:\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\to R$

$f(x)=x(\ln\cos^2 x-x\tan x)$ **اثبت أن** الدالة $g(x)=x^2\ln(\cos x)$ هي المشتقة العكسية للدالة f على $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$

3) لتكن الدالتان $G(x)=\frac{1}{2}cos^2x$ ، $F(x)=-\frac{1}{4}\cos 2x$ اثبت أن الدالتان $F(x),G(x)$ هما المشتقة العكسية للدالة $f(x)$

المشتقة العكسية و التكامل الغير محدد

$f(x) = F'(x)$=.....	$F(X) = x^2 + 4$
$= S'(x)$=.....	$S(X) = x^2 - 7$
$= P'(x)$=.....	$P(X) = x^2 + 3.8$
$= N'(x)$=.....	$N(X) = x^2 + \pi$
$= L'(x)$=.....	$L(X) = x^2 - \sin\pi$

نجد أن : $F(x) = x^2 + c$ وتسمي المشتقة العكسية للدالة $f(x) = 2x$

نظرية 1 : ص8 **تمارين في ورق التحضير**

(1) لتكن الدالتان $F(x) = x^2 - 4x + 1$ ، $G(x) = (x-2)^2$ كل منهما تمثل المشتقة العكسية للدالة $f(x)$. أوجد

(أ) قيمة الثابت C الذي تختلف به الدالتان $F(x)$; $G(x)$

.....

.....

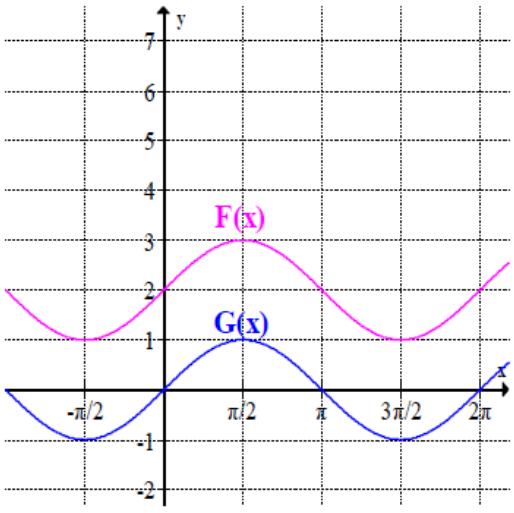
.....

(ب) أوجد الدالة $f(x)$

.....

.....

(2) الشكل المقابل : يمثل الدالتان : $F(X)$, $G(X)$. أثبت أن الدالتان $F(X)$, $G(X)$ كل منهما المشتقة العكسية لدالة و لتكن $f(x)$



تعريف : التكامل غير المحدد

مجموعة كل المشتقات العكسية للدالة f(x) هي التكامل غير المحدد للدالة fبالنسبة إلي x و يرمز :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

$$(A)\int a dx = ax + C$$

$$1)\int 5dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2)\int \frac{3}{2}dy = \ldots\ldots\ldots$$

$$3)\int \sqrt{7}dz = \ldots\ldots\ldots$$

$$4)\int \sin\frac{\pi}{2}dx = \ldots\ldots\ldots$$

$$B)\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C\ldots\ldots n \neq -1$$

$$1)\int 5x^3dx = ...$$

$$2)\int 3x^{-2}dx = ...$$

$$3)\int \frac{\pi}{x^3}dx = ...$$

$$4)\int x\sqrt{x}dx = ...$$

$$5)\int \sqrt[3]{x^2}dx = ...$$

خواص التكاملات غير المحددة

ليكن k عددا حقيقيا :

(1) قاعدة الجمع و الطرح

$$\int (f(x) \pm g(x)) = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

(2) قاعدة الضربفي ثابت

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

إذا كان k=-1 فإن

$$\int -f(x)dx = -\int f(x)dx$$

أمثلة : اوجدي التكاملات الاتية :

1) $\int (5x^2 - 3x + 1)dx$	2) $\int (x^2(1-x))dx$
3) $\int (2x^{-3} + x^{-2})dx$	4) $\int (\frac{3}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{3})dx$
5) $\int (2x - 1)^2 dx$	6) $\int (2\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} + 1)dx$
7) $\int (x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})dx$	8) $\int (\sqrt{x} - 1)^2 dx$
9) $\int (2x^3 - \frac{x}{\sqrt{x}} + 1)dx$	10) $\int -\frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

أمثلة : اوجدي التكاملات الاتية :

$11)\int(\sqrt{x}(1-\sqrt{x}))dx$	$12)\int\frac{x^2-x-2}{x-2}dx$
$13)\int\frac{x^4-x-2}{x^3}dx$	$14)\int(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})dx$
$15)\int\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}dx$	$16)\int\frac{x^3+1}{x^3}dx$
$17)\int(2x-1)(x+1)dx$	$18)\int(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$

تكامل الدوال المثلثية

جدول التكاملات : (المتطابقات المثلثية)

أوجد التكاملات الاتيـــة:

$$1)\int \sec t \tan t dt = ...$$

$$2)\int \cot^2 t dt = ...$$

$$3)\int \csc^2 7t dt = ...$$

$$4)\int 5\sec^2 5r dr = ...$$

المجموعة الاولى :

$$1)\int (\sin^2 x + \cos^2 x)dx = ...$$

$$2)\int (\sin 2x \sec x)dx = ...$$

$$3)\int \frac{\sin x}{\tan x}dx = ...$$

المجموعة الثانية :

4) $\int \sec x(\sec x + \cos x)dx = ...$

5) $\int \tan^2 x dx = ...$

6) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = ...$

المجموعة الثالثة :

7) $\int \frac{1}{1-\sin^2 x} dx = ...$

8) $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = ...$

9) $\int \frac{1-cox}{\sin^2 x} dx = ...$

المجموعة الرابعة :

$$10)\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx = ...$$

$$11)\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx = ...$$

$$12)\int \frac{\tan x}{\cos x}dx = ...$$

المجموعة الخامسة :

$$13)\int \frac{\cot x}{\sin x}dx = ...$$

$$14)\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}dx = ...$$

$$15)\int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = ...$$

المجموعة السادسة:

$$16)\int \frac{1}{\sin t \tan t} dt = ...$$

$$17)\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = ...$$

$$18)\int \cos^2 dx = ...$$

المجموعة السابعة:

$$19)\int \frac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = ...$$

$$20)\int \frac{1+\sin^2 x}{1-\cos^2 x} dx = ...$$

$$21)\int \frac{1-\cos^2 t}{1+\cos t} dt = ...$$

المجموعة الثامنة:

22) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x} dx = ...$

23) $\int \frac{1 + \sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} dx = ...$

24) $\int \frac{1 - \sin 2x}{\cos x - \sin x} dx = ...$

اختارى الإجابة الصحيحة :

a) $\int (3 + \tan^2 x) dx = ...$

1) $3x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

2) $3 + \frac{1}{3}\tan^3 x + c$

3) $2x + \tan x + c$

4) $2x - \tan x + c$

ابنتي حاولي التوصل للحل الصحيح :

b) $\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = ...$

1) $\cot x - x + c$

2) $-\cot x - x + c$

3) $\frac{1}{3}\cot^3 x + c$

4) $\frac{1}{3}\csc^3 x - x + c$

تكامل الدوال الاسية الطبيعية ، ودوال تؤول تكاملها إلى لوغاريتيمية طبيعية

تكامل	
دالة اللوغاريتم الطبيعي	دالة الآس الطبيعي
$\int \frac{1}{x} dx = ...$	$\int e^x dx = ...$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ...$	$\int f'(x) e^{f(x)} dx = ...$

أوجدي التكامل غير محدد	
$\int \frac{1}{2x} dx =$	$\int \frac{1}{3x+1} dx =$
$\int \frac{2x}{x^2+1} dx =$	$\int \frac{x-1}{x^2-2x-3} dx =$
$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$	$\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx =$

أوجدي التكامل غير محدد	
$\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx =$	$\int (e^{-2x} + 1) dx =$
$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx =$	$\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x} \right) dx =$

أوجد كلا مما يأتي :

$$1)\int \frac{1}{x} e^{\ln 5x} dx =$$

$$2)\int (e^{x})^{2} dx =$$

$$3)\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx =$$

$$4)\int \frac{1}{x^{2}} e^{\frac{1}{x}} dx =$$

$$5)\int \frac{1}{e^{1-x}} dx =$$

$$6)\int (x-1)e^{x^{2}-2x} dx =$$

$$7)\int (1+\tan^{2} x)e^{\tan x} dx =$$

$$8)\int \frac{e^{\cot x}}{\sin^{2} x} dx =$$

1) $\int (e^{3x} + \frac{2}{x})dx =$

2) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx =$

3) $\int \frac{1}{e^{x+1}} dx =$

4) $\int \frac{e^{3x} - e^{x}}{e^{x} - e^{2x}} dx =$

5) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx =$

6) $\frac{dy}{dx} : y = (e^{x^3})^2 + \ln(e^2 \sin x)$

7) $\frac{dy}{dx} : y = \frac{1}{e^{5x}} + \ln(2xe^{x}) + e^3$

8) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 3} dx =$

9) $e^{x^2 + \ln x} dx =$

10) $\int (e^{\tan x}(\sec^2 x) + \frac{3}{x})dx =$

11) $\int (e^{3x} + \frac{2}{x})dx =$

12) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx =$

13) $\int \frac{1}{e^{x+1}} dx =$

14) $\int \frac{e^{3x} - e^{x}}{e^{x} - e^{2x}} dx =$

15) $\int \frac{1}{x(3+\ln x)}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{(3+\ln x)}dx$

يكون البسط مشتقة المقام

$=\ln(3+\ln x)$

(16) ∫

اعط سؤلا مناسبا لكل اجابة من الاجابات التالية :

Give a suitable question to each answer of the following:

1) ---------- = $e^{x^2-3x+5}+c$

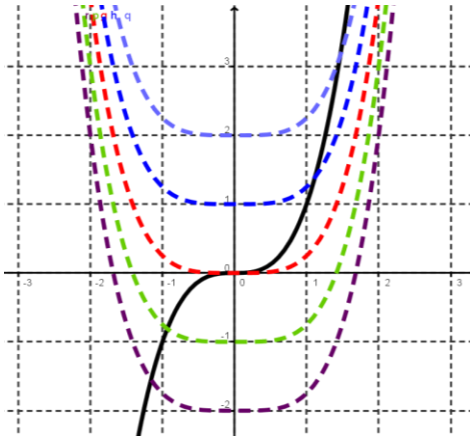
2) ----------= $\ln|\tan x|+c$

3) ----------= $\frac{-\cos 5t}{5}+c$

العلاقة بين الدوال ومشتقاتها(المعادلات التفاضلية)

$\int f'(x)dx = f(x)+c$

$\int f''(x)dx = f'(x)+c$



إذا كان للدالة $f(x) = x^3$ عدد لا نهائي من المشتقات العكسية والتي يظهر بعضها بالمنحنيات المنقطة كما بالشكل، حددي احدى هذه المنحنيات والذي يمر منحناها بالنقطة (1,2.1).

المجموعة الأولى :

افرض أن $f(x)=\frac{d}{dx}(x^2), g(x)=\frac{d}{dx}(x\sin x)$

$b)\int(-f(x))dx$

$c)\int(f(x)+g(x))dx$

$d)\int(-g(x))dx$

$e)\int(g(x)-4)dx$

المجموعة الثانية :

1) إذا كانت $f'(x)=5x+3$ أوجد $f(x)$ علما بأن $f(0)=6$

2) إذا كان $f'(x)=\frac{3}{\pi}-\sin x$ أوجد $f(x)$ علما بأن $f(\frac{\pi}{3})=3$

3) إذا كان $f'(x)=1+\cos x$ أوجد $f(x)$ علما بأن $f(\frac{\pi}{3})=3$

4) أوجد المشتقة العكسية للدالة $f'(x)=\sqrt[3]{x}$ بحيث $f(0)=2$

5) $f'(x)+e^x=\pi$

أوجدي $f(x)$ حيث $f(0)=2$

المجموعة الثالثة : حل المعادلات التفاضلية

1) $\frac{dy}{dx} = 2x - 1, y(2) = 0$	2) $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, y(-1) = 0$
3) $\frac{dy}{dx} = \cos x + \sin x, y(\pi) = 1$	4) $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{-2}{3}}, y(-1) = -5$
5) $\frac{dy}{d\theta} = \sin\theta, y(0) = -3$	6) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x, y(0) = 1$
7) $\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{1}{t^3}, y'(1) = 3, y''(1) = 2, y(1) = 1$	8) $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x, y(\frac{\pi}{4}) = -1$

المجموعة الرابعة : تطبيقات

1) إفرض أن هامش التكلفة لصناعة سلعة ما عندما ينتج x ألف وحدة هو :

(درهما لكل سلعة) $\frac{dc}{dx} = 3x^2 - 12x + 15$. أوجد دالة التكلفة c(x) إذا كان c(0)=400

2) تعطي السرعة v=ds/dt أو العجلة a=dv/dt لجسم يتحرك علي خط إحداثي . إوجد موضع الجسم s عند اللحظة t

أ) V=9.8t+5 , s(0)=10

ب) a = cost , s(0)=1 , v(0)=-1

3) يسير جسيم علي خط مستقيم بحيث أن سرعتة في أية لحظة t تعطي بالعلاقة v(t)=2t+1 مترا لكل ثانية . فأوجد المسافة s كدالة بدلالة الزمن t علما بأن s=20m عندما t=2 sec

4) إذا كانت $F(x)$ المشتقة العكسية لـ $cos^2 x$ وإذا كان $F(1) = 0$.فيكون .... $F(8) = \cdots$

5) إذا كان معدل التغير في حجم كمية من الغاز (R) بالنسبة للضغط الواقع عليها (P) يتناسب عكسيا مع مربع هذا الضغط وكان $R=12m^3$ عندما $P=1/2N/m^2$ ، $R=8m^3$ عندما $P=3/4N/m^2$ فأوجد العلاقة بي P,R .

المجموعة الأولى :

1) $\int(-x^{-3}+x-1)dx=$

2) جسم يتحرك على خط احداثي أوجد موضع الجسم s عند اللحظة t حيث

a=32 , s(0)=0 , v(0)=20

3) $\int\frac{2}{3x+1}dx=$

المجموعة الثانية :

1) إذا كانت $y=x\ \ln x$

أ) أوجد $\frac{dy}{dx}$

ب) استخدم ما توصلت اليه في أ لايجاد $\int \ln x\ dx$.

المجموعة الثالثة :

اثبت ما يلي : $\int\frac{2(1-x\ \ln x)}{xe^x}dx=5+e^{-x}\ln x^2$

المجموعة الرابعة :

أوجد كلا مما يأتي

a) $\int(4x^3+5x-3)dx=$

b) $\int\left(3\sec x\tan x+\frac{7}{5}\sqrt[5]{x}\right)dx=$

c) $\int\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}x+tan^2\ x\right)dx=$

d) $\int\left(\sqrt[3]{x}+\sec 3x\tan 3x\ \right)dx=$

e) $\int\frac{sec^2\theta}{3+tan\theta}d\theta$

المجموعة الخامسة :

لديك التكاملين

a) $\int 2xe^{x^2}\,dx$

b) $e^{\sin x+\ln\cos x}\,dx$

أ) أي من التكاملين في a,b على الصورة $\int f'(x)\,e^{f(x)}dx$ فسر اجابتك ؟

ب) إذا كانت اجابتك في الفقرة أ بكلمة لا على أحد التكاملين أو كليهما . وضح كيف يمكن وضع التكامل على الصورة المذكورة في الفقرة أ .

ت) أوجد كلا من التكاملين في a,b

المجموعة السادسة :

إذا كان معدل التغير في مساحة سطح صفيحة نتيجة للتسخين يتعين من العلاقة $\frac{dM}{dt}=0.024t^2+0.03t$ حيث M مساحة السطح بالمتر المربع ، t الزمن بالدقيقة . فأوجد مساحة سطح الصفيحة عند بدء التسخين علما بأن مساحتها بلغت $134.5m^2$ عندما t=10min .

المجموعة السابعة :

1) إذا كانت $y=e^x$ أ) أوجد $\frac{dy}{dx}$ ب) أوجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

2) بين أن $G(t)=t\sin 5t$ هي مشتقة عكسية للدالة $g(t)=5t\cos 5t+\sin 5t$ مستفيدا مما توصلت إليه سابقا أوجد $\int t\cos 5t\,dt$

المجموعة الثامنة:

1) إذا كان $y=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

2) أوجد $\int \csc x\,dx$.

المجموعة التاسعة :

1) أوجد $\int(e^x+e^{-x})^2dx$.

2) أوجد $\int\left(\frac{\cot x\cos x+\tan x}{\cos x}+\frac{2}{x}\right)dx$.

المجموعة العاشرة : أوجد الدالة التي مشتقتها $\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}$ علما بأن الدالة تساوي 4- عندما x=9 .