مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التعليم أولاً

الرياضيات

المستوى الثالث - الفصلان الدراسيان (2,3)

McGraw Hill Education
طبعة تجريبية

العبيكان Obeikan
١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧ م

الرياضيات - المستوى الثالث

أعدَّ النسخة العربية: شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة

محمد بن عبدالله البصيص

عبدالحكيم عبدالله سليمان

Original Title:

Precalculus
Algebra 2

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومتنا الرشيدة بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان التوجه نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز كتب الرياضيات بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف إستراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الوحدة 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 2 القطوع المخروطية

الوحدة 3 المتجهات

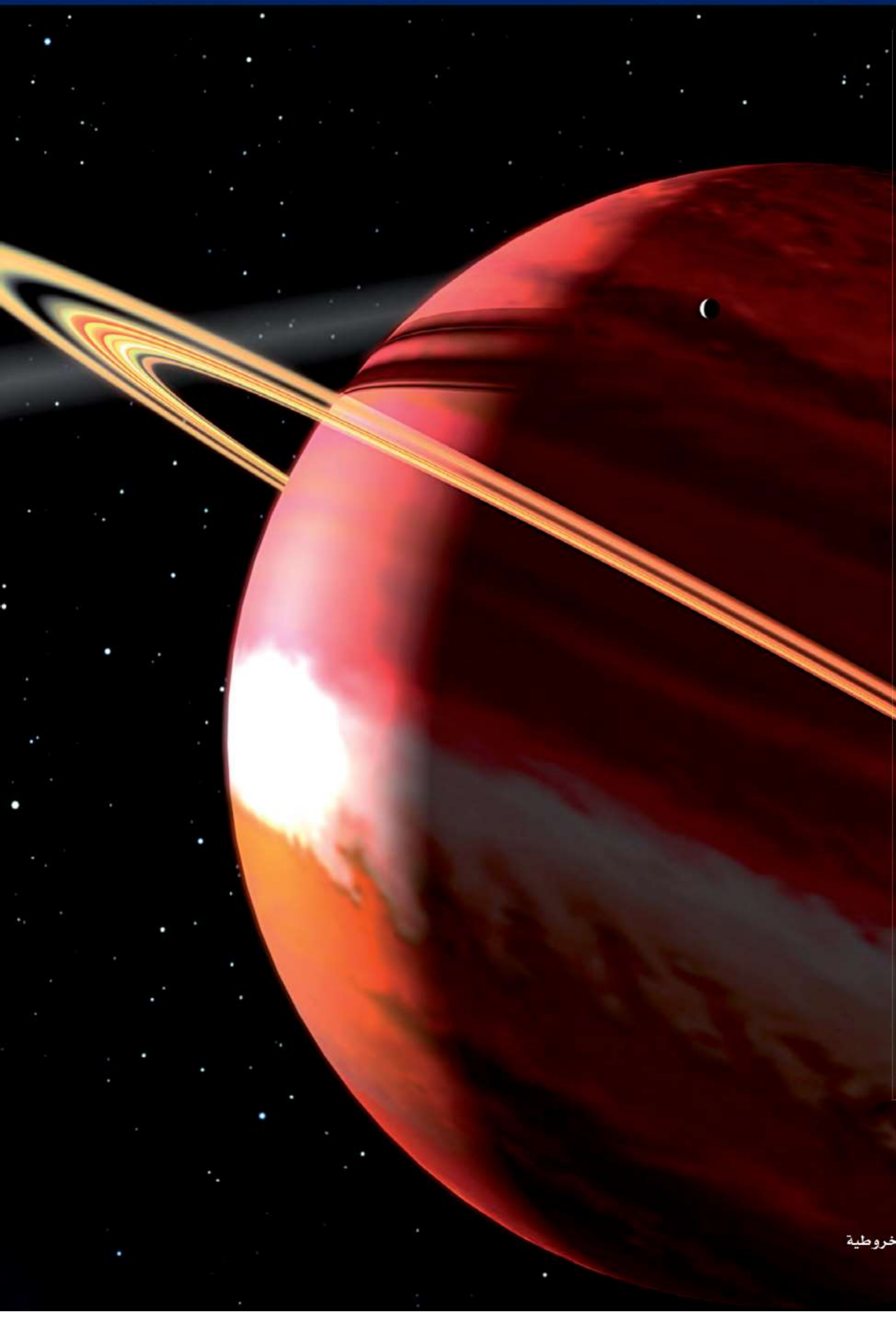
الفهرس

الوحدة 4 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة 5 النهايات والاشتقاق

الوحدة 2

القطوع المخروطية
Conic Sections



فيما سبق:

درستُ تمثيل الدالة التربيعية (والتي تمثل قطعًا مكافئًا)، ودالة المقلوب (والتي تمثل قطعًا زائدًا).

والآن:

- أَحُلُّ معادلات القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة، وأمثِّلها بيانيًا.
- أكتبُ معالادت القطوع المكافئة، والدوائر، والقطوع الناقصة، والقطوع الزائدة.
- أحدد أنواع القطوع المخروطية باستعمال معادلاتها.
- أحلِّ مسائل تتضمن حركة المقذوفات.

لماذا؟

فضاء: القطوع المخروطية شائعة الاستعمال في مجالات الفضاء؛ إذ تستعمل معادلات الدوائر في وصف مدارات حركة السفن الفضائية والأقمار الصناعية حول الأرض. كما أن الكواكب تسير في مسارات بيضاوية الشكل تشبه القطوع الناقصة، أمّا المذنّبات، فتسير في اتجاه أحد جزئي القطع الزائد، ممّا يساعد على التنبؤ بزمن ظهورها لاحقًا.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه حول العلاقات والدوال التربيعية وتمثيلهما البياني.

التهيئة للوحدة 2

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد محور التماثل والمقطع y والرأس لمنحنى كل دالة تربيعية مما يأتي:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 12$ 2) $f(x) = x^2 + 2x + 6$

3) $f(x) = 2x^2 + 4x - 8$ 4) $f(x) = 2x^2 - 12x + 3$

5) $f(x) = 3x^2 - 12x - 4$ 6) $f(x) = 4x^2 + 8x - 1$

7) **أعمال:** يمكن تمثيل تكلفة إنتاج x من الدراجات بالدالة: $C(x) = 0.01x^2 - 0.5x + 550$. أوجد كلًّا من محور التماثل، ومقطع y والرأس لمنحنى هذه الدالة.

أوجد مميز كل من الدوال التربيعية الآتية:

8) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ 9) $f(x) = 2x^2 + 6x - 9$

10) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ 11) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

12) $f(x) = 4x^2 - 3x - 7$ 13) $f(x) = 4x^2 - 2x + 11$

أكمل المربع في كل عبارة تربيعية مما يأتي إن أمكن:

14) $x^2 + 8x$

15) $x^2 - 18x$

مثِّل كل دالة مما يأتي بيانيًّا:

16) $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

17) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

18) **هدية:** أحضر مجموعة من الأصدقاء 50 كوبًا ورقيًّا لاستعمالها في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الأكواب التي سيستعملها كل شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة. اكتب دالة تمثِّل هذا الموقف، ومثِّلها بيانيًّا.

مراجعة المفردات

التحويلات الهندسية للدوال (Functions transformations):
هي التغيرات التي تؤثر في الدالة الرئيسة (الأم).

المماس (tangent line):
يكون المستقيم مماسًّا لمنحنى إذا قطعه ولم يعبره عند نقطة التماس.

متطابقات فيثاغورس (pythagorean identities):

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

إكمال المربع (completing the square):
لإكمال المربع في أي عبارة تربيعية على الصورة $x^2 + bx$، اتبع الخطوات التالية:

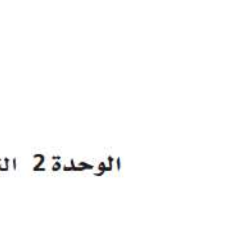
1) أوجد نصف معامل x؛ أي نصف b.

2) ربِّع الناتج في الخطوة (1).

3) اجمع الناتج في الخطوة (2) إلى العبارة $x^2 + bx$.

محور التماثل (axis of symmetry):
مستقيم يتماثل حوله المنحنى أو الشكل.

خط التقارب (asymptote):
هو المستقيم الذي يقترب منه التمثيل البياني للدالة.



2-1

القطوع المكافئة
Parabolas

فيما سبق:
درستُ الدوال التربيعية وتحليلها وتمثيلها بيانيًا.

والآن:
- أحَللُ معادلات قطوع مكافئة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتبُ معادلات قطوع مكافئة.

المفردات

القطع المخروطي
conic section

المحل الهندسي
locus

القطع المكافئ
parabola

البؤرة
focus

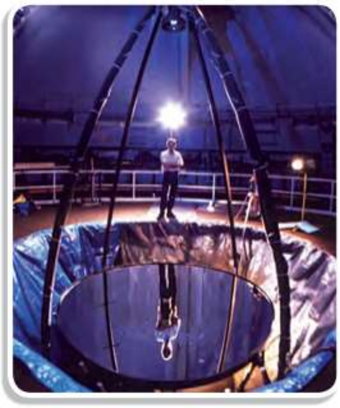
الدليل
directrix

محور التماثل
axis of symmetry

الرأس
vertex

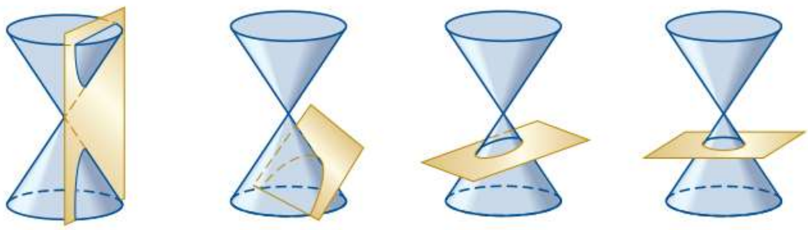
الوتر البؤري
latus rectum

لماذا؟



استعمل العلماء حديثًا تلسكوب سطح الزئبق؛ لمشاهدة صور الفضاء، وهو تلسكوب ذو مرآة سائلة (طبقة من الزئبق) مقعرة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ، مع آلة تصوير مثبتة عند البؤرة.

القطوع المخروطية: **القطوع المخروطية** هي الأشكال الناتجة عن تقاطع مستوى ما مع مخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس، كليهما أو أحدهما. بحيث لا يمر المستوى بالرأس.
والقطوع المخروطية الأربعة الواردة في هذه الوحدة هي: القطع المكافئ والقطع الناقص والدائرة والقطع الزائد.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية هي $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، حيث A, B, C أعداد ليست جميعها أصفارًا. وتوجد صورة أكثر تحديدًا لمعادلة كل قطع مخروطي، وسيتم تقديمها جميعًا في دروس هذه الوحدة.

تحليل القطع المكافئ وتمثيله بيانيًا:
المحل الهندسي هو الشكل الهندسي الذي ينتج عن مجموعة النقاط التي تحقّق خاصية هندسية معينة. **القطع المكافئ** هو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المستوى التي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة تسمى **البؤرة** مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم يسمّى **الدليل**.

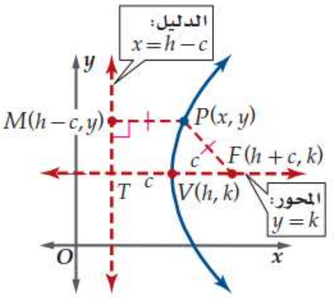
والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم العمودي على الدليل والمار بالبؤرة، ويُسمى هذا المستقيم **محور التماثل**. وتُسمى نقطة تقاطع القطع المكافئ مع محور التماثل **الرأس**. وتُسمى القطعة المستقيمة المارة بالبؤرة والعمودية على محور التماثل **بالوتر البؤري**، ويقع طرفا الوتر البؤري على القطع المكافئ.

إرشادات للدراسة

القطع
كلمة قطع هي مفرد كلمة قطوع، وتعني في اللغة الجزء قال تعالى: (فَأَسْرِ بِأَهْلِكَ بِقِطْعٍ مِّنَ ٱلَّيْلِ ...) هود: 81

الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ:
درست سابقًا الدالة التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حيث $a \neq 0$ والتي يمثّل منحناها قطعًا مكافئًا مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. ويمكن استعمال تعريف القطع المكافئ؛ لإيجاد الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ عندما يكون مفتوحًا أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) أو رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل).

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على القطع المكافئ كما في الشكل المجاور، والذي رأسه $V(h, k)$ وبؤرته $F(h+c, k)$ ، حيث $FV = |c|$ هو البعد بين الرأس والبؤرة. وبناءً على تعريف القطع المكافئ فإن البعد بين أي نقطة على القطع والبؤرة يجب أن يساوي بعد هذه النقطة عن الدليل. لذا إذا كان $FV = |c|$ فإن $VT = |c|$.



نعلم من تعريف القطع المكافئ أنّ $PF = PM$. وبما أنّ M واقعة على الدليل، فإن إحداثيي M هما $(h - c, y)$ ، ويمكنك استعمال صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد معادلة القطع المكافئ.

$$PF = PM$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-y)^2}$$ قانون المسافة بين نقطتين

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2 = [x-(h-c)]^2+0^2$$ ربّع الطرفين

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+(y-k)^2 = x^2-2x(h-c)+(h-c)^2$$ فك الأقواس

$$x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+(y-k)^2 = x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2$$ فك الأقواس

$$(y-k)^2 = 4xc-4hc$$ بسّط

$$(y-k)^2 = 4c(x-h)$$ حلّل

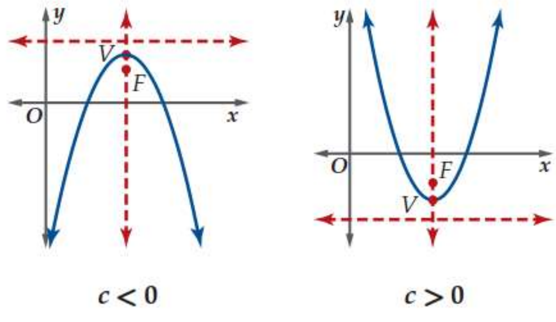
أي أنّ معادلة القطع المكافئ المفتوح أفقيًا (إلى اليمين أو إلى اليسار) هي $(y-k)^2 = 4c(x-h)$. وبالمثل فإن معادلة القطع المكافئ المفتوح رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل) هي: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$.
وهاتان هما المعادلتان القياسيتان للقطوع المكافئة، حيث $c \neq 0$. وتحدّد قيم الثوابت h, k, c خصائص القطوع المكافئة مثل إحداثيات رأس القطع واتجاهه.

قراءة الرياضيات

اتجاه فتحة منحنى القطع
ستلاحظ في هذا الدرس أن منحنيات القطع المكافئ مفتوحة رأسيًا (إلى أعلى أو إلى أسفل)، أو أفقيًا (إلى اليمين أو اليسار).

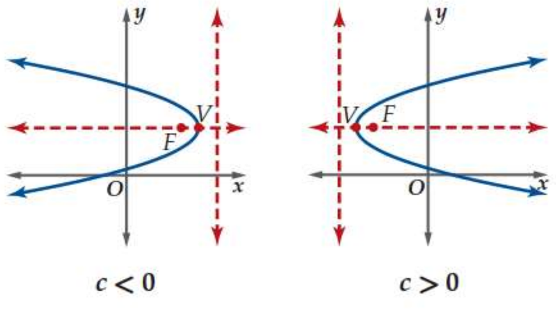
مفهوم أساسي خصائص القطع المكافئ

المعادلة في الصورة القياسية: $(x-h)^2 = 4c(y-k)$



الاتجاه:	المنحنى مفتوح رأسيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h, k+c)$
معادلة محور التماثل:	$x = h$
معادلة الدليل:	$y = k - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

المعادلة في الصورة القياسية: $(y-k)^2 = 4c(x-h)$



الاتجاه:	المنحنى مفتوح أفقيًا
الرأس:	(h, k)
البؤرة:	$(h+c, k)$
معادلة محور التماثل:	$y = k$
معادلة الدليل:	$x = h - c$
طول الوتر البؤري:	$\|4c\|$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ لتحديد خصائصه مثل الرأس والبؤرة والدليل .

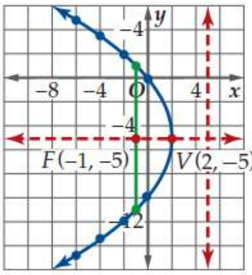
مثال 1 تحديد خصائص القطع المكافئ وتمثيل منحناه بيانيًا

حدّد خصائص القطع المكافئ $(y + 5)^2 = -12(x - 2)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

المعادلة في صورتها القياسية، والحدّ التربيعي هو y، وهذا يعني أن المنحنى مفتوح أفقيًّا. وبما أن $4c = -12$ فإن $c = -3$ ؛ لذا فهو مفتوح إلى اليسار. وبما أن المعادلة على صورة $(y - k)^2 = 4c(x - h)$ ؛ لذا فإن $h = 2, k = -5$. استعمل قيم h, k, c لتحديد خصائص القطع المكافئ.

الرأس:	$(2, -5)$	(h, k)	الدليل:	$x = 5$	$x = h - c$
البؤرة:	$(-1, -5)$	$(h + c, k)$	محور التماثل:	$y = -5$	$y = k$
طول الوتر البؤري:	12	$\|4c\|$			

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



تحقق من فهمك

1A) $8(y + 3) = (x - 4)^2$

1B) $2(x + 6) = (y + 1)^2$

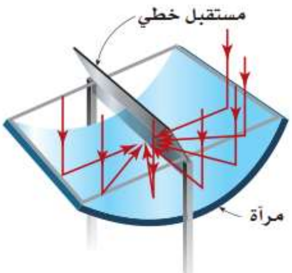
إرشادات للدراسة

اتجاه القطع المكافئ
يكون اتجاه القطع المكافئ الذي محور تماثله مواز لأحد محوري الإحداثيات:
- مفتوحًا إلى أعلى إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى الأسفل إذا كان الحد التربيعي هو x، وكانت $c < 0$.
- مفتوحًا إلى اليمين إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c > 0$.
- مفتوحًا إلى اليسار إذا كان الحد التربيعي هو y، وكانت $c < 0$.

إرشادات للدراسة

رسم الوتر البؤري
لرسم الوتر البؤري في المثال 1، ارسم قطعة مستقيمة طولها 12 وحدة، وتمر بالبورة التي تقع في منتصفها، وتكون عمودية على محور التماثل.

مثال 2 من واقع الحياة خصائص القطع المكافئ



طاقة شمسية: يتكون مجمِّع شمسي من مرآة مقطعها العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 3.04y$، حيث x, y بالأمتار، وتعمل المرآة على تركيز أشعة الشمس على مستقبل خطي يقع عند بؤرة القطع، أين يقع المستقبل الخطّي بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

يقع المستقبل الخطي عند بؤرة القطع المكافئ. وبما أن الحد التربيعي هو x و c موجب، فإن منحنى القطع مفتوح إلى أعلى، وتقع البؤرة عند $(h, k + c)$.

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، كما أنّ قيمة كل من h, k صفر، وبما أن $4c = 3.04$ فإن $c = 0.76$. لذا تقع البؤرة عند $(0, 0 + 0.76)$ أو $(0, 0.76)$.

بما أن موقع بؤرة القطع المكافئ الذي يمثل المقطع العرضي هو $(0, 0.76)$. فإن المستقبل الخطي يقع على مسافة 0.76 متر فوق رأس القطع المكافئ.

تحقق من فهمك

2) فلك: عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أنه يمكن تمثيل القطع المكافئ الظاهر في الصورة باستعمال المعادلة $x^2 = 44.8(y - 6)$، حيث $-5 \leq x \leq 5$. إذا كانت x, y بالأقدام، فأين تقع آلة التصوير بالنسبة إلى رأس القطع المكافئ؟

الربط مع الحياة

توليد الكهرباء تستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة؛ لتوليد الكهرباء من الطاقة الشمسية، إذ تعمل المرايا على تسخين زيت يمر خلال أنابيب تمر عند بؤر هذه القطوع.

لتحديد خصائص القطع المكافئ تحتاج أحيانًا إلى كتابة معادلته بالصورة القياسية، كما أنك قد تعيد ترتيب المعادلة لتبسيطها، وقد تستعمل في بعض الحالات مهارات رياضية معينة مثل إكمال المربع لكتابة المعادلة بالصورة القياسية.

مـثال 3 كتابة معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية

اكتب المعادلة $y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائص القطع المكافئ، ومثِّل منحناه بيانيًّا.

$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x + 6$ المعادلة الأصلية

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x) + 6$ أخرج $-\frac{1}{4}$ عاملًا مشتركًا من حدود x

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36 - 36) + 6$ كمِّل المربع

$y = -\frac{1}{4}(x^2 - 12x + 36) + 9 + 6$ $\quad -\frac{1}{4}(-36) = 9$

$y = -\frac{1}{4}(x - 6)^2 + 15$ حلّل

$-4(y - 15) = (x - 6)^2$ اطرح 15 من الطرفين، ثمَّ اضرب في العدد (-4)

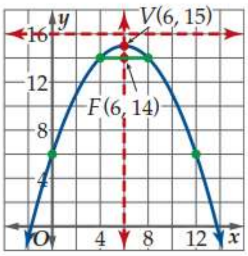
وهذه هي الصورة القياسية للقطع المكافئ، وبما أن الحد التربيعي هو x، و $c = -1$، فإن المنحنى مفتوح إلى أسفل. استعمل الصورة القياسية للقطع المكافئ لتحدّد خصائصه.

الرأس: $(6, 15)$ $\quad (h, k)$ — الدليل: $y = 16$ $\quad y = k - c$

البؤرة: $(6, 14)$ $\quad (h, k + c)$ — محور التماثل: $x = 6$ $\quad x = h$

طول الوتر البؤري: 4 $\quad |4c|$

عيِّن الرأس والبؤرة ومحور التماثل والدليل، والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



✓ تحقق من فهمك

3A) $x^2 - 4y + 3 = 7$

3B) $3y^2 + 6y + 15 =$

$12x$

معادلات القطوع المكافئة: يمكن استعمال خصائص معينة لتحديد معادلة القطع المكافئ.

مـثال 4 كتابة معادلة القطع المكافئ بمعلومية بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

a) البؤرة $(3, -4)$ والرأس $(1, -4)$.

بما أن البؤرة والرأس مشتركان في الإحداثي y، فإن المنحنى مفتوح أفقيًّا؛ لذا فالبؤرة هي $(h + c, k)$، وتكون قيمة c هي $2 = 1 - 3$. وبما أن c موجبة فإن المنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمكنك تحديد اتجاه فتحة القطع، وإيجاد قيمة c من التمثيل البياني مباشرة.

اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال قيم h, c, k .

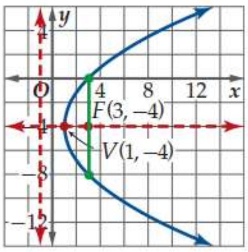
$(y - k)^2 = 4c(x - h)$ الصورة القياسية

$[y - (-4)]^2 = 4(2)(x - 1)$ $\quad c = 2, h = 1, k = -4$

$(y + 4)^2 = 8(x - 1)$ بسّط

أي أن الصورة القياسية للمعادلة هي $(y + 4)^2 = 8(x - 1)$.

مثِّل بيانيًّا الرأس والبؤرة ومحور التماثل والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس ويمتد مارًّا بنهايتي الوتر البؤري. يجب أن يكون المنحنى متماثلًا حول محور التماثل.



إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي x، فإن منحنى القطع المكافئ يكون مفتوحًا إلى أعلى أو إلى أسفل. أما إذا اشترك الرأس والبؤرة في الإحداثي y فإن المنحنى يكون مفتوحًا إلى اليمين أو إلى اليسار.

إرشادات للدراسة

الدليل
يقع الدليل في الاتجاه المعاكس لاتجاه منحنى القطع المكافئ.

b) الرأس $(-2, 4)$ والدليل $y = 1$

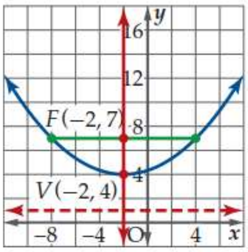
بما أن الدليل مستقيم أفقيًا، فإن المنحنى مفتوح رأسيًا. وبما أن الدليل يقع تحت الرأس، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

استعمل معادلة الدليل لتجد c .

$y = k - c$	معادلة الدليل
$1 = 4 - c$	$y = 1, k = 4$
$-3 = -c$	اطرح 4 من الطرفين.
$3 = c$	اقسم كلا الطرفين على -1 .

عوّض قيم h, k, c في الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ.

$(x - h)^2 = 4c(y - k)$	الصورة القياسية
$[x - (-2)]^2 = 4(3)(y - 4)$	$h = -2, k = 4, c = 3$
$(x + 2)^2 = 12(y - 4)$	بسّط

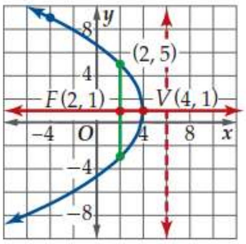


طول الوتر البؤري يساوي $12 = |4 \times 3| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

c) البؤرة $(2, 1)$ والمنحنى مفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(2, 5)$.

بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، لذا فالبؤرة هي $(h + c, k) = (2, 1)$ ، والرأس (h, k) هو $(2 - c, 1)$؛ لذا استعمل الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ والنقطة $(2, 5)$ لتجد c.

$(y - k)^2 = 4c(x - h)$	الصورة القياسية
$(5 - 1)^2 = 4c[2 - (2 - c)]$	$h = 2 - c, k = 1, x = 2, y = 5$
$16 = 4c(c)$	بسّط
$4 = c^2$	بسّط
$\pm 2 = c$	خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين



بما أن المنحنى مفتوح إلى اليسار، فإن قيمة c يجب أن تكون سالبة؛ لذا فإن $c = -2$ ، والرأس هو $(4, 1)$.

$$(y - 1)^2 = -8(x - 4)$$

طول الوتر البؤري يساوي $8 = |4 \times (-2)| = |4c|$ ، والتمثيل البياني كما في الشكل المجاور.

تحقق من فهمك

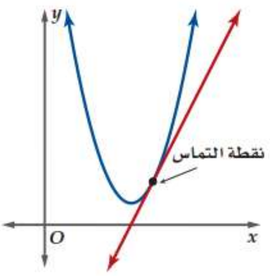
4A) البؤرة $(-6, 2)$ والرأس $(-6, -1)$

4B) الرأس $(-2, 9)$ والدليل $x = 12$

4C) البؤرة $(-3, -4)$ ، والمنحنى مفتوح إلى أسفل، ويمر بالنقطة $(5, -10)$.

4D) البؤرة $(-1, 5)$ ، والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$.

يمكن رسم مماسٍ لمنحنى القطع المكافئ عند أي نقطة عليه، وستدرس لاحقًا كيفية تحديد معادلة مماس المنحنى باستعمال التفاضل. ويمكن إيجاد معادلة المماس للقطع المكافئ دون استعمال التفاضل.



إرشادات للدراسة

معادلة مماس منحنى القطع المكافئ عند الرأس

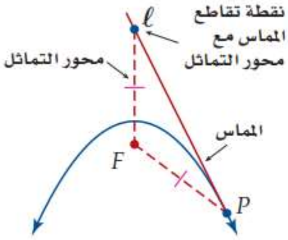
— إذا كان المنحنى مفتوحًا أفقيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $x = h$

— إذا كان المنحنى مفتوحًا رأسيًا، فإن معادلة المماس عند رأس القطع هي: $y = k$

مفهوم أساسي — مماس منحنى القطع المكافئ

مماس القطع المكافئ عند النقطة P المغايرة لرأسه هو مستقيم يحوي أحد أضلاع مثلث متطابق الضلعين بحيث تكون:

- **القطعة المستقيمة الواصلة بين P والبؤرة هي أحد الضلعين المتطابقين.**
- **القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرة ونقطة تقاطع المماس مع محور التماثل هي الضلع الثاني.**



مثال 5 — كتابة معادلة مماس منحنى القطع المكافئ

اكتب معادلة مماس منحنى القطع المكافئ $x = y^2 + 3$ عند النقطة $P(7, 2)$.

الخطوة الأولى: أوجد إحداثيات الرأس ثم البؤرة.

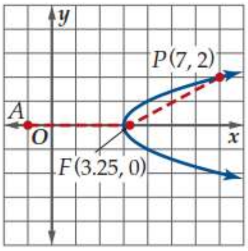
المنحنى مفتوح أفقيًا.

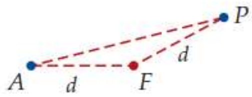
$$x = y^2 + 3 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$1(x-3) = (y-0)^2 \quad \text{الصورة القياسية}$$

بما أن $4c = 1$ فإن $c = 0.25$. ويكون الرأس $(3, 0)$ ، والبؤرة $(3.25, 0)$.

الخطوة الثانية: أوجد d (وهي المسافة بين البؤرة F ، ونقطة التماس P) كما يظهر في الشكلين الآتيين .





حيث d تمثل طول أحد أضلاع المثلث المتطابق الضلعين.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(7 - 3.25)^2 + (2 - 0)^2} \quad (x_2, y_2) = (7, 2) \text{ و } (x_1, y_1) = (3.25, 0)$$

$$= 4.25 \quad \text{بسّط}$$

الخطوة الثالثة: أوجد A (وهي نقطة نهاية الضلع الآخر للمثلث المتطابق الضلعين، وتقع على محور التماثل) بما أن $d = 4.25$ ، وإحداثيات البؤرة هي $(3.25, 0)$ ، والنقطة A تقع على محور التماثل، فإن الإحداثي x لها يقل عن الإحداثي x للبؤرة بمقدار 4.25؛ والإحداثي y لها هو نفس الإحداثي y للبؤرة، لذا $A = (3.25 - 4.25, 0) = (-1, 0)$.

الخطوة الرابعة: أوجد معادلة المماس.

تقع النقطتان A, P على مماس منحنى القطع المكافئ.

$$m = \frac{2-0}{7-(-1)} = \frac{1}{4} \quad \text{صيغة الميل}$$

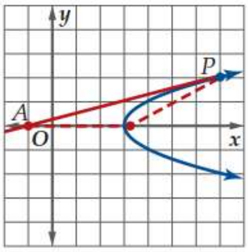
$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{معادلة مستقيم بمعلومية الميل ونقطة}$$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 7) \quad m = \frac{1}{4}, y_1 = 2, x_1 = 7$$

$$y - 2 = \frac{x}{4} - \frac{7}{4} \quad \text{خاصية التوزيع}$$

$$y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{اجمع 2 إلى الطرفين}$$

إذن معادلة المماس لمنحنى $x = y^2 + 3$ عند النقطة $(7, 2)$ هي $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$. انظر الشكل 2.1.1



الشكل 2.1.1

تحقق من فهمك

(5A $y = 4x^2 + 4; (-1, 8)$

(5B $x = 5 - \frac{y^2}{4}; (1, -4)$

تدرب وحل المسائل

حدّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $(x-3)^2 = 12(y-7)$　　**2)** $(x+1)^2 = -12(y-6)$

3) $(y-4)^2 = 20(x+2)$　　**4)** $-40(x+4) = (y-9)^2$

5) $(y+5)^2 = 24(x-1)$　　**6)** $-4(y+2) = (x+8)^2$

7) لوح تزلُّج: صمَّم بدر لوح تزلُّج مقطعه العرضي على شكل قطع مكافئ معادلته $x^2 = 8(y-2)$ ، حيث x, y بالأقدام. احسب المسافة بين بؤرة القطع المكافئ ودليله؟ (مثال 2)

8) قوارب: يُبحر قارب في الماء تاركًا وراءه أثرًا على شكل قطع مكافئ يلتقي رأسه مع نهاية القارب. ويمسك متزحلق يقف على لوح خشبي عند بؤرة القطع بحبل مثبت في القارب. ويمكن تمثيل القطع المكافئ الناتج عن أثر القارب بالمعادلة $y^2 - 180x + 10y + 565 = 0$ ، حيث x, y بالأقدام. (مثال 3)

a) اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية.

b) ما طول الحبل الذي يمسك به المتزحلق؟

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 3)

9) $x^2 - 17 = 8y + 39$　　**10)** $y^2 + 33 = -8x - 23$

11) $3x^2 + 72 = -72y$　　**12)** $60x - 80 = 3y^2 + 100$

13) $-33 = x^2 - 12y - 6x$　　**14)** $-72 = 2y^2 - 16y - 20x$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 4)

15) البؤرة $(-9, -7)$ والرأس $(-9, -4)$

16) البؤرة $(3, 3)$ والمنحنى مفتوح إلى أعلى، ويمر بالنقطة $(23, 18)$.

17) البؤرة $(-1, 2)$ والرأس $(-1, -4)$

18) البؤرة $(11, 4)$ والمنحنى مفتوح إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(20, 16)$.

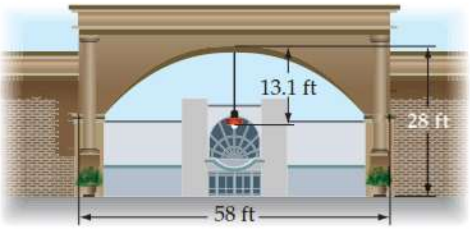
19) البؤرة $(-3, -2)$ ، والرأس $(1, -2)$

20) المنحنى مفتوح رأسيًّا ويمر بالنقاط $(-12, -14), (0, -2), (6, -5)$.

21) البؤرة $(-3, 4)$ ، والرأس $(-3, 2)$

22) الرأس $(-3, 2)$، محور التماثل $y = 2$، طول الوتر البؤري 8 وحدات.

23) عمارة: أُنشئت قنطرة على شكل قطع مكافئ فوق بوابة سور، بحيث ارتكزت فوق عمودين. وثبّت مصباح عند بؤرة القطع. (مثال 4)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ. افترض أن مستوى الأرض هو المحور x ، والعمود الأيسر ينطبق على المحور y .

b) مثِّل منحنى القطع المكافئ بيانيًّا.

اكتب معادلة مماس منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي عند النقطة المعطاة: (مثال 5)

24) $(x+7)^2 = -\frac{1}{2}(y-3)\ ;(-5, -5)$

25) $y^2 = \frac{1}{5}(x-4)\ ;(24, 2)$

26) $(x+6)^2 = 3(y-2)\ ;(0, 14)$

27) $-4x = (y+5)^2 ;(0, -5)$

حدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي:

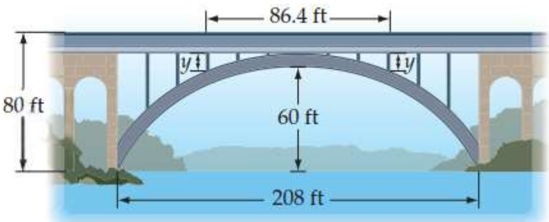
28) الدليل $y = 4$ وَ $c = -2$

29) المعادلة هي $y^2 = -8(x-6)$

30) الرأس $(-5, 1)$ والبؤرة $(-5, 3)$

31) البؤرة $(7, 10)$ والدليل $x = 1$

32) جسور: يأخذ القوس أسفل الجسر شكل قطع مكافئ. وتبلغ المسافة بين البرجين الواقعين على طرفي القوس 208 ft ، وارتفاع كل منهما 80 ft. وتبلغ المسافة من قمة القوس إلى سطح الماء 60 ft.

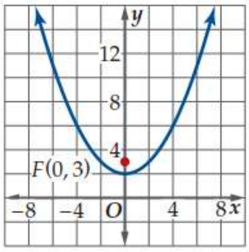


a) اكتب معادلة تمثّل شكل القوس مفترضًا أن مسار الطريق على الجسر يمثِّل المحور x ، والمحور المار بقمة القوس والعمودي على المحور x هو المحور y.

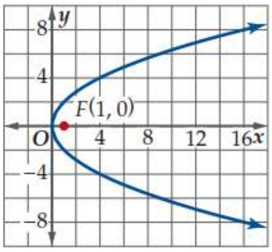
b) توجد دعامتان رأسيتان للقوس تبعدان المسافة نفسها عن رأس القوس كما هو موضّح في الشكل. أوجد طول كل منهما إذا كانت المسافة بينهما 86.4 ft .

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته F، في كلٍّ مما يأتي:

33)



34)



35) **تمثيلات متعددة:** ستكشف في هذه المسألة تغير شكل القطع المكافئ تبعًا لتغير موقع البؤرة.

a) **هندسيًا:** أوجد البعد بين الرأس والبؤرة لكل قطع مكافئ مما يأتي:

i) $y^2 = 4(x-2)$ ii) $y^2 = 8(x-2)$ iii) $y^2 = 16(x-2)$

b) **بيانيًا:** مثّل منحنى كل قطع مكافئ في الفرع a بيانيًا باستعمال لون مختلف لكل منها. ثم عيّن بؤرة كل منها.

c) **لفظيًا:** صف العلاقة بين شكل القطع المكافئ والمسافة بين الرأس والبؤرة.

d) **تحليليًا:** اكتب معادلة قطع مكافئ يشترك في الرأس مع القطع المكافئ الذي معادلته $(x+1)^2 = 20(y+7)$ ولكنّه أقل اتساعًا.

e) **تحليليًا** كوّن تخمينًا حول منحنى كل قطع مكافئ مما يأتي:

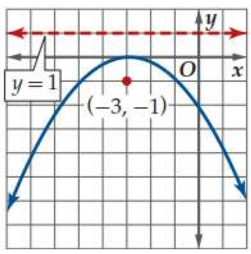
$x^2 = -2(y+1)$, $x^2 = -12(y+1)$, $x^2 = -5(y+1)$

ثم تحقّق من تخمينك بتمثيل منحنى كل منها بيانيًا.

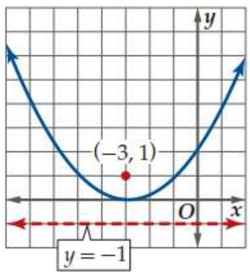
مسائل مهارات التفكير العليا

36) **اكتشف الخطأ:** مثّلت صفيّة وميمونة المنحنى $x^2 + 6x - 4y + 9 = 0$ بيانيًا كما هو موضح أدناه. فأي التمثيلين صحيح؟ فسّر تبريرك.

صفية



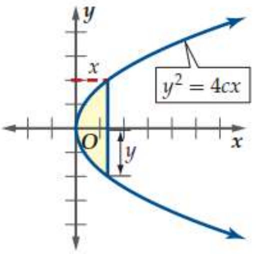
ميمونة



37) **تبرير:** أي النقاط على منحنى القطع المكافئ هي الأقرب إلى البؤرة. فسّر تبريرك.

38) **تبرير:** حدّد دون استعمال الرسم أي أرباع المستوى الإحداثي لا توجد فيه نقاط يمر بها منحنى القطع $(y-5)^2 = -8(x+2)$. فسِّر تبريرك.

39) **تحدٍّ:** تُعطى مساحة المقطع المظلل في الشكل المجاور بالمعادلة $A = \frac{4}{3}xy$. أوجد معادلة القطع المكافئ إذا كانت مساحة المقطع 2.4 وحدة مربعة، وعرضه $(2y)$ يساوي 3 وحدات.



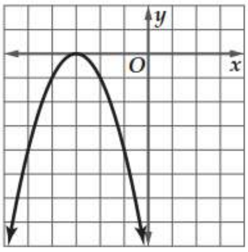
40) **اكتب:** اشرح كيف تحدّد اتجاه فتحة منحنى القطع المكافئ إذا أُعطيت إحداثيات بؤرته ورأسه.

تدريب على اختبار

41) إذا كان x عددًا موجبًا، فإن $\dfrac{x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ تساوي

A $x^{-\frac{1}{4}}$ B $\sqrt{x^3}$ C $x^{\frac{3}{4}}$ D $\sqrt{x^5}$

42) ما الدالة الموضّح منحناها جانبًا؟



A $y = x$

B $y = -(x+3)^2$

C $y = \sqrt{x}$

D $y = x^2$

القطوع الناقصة والدوائر
Ellipses and Circles

فيما سبق:

درست تحليل القطوع المكافئة وتمثيلها بيانيًا.

والآن:

- أُحلّل معادلات القطوع الناقصة والدوائر، وأُمثّلهما بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الناقصة والدوائر.

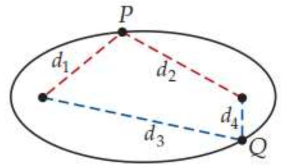
المفردات:

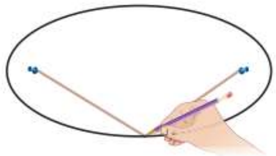
القطع الناقص
ellipse
البؤرتان
foci
المحور الأكبر
major axis
المركز
center
المحور الأصغر
minor axis
الرأسان
vertices
الرأسان المرافقان
co-vertices
الاختلاف المركزي
eccentricity

لماذا؟

يدور كوكب عطارد كبقية كواكب المجموعة الشمسية في مدار ليس دائريًّا تمامًا حول الشمس، ويبعد عنها مسافة 43.4 مليون ميل في أبعد نقطة، و 28.5 مليون ميل في أقرب نقطة، ويأخذ مداره شكلًا إهليليجيًّا يسمى قطعًا ناقصًا.

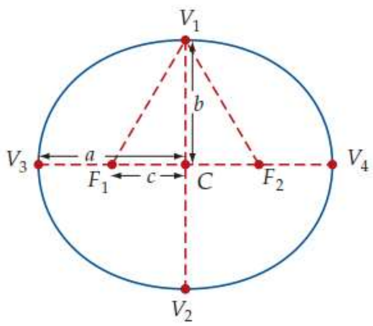
تحليل القطع الناقص والدائرة وتمثيلها بيانيًا: **القطع الناقص** هو المحل الهندسي لمجموعة النقاط في المستوى التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوي مقدارًا ثابتًا. وتسمى هاتان النقطتان **البؤرتين**، وعمليًّا يمكنك رسم منحنى القطع الناقص بتثبيت طرفي خيط عند البورتين، ثم تحريك قلم بمحاذاة الخيط بعد شده كما في الشكل أدناه. مجموع بُعدي أية نقطة على منحنى القطع الناقص عن البؤرتين يساوي مقدارًا ثابتًا، أي أن $d_1 + d_2 = d_3 + d_4$، وهذا مقدار ثابت .





تُسمّى القطعة المستقيمة التي تحوي البؤرتين، والتي نهايتاها على منحنى القطع الناقص **المحور الأكبر** وهو محور تماثل للقطع، وتسمى نقطة منتصف المحور الأكبر **المركز**. أمّا القطعة المستقيمة التي تمر بالمركز، ونهايتاها على المنحنى، والمتعامدة مع المحور الأكبر، فتسمى **المحور الأصغر**. وتُسمى نهايتا المحور الأكبر **الرأسين**، بينما تسمىّ نهايتا المحور الأصغر **الرأسين المرافقين**.

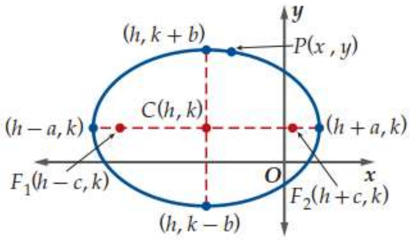
مركز القطع الناقص هو نقطة المنتصف لكل من المحور الأكبر والمحور الأصغر. لذا فالقطعتان من المركز إلى كل رأس متساويتا الطول، والقطعتان من المركز إلى الرأسين المرافقين متساويتا الطول أيضًا، وليكن البعد بين كل رأس والمركز يساوي a وحدة، والبعد بين المركز وكل رأس مرافق يساوي b وحدة، والبعد بين المركز وكل بؤرة يساوي c وحدة. وفيما يلي توضيحٌ للعلاقة بين a, b, c



بما أن $\triangle F_1V_1C \cong \triangle F_2V_1C$ بحسب مسلمة التطابق SAS $(\overline{F_1C} \cong \overline{F_2C}, \angle V_1CF_1 \cong \angle V_1CF_2, \overline{V_1C} \cong \overline{V_1C})$ فإن $\overline{V_1F_1} \cong \overline{V_1F_2}$. ويمكننا استعمال تعريف القطع الناقص؛ لإيجاد طولي V_1F_1, V_1F_2 بدلالة الأطوال a, b, c .

$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3F_1 + V_3F_2$	تعريف القطع الناقص
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_4F_2 + V_3F_2$	$V_3F_1 = V_4F_2$
$V_1F_1 + V_1F_2 = V_3V_4$	$V_4F_2 + V_3F_2 = V_3V_4$
$V_1F_1 + V_1F_2 = 2a$	$V_3V_4 = 2a$
$V_1F_1 + V_1F_1 = 2a$	$V_1F_1 = V_1F_2$
$2(V_1F_1) = 2a$	بسّط
$V_1F_1 = a$	اقسم

بما أنّ $V_1F_1 = a$ ، وَ $\triangle F_1V_1C$ قائم الزاوية، فإن $c^2 = a^2 - b^2$ بحسب نظرية فيثاغورس.



الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص:

افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الناقص الذي مركزه $C(h, k)$ ومحوره الأكبر أفقي، وإحداثيات بؤرتيه ورؤوسه موضّحة في الشكل المجاور. وباستعمال تعريف القطع الناقص، فإن مجموع بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين ثابت، لذا فإن $PF_1 + PF_2 = 2a$.

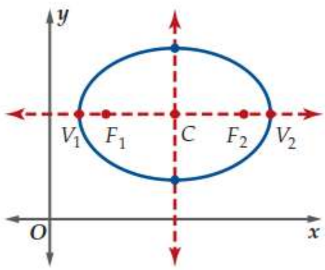
تعريف القطع الناقص	$PF_1 + PF_2 = 2a$
صيغة المسافة	$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$
خاصية التوزيع ثم التجميع	$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a$
اطرح	$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}$
ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين	$(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}+(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$
بسّط	$4a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=4a^2+4c(x-h)$
اقسم كلا الطرفين على 4	$a\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2}=a^2+c(x-h)$
ربّع الطرفين	$a^2[(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2]=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$
خاصية التوزيع	$a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2=a^4+2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$
بسّط	$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$
$a^2 - c^2 = b^2$	$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$
اقسم الطرفين على a^2b^2	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه (h, k)، حيث $a > b$، هي $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$، ويكون المحور الأكبر عندها أفقيًا، وفي الصورة القياسية $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ يكون المحور الأكبر رأسيًا.

مفهوم أساسي خصائص القطع الناقص

المعادلة في الصورة القياسية:

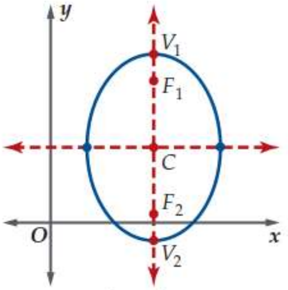
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر أفقي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h \pm c, k)$
الرأسان: $(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان: $(h, k \pm b)$
المحور الأكبر: $y = k$ وطوله $2a =$
المحور الأصغر: $x = h$ وطوله $2b =$
العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
طول البعد البؤري: 2C

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$



الاتجاه: المحور الأكبر رأسي
المركز: (h, k)
البؤرتان: $(h, k \pm c)$
الرأسان: $(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان: $(h \pm b, k)$
المحور الأكبر: $x = h$ وطوله $2a =$
المحور الأصغر: $y = k$ وطوله $2b =$
العلاقة بين a, b, c: $c^2 = a^2 - b^2$ أو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
طول البعد البؤري: 2C

إرشادات للدراسة

البعد البؤري
المسافة بين البؤرتين تسمى البعد البؤري.

إرشادات للدراسة

إتجاه القطع الناقص
إذا كان $(x-h)^2$ مقسومًا على a^2 في الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، أما إذا كان $(y-k)^2$ مقسومًا على a^2 فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا، حيث $a^2 > b^2$ دائمًا.

مثال 1 تحديد خصائص القطع الناقص وتمثيل منحناه بيانيًا

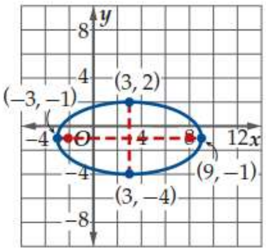
حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًا:

a) $\dfrac{(x-3)^2}{36} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث
$h=3, k=-1, a=\sqrt{36}=6, b=\sqrt{9}=3, c=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم؛ لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	أفقي	$(x-h)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -1)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3 \pm 3\sqrt{3}, -1)$	$(h \pm c, k)$
الرأسان:	$(9, -1)$ و $(-3, -1)$	$(h \pm a, k)$
الرأسان المرافقان:	$(3, 2)$ و $(3, -4)$	$(h, k \pm b)$
المحور الأكبر:	$y=-1$، وطوله 12	$y=k$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$x=3$، وطوله 6	$x=h$، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

b) $4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$

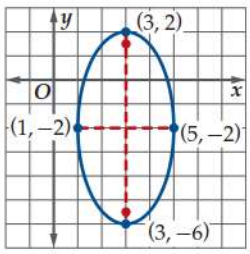
اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولًا.

$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 24 = 0$	المعادلة الأصلية
$(4x^2 - 24x) + (y^2 + 4y) = -24$	جمّع الحدود المتشابهة
$4(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = -24$	حلّل
$4(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = -24 + 4(9) + 4$	كمّل المربعين
$4(x-3)^2 + (y+2)^2 = 16$	حلّل وبسّط
$\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$	اقسم الطرفين على 16

المعادلة الآن مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:
$h=3, k=-2, a=\sqrt{16}=4, b=\sqrt{4}=2, c=\sqrt{16-4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الناقص.

الاتجاه:	رأسي	$(y-k)^2$ مقسومًا على a^2
المركز:	$(3, -2)$	(h, k)
البؤرتان:	$(3, -2 \pm 2\sqrt{3})$	$(h, k \pm c)$
الرأسان:	$(3, 2)$ و $(3, -6)$	$(h, k \pm a)$
الرأسان المرافقان:	$(1, -2)$ و $(5, -2)$	$(h \pm b, k)$
المحور الأكبر:	$x=3$، وطوله 8	$x=h$، طول المحور الأكبر $2a$
المحور الأصغر:	$y=-2$، وطوله 4	$y=k$، طول المحور الأصغر $2b$



عيّن المركز والرؤوس والبؤرتين والمحورين، واستعن ببعض النقاط الأخرى التي تحقق معادلة القطع الناقص، ثم ارسم منحنى يمر بالرؤوس ويكون متماثلًا حول المحورين الأكبر والأصغر.

✓ تحقق من فهمك

1A) $\dfrac{(x-6)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$

1B) $x^2 + 4y^2 + 4x - 40y + 103 = 0$

لكتابة معادلة القطع الناقص على الصورة القياسية، إذا علمت بعض خصائصه، فإنك تحتاج إلى استعمال بعض الصيغ الرياضية مثل صيغة نقطة المنتصف.

مثال 2 كتابة معادلة القطع الناقص إذا عُلمت بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

a) الرأسان $(-6, -8)$, $(-6, 2)$ ، والرأسان المرافقان $(-9, -3)$, $(-3, -3)$.

استعمل المحور الأكبر والمحور الأصغر لتحديد a, b .

نصف طول المحور الأكبر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-6+6)^2 + (2+8)^2} = 5$$

نصف طول المحور الأصغر

$$\frac{1}{2} = \sqrt{(-3+9)^2 + (-3+3)^2} = 3$$

مركز القطع الناقص هو منتصف المحور الأكبر .

$$(h, k) = \left(\frac{-6 + (-6)}{2}, \frac{2 + (-8)}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (-6, -3)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين x لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر رأسي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(y + 3)^2}{25} + \frac{(x + 6)^2}{9} = 1$. والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 2.2.1 .

b) الرأسان $(-4, 4)$, $(6, 4)$ ، والبؤرتان $(4, 4)$, $(-2, 4)$.

طول المحور الأكبر $2a$ ، وهي المسافة بين الرأسين.

$$2a = \sqrt{(-4 - 6)^2 + (4 - 4)^2}$$ صيغة المسافة

$$a = 5$$ بسّط

المسافة بين البؤرتين هي $2c$:

$$2c = \sqrt{(-2 - 4)^2 + (4 - 4)^2}$$ صيغة المسافة

$$c = 3$$ بسّط

أوجد قيمة b .

$$c^2 = a^2 - b^2$$ العلاقة بين a, b, c

$$3^2 = 5^2 - b^2$$ $a = 5, c = 3$

$$b = 4$$ بسّط

وبما أن الرأسين على بعدين متساويين من المركز، فإن إحداثيي المركز هما:

$$(h, k) = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{4 + 4}{2}\right)$$ صيغة نقطة المنتصف

$$= (1, 4)$$ بسّط

وبما أن الإحداثيين y لنهايتي المحور الأكبر متساويان، فإن المحور الأكبر أفقي، ومعادلة القطع الناقص هي:

$\frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$ والتمثيل البياني لمنحناه كما في الشكل 2.2.2 .

تحقق من فهمك

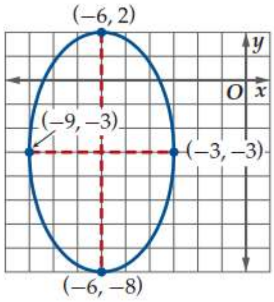
2A) البؤرتان $(-7, 3)$, $(19, 3)$ ، وطول المحور الأكبر 30 وحدة.

2B) الرأسان $(-2, 8)$, $(-2, -4)$ ، وطول المحور الأصغر 10 وحدة.

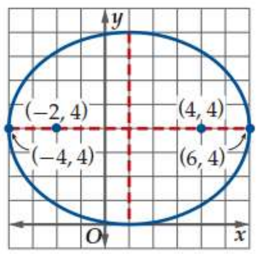
إرشادات للدراسة

الاتجاه

إذا كان لرأسي القطع الناقص الإحداثي y نفسه، فإن المحور الأكبر يكون أفقيًا، وإذا كان لهما الإحداثي x نفسه، فإن المحور الأكبر يكون رأسيًا.



الشكل 2.2.1



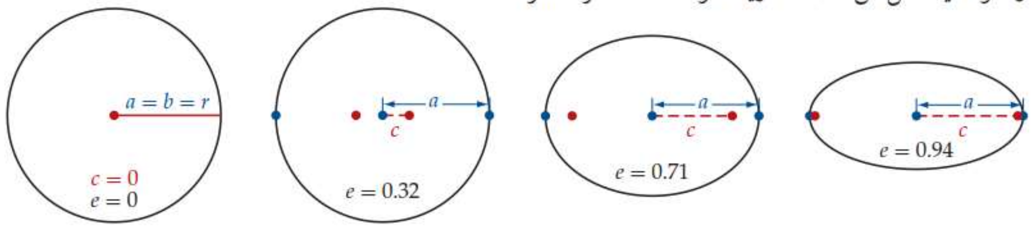
الشكل 2.2.2

الاختلاف المركزي للقطع الناقص هو نسبة c إلى a . و تقع هذه القيمة دائمًا بين 0 و 1 ، وتحدّد مدى "دائرية" أو "اتساع" القطع الناقص.

مفهوم أساسي الاختلاف المركزي

لأي قطع ناقص $\frac{(y - k)^2}{b^2} + \frac{(x - h)^2}{a^2} = 1$ **أو** $\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ ، حيث $c^2 = a^2 - b^2$ ، فإن **الاختلاف المركزي يُعطى بالصيغة** $e = \frac{c}{a}$.

تمثّل القيمة c المسافة بين إحدى البؤرتين ومركز القطع الناقص. وعندما تقترب البؤرتان كل منهما من الأخرى، فإن كلًّا من قيمتي e , c تقترب من صفر. وعندما تصل قيمة الاختلاف المركزي إلى صفر، يصبح القطع الناقص دائرة، وتكون قيمة كل من a , b مساويةً لطول نصف قطر الدائرة.



مثال 3 تحديد الاختلاف المركزي للقطع الناقص

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص $\frac{(x-6)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$.

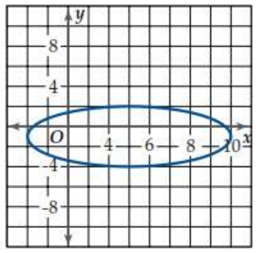
أولًا: نحدد قيمة c .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$c^2 = 100 - 9$	$a^2 = 100, b^2 = 9$
$c = \sqrt{91}$	بسّط

نستعمل قيمتي a , c لنجد الاختلاف المركزي.

$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$e = \frac{\sqrt{91}}{10} \approx 0.95$	$a = 10, c = \sqrt{91}$

الاختلاف المركزي للقطع الناقص يساوي 0.95 تقريبًا، لذا سيظهر منحنى القطع الناقص متسعًا كما في الشكل 2.2.3.



الشكل 2.2.3

تحقق من فهمك

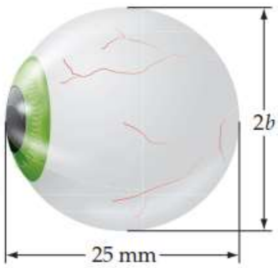
حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

3A) $\frac{x^2}{18} + \frac{(y+8)^2}{48} = 1$

3B) $\frac{(x-4)^2}{19} + \frac{(y+7)^2}{17} = 1$

مثال 4 من واقع الحياة استعمال الاختلاف المركزي

بصريات: يمكن تمثيل شكل عين بقطع ناقص ثلاثي الأبعاد. حيث إن الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي المنصّف للعين مارًّا بالبؤبؤ يساوي 0.28. فإذا كان عمق العين يساوي 25 mm تقريبًا، فما الارتفاع التقريبي لها؟



استعمل الاختلاف المركزي لتحديد قيمة c .

$e = \frac{c}{a}$	تعريف الاختلاف المركزي
$0.28 = \frac{c}{12.5}$	$e = 0.28, a = 12.5$
$c = 3.5$	اضرب

استعمل قيم a و c لتحديد قيمة b .

$c^2 = a^2 - b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3.5^2 = 12.5^2 - b^2$	$c = 3.5, a = 12.5$
$b = 12$	بسّط

بما أن قيمة b هي 12 فإن ارتفاع العين $2b$ ، ويساوي 24 mm تقريبًا .

تحقق من فهمك

4) الاختلاف المركزي لعين مصابة بقصر النظر هو 0.39 . فإذا كان عمق العين 25 mm ، فما ارتفاعها؟

مهنة من الحياة

فنيو العيون

فنيو العيون حاصلون على دبلوم متخصص، ويعملون مساعدين لأطباء العيون في التشخيص وقياس النظر، كما يساعدون في فحوصات أمراض العيون.

معادلة الدائرة: يمكن التوصل إلى معادلة الدائرة باستعمال الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad a=b \text{ عندما } e=0$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \quad \text{اضرب كلا الطرفين في } a^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad a \text{ نصف قطر الدائرة}$$

مفهوم أساسي — الصورة القياسية لمعادلة الدائرة

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

يمكنك استعمال الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لكتابة معادلة دائرة إذا علمت المركز ونصف القطر.

مثال 5 — كتابة معادلة دائرة مركزها وقطرها معلومان

اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(-1, 2)$ وقطرها 8 .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=4^2 \quad (h, k)=(-1, 2),\ r=\frac{8}{2}=4$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16 \quad \text{بسّط}$$

تحقق من فهمك

5A) المركز $(0, 0)$ ، ونصف القطر 3

5B) المركز $(5, 0)$ ، والقطر 10

مثال 6 — كتابة معادلة دائرة طرفا قطر فيها معلومان

اكتب معادلة الدائرة إذا كان طرفا قطر فيها $(-1, -8)$, $(7, 6)$.

الخطوة 1: أوجد المركز.

$$(h, k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \quad \text{صيغة نقطة المنتصف}$$

$$=\left(\frac{7+(-1)}{2}, \frac{6+(-8)}{2}\right) \quad (x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(-1, -8)$$

$$=\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) \quad \text{اجمع}$$

$$=(3, -1) \quad \text{بسّط}$$

الخطوة 2: أوجد طول نصف القطر.

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة بين نقطتين}$$

$$=\sqrt{(3-7)^2+(-1-6)^2} \quad (x_1, y_1)=(7, 6), (x_2, y_2)=(3, -1)$$

$$=\sqrt{(-4)^2+(-7)^2} \quad \text{اطرح}$$

$$=\sqrt{65} \quad \text{بسّط}$$

إن طول نصف القطر للدائرة هو $\sqrt{65}$ وحدة، لذا فإن $r^2=65$. عوّض عن h, k, r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة لتجد أن معادلة الدائرة هي $(x-3)^2+(y+1)^2=65$.

تحقق من فهمك

6) أوجد معادلة دائرة، إذا كان طرفا قطر فيها $(1, 5)$, $(3, -3)$.

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا. (مثال 1)

1) $\frac{(x+2)^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$

2) $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

3) $x^2 + 9y^2 - 14x + 36y + 49 = 0$

4) $4x^2 + y^2 - 64x - 12y + 276 = 0$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 2)

5) الرأسان $(13, -3)$, $(-7, -3)$ ، والبؤرتان $(11, -3)$, $(-5, -3)$

6) الرأسان $(4, -9)$, $(4, 3)$ ، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

7) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(1, 2)$, $(-13, 2)$ ، وإحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(-6, 0)$, $(-6, 4)$.

8) البؤرتان $(-6, -3)$, $(-6, 9)$ ، وطول المحور الأكبر 20 وحدة.

9) الرأسان المرافقان $(-3, 7)$, $(-13, 7)$ ، وطول المحور الأكبر 16 وحدة.

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في كل ما يأتي: (مثال 3)

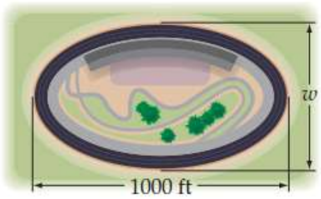
10) $\frac{(x+5)^2}{72} + \frac{(y-3)^2}{54} = 1$

11) $\frac{(x+6)^2}{40} + \frac{(y-2)^2}{12} = 1$

12) $\frac{(x-8)^2}{14} + \frac{(y+3)^2}{57} = 1$

13) $\frac{(x+8)^2}{27} + \frac{(y-7)^2}{33} = 1$

14) **سباق:** يوضّح الشكل المجاور مضمار سباق على شكل قطع ناقص اختلافه المركزي 0.75 . (مثال 4)



a) ما أقصى عرض w لمضمار السباق؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص إذا كانت نقطة الأصل هي مركز المضمار.

اكتب معادلة الدائرة التي تحقّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثّل منحناها بيانيًّا. (مثال 5)

15) المركز $(3, 0)$ ، و نصف القطر 2.

16) المركز $(-3, -4)$ ، والقطر 12 .

17) المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 7 .

اكتب معادلة الدائرة المعطى طرفا قطر فيها في كل مما يأتي: (مثال 6)

18) $(2, 1)$, $(2, -4)$

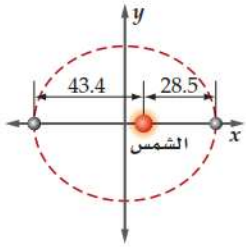
19) $(-4, -10)$, $(4, -10)$

20) $(5, -7)$, $(-2, -9)$

21) $(-6, 4)$, $(4, 8)$

22) **معادلات:** استنتج الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الأكبر رأسي، ومركزه نقطة الأصل.

23) بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، أجب عما يأتي:



a) أوجد طول المحور الأصغر لمدار كوكب عطارد.

b) أوجد الاختلاف المركزي للمدار.

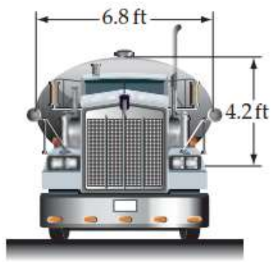
أوجد المركز والبؤرتين والرأسين لكل قطع ناقص مما يأتي:

24) $\frac{(x+5)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

25) $9y^2 - 18y + 25x^2 + 100x - 116 = 0$

26) $65x^2 + 16y^2 + 130x - 975 = 0$

27) **شاحنات:** تستعمل في شاحنات نقل السوائل خزانات مقطعها العرضي على شكل قطع ناقص؛ لأنها أكثر ثباتًا من الخزانات الأسطوانية، ويكون السائل فيها أقل حركة.



a) ارسم المقطع العرضي لخزان الشاحنة أعلاه على مستوى إحداثي.

b) اكتب معادلة تمثل شكل المقطع العرضي للخزان.

c) أوجد الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي يمثّل المقطع العرضي للخزان.

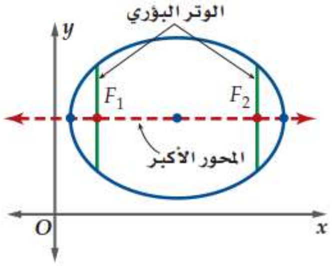
اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

28) الرأسان $(10, 0)$, $(-10, 0)$ والاختلاف المركزي $\frac{3}{5}$

29) الرأسان المرافقان $(6, 1)$, $(0, 1)$ ، والاختلاف المركزي $\frac{4}{5}$.

30) المركز $(2, -4)$ وإحدى البؤرتين $(2, -4 + 2\sqrt{5})$ ، والاختلاف المركزي $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

31) الوتر البؤري للقطع الناقص هو قطعة مستقيمة تمر بإحدى البؤرتين، وتعامد المحور الأكبر، ويقع طرفاها على منحنى القطع. ويساوي طولها $\frac{2b^2}{a}$ وحدة، حيث a نصف طول المحور الأكبر، b نصف طول المحور الأصغر.



اكتب معادلة قطع ناقص أفقي مركزه $(2, 3)$، وطول محوره الأكبر 16 وحدة، وطول وتره البؤري 12 وحدة.

32) هندسة: تتقاطع المستقيمات $x - 5y = -3, 2x + 3y = 7, 4x - 7y = 27$ لتشكّل مثلثًا. اكتب معادلة الدائرة التي تمر بروؤس المثلث.

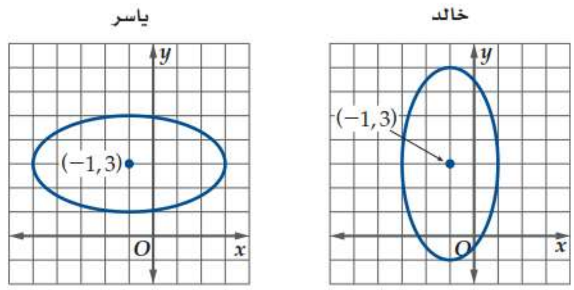
اكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي تمرّ بالنقاط المعطاة في كل مما يأتي:

33) $(2, 3), (8, 3), (5, 6)$ **34)** $(1, -11), (-3, -7), (5, -7)$

35) $(0, 9), (0, 3), (-3, 6)$ **36)** $(7, 4), (-1, 12), (-9, 4)$

مسائل مهارات التفكير العليا

37) اكتشف الخطأ: مثّل خالد وياسر بيانيًّا القطع الناقص الذي مركزه $(-1, 3)$، وطول محوره الأكبر 8 وحدات، وطول محوره الأصغر 4 وحدات، كما في الشكلين أدناه. هل إجابة أي منهما صحيحة؟

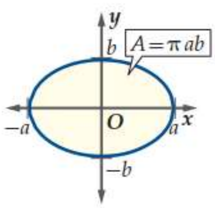


38) تبرير: حدّد ما إذا كان للقطعين الناقصين $\frac{x^2}{p+r} + \frac{y^2}{p} = 1, \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p+r} = 1$، حيث $r > 0$، البؤرة نفسها. وضّح إجابتك.

تحدٍّ: تُعطى المساحة داخل القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالصيغة $A = \pi ab$. اكتب معادلة القطع الناقص المعطى خصائصه في كل مما يأتي:

39) $b + a = 12, A = 35\pi$

40) $a - b = 5, A = 24\pi$



41) مسألة مفتوحة: إذا كانت معادلة دائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ حيث $h > 0, k < 0$، فأوجد مجال الدائرة مدعمًا إجابتك بمثال جبري، وآخر بياني.

42) اكتب: اشرح لماذا يقترب شكل القطع الناقص من شكل الدائرة عندما تقترب قيمة a من قيمة b.

تدريب على اختبار

43) تبعد النقطة K مسافة 10 وحدات عن مركز دائرة M، نصف قطرها 6 وحدات. فإذا رسم مماس من K إلى الدائرة، فما المسافة من K إلى نقطة التماس؟

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** $2\sqrt{34}$

44) يريد حسام أن يصنع لعبة لوحة السهام على شكل قطع ناقص أفقي. أبعادُ اللوحة 27 بوصة و 15 بوصة. أي المعادلات الآتية يجب أن يستعملها لرسم اللعبة؟

A $\frac{y^2}{13.5} + \frac{x^2}{7.5} = 1$ **C** $\frac{y^2}{56.25} + \frac{x^2}{182.25} = 1$

B $\frac{y^2}{182.25} + \frac{x^2}{56.25} = 1$ **D** $\frac{y^2}{7.5} + \frac{x^2}{13.5} = 1$

اختبار منتصف الوحدة

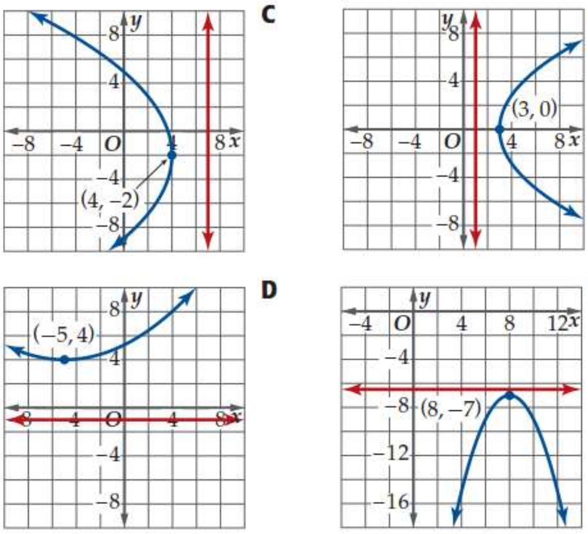
الدرسان 2-2 , 2-1

اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين المعطاة بعض خصائصهما فيما يأتي، ثم مثّل منحنييهما بيانيًّا: (الدرس 2-1)

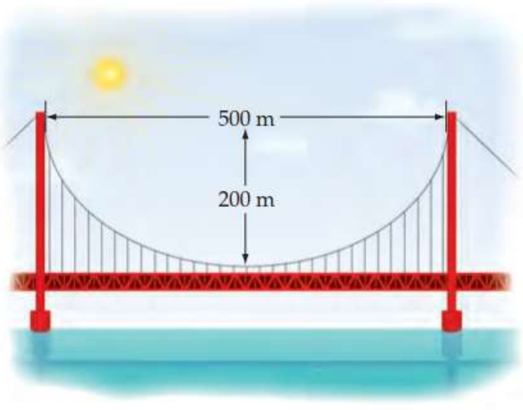
1) البؤرة $(1, 5)$، الرأس $(1, 3)$

2) البؤرة $(-7, -5)$، الرأس $(-7, 1)$

3) **اختيار من متعدد:** أي القطوع المكافئة الممثّلة بيانيًّا أدناه فيه بُعد البؤرة عن الرأس هو الأكبر؟ (الدرس 2-1)



4) **تصميم:** اكتب معادلة قطع مكافئ تمثّل شكل سلك تثبيت الجسر الموضح في الشكل أدناه. افترض أن نقطة الأصل تقع عند أدنى نقطة على السلك. (الدرس 2-1)



مثّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل مما يأتي بيانيًّا: (الدرس 2-2)

5) $\frac{(x+4)^2}{81} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

6) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (الدرس 2-2)

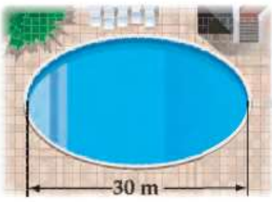
7) الرأسان $(-3, -3)$, $(9, -3)$، والبؤرتان $(-1, -3)$, $(7, -3)$.

8) البؤرتان $(3, 7)$, $(3, 1)$، وطول المحور الأصغر 8 وحدات.

9) الرأسان $(1, -13)$, $(1, -1)$، والرأسان المرافقان $(-2, -7)$, $(4, -7)$.

10) الرأسان $(8, -9)$, $(8, 5)$، وطول المحور الأصغر 6 وحدات.

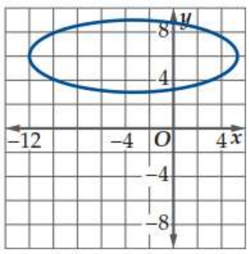
11) **سباحة:** بركة سباحة على شكل قطع ناقص طوله 30 m واختلافه المركزي 0.68. (الدرس 2-2)



a) ما أكبر عرض للبركة؟

b) اكتب معادلة القطع الناقص، إذا كانت نقطة الأصل هي مركز البركة.

12) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يمثّل القيمة الأقرب لطول المحور الأكبر في القطع الناقص الممثّل بيانيًّا أدناه؟ (الدرس 2-2)



A 17 وحدة

B 9 وحدات

C 6 وحدات

D 3 وحدات

2-3

القطوع الزائدة
Hyperbolas

فيما سبق:

درستُ تحليل القطوع الناقصة والدوائر وتمثيل منحنياتها بيانيًا.

والآن:

- أحلل معادلات القطوع الزائدة، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب معادلات القطوع الزائدة.

المفردات:

القطع الزائد
hyperbola

البؤرتان
foci

المركز
center

الرأسان
vertices

المحور القاطع
transverse axis

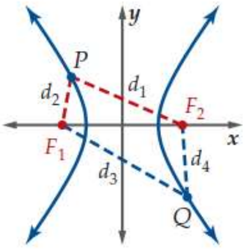
المحور المرافق
conjugate axis

لماذا؟

يدور مذنب هالي حول الشمس في مسارٍ على شكل قطع ناقص؛ لذا فإنه يعاود الظهور في السماء، بينما توجد مذنبات أخرى لا تظهر إلا مرةً واحدةً فقط؛ وذلك لاقترابها من بعض الكواكب العملاقة كالمشتري مثلًا، وهذا القرب يجعل مسار هذه المذنبات إهليلجيًّا مفتوحًا من إحدى جهتَيه، ويزيد سرعتها بشكل غير طبيعي، ويجعلها تنطلق في الفضاء ولا تعود ثانيةً، ومثل هذه المسارات تُسمَّى قطوعًا زائدةً.

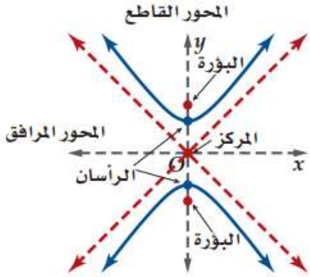
تحليل القطع الزائد وتمثيله بيانيًا: **القطع الزائد** هو المحل الهندسي لجميع النقاط الواقعة في المستوى والتي يكون الفرق المطلق (القيمة المطلقة للفرق) بين بعديها عن نقطتين ثابتتين تسميان (**البؤرتين**) يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$|d_1 - d_2| = |d_3 - d_4|$$

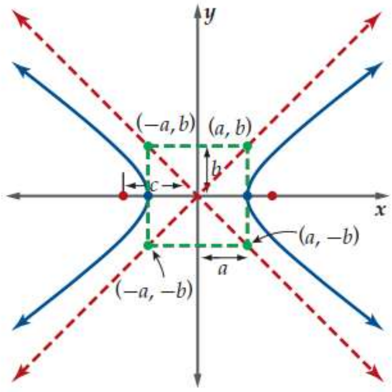


يتكون منحنى القطع الزائد من فرعين منفصلين يحاذيان خطي تقارب، **ومركز** القطع الزائد هو نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين، **ورأسا** القطع الزائد هما نقطتا تقاطع القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين مع كل من فرعي المنحنى.

للقطع الزائد محورا تماثل هما: **المحور القاطع** (وهو القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين) ويمر بالمركز، و**المحور المرافق** (وهو القطعة المستقيمة العمودية على المحور القاطع) ويمر بالمركز.



لتكن الأطوال a, b, c كما هو موضح في الشكل أدناه، وتختلف العلاقة بينها عمّا في القطع الناقص، ففي القطع الزائد $c^2 = a^2 + b^2$، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي أي نقطة على منحنى القطع الزائد عن البؤرتين تساوي $2a$.

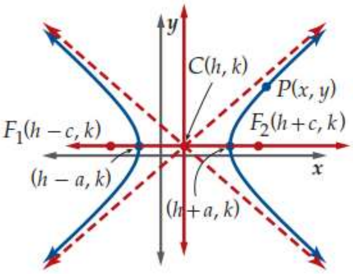


إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للقطع الزائد

يتميز التمثيل البياني للقطع الزائد بارتباطه بمستطيل متناظر حول محوري تماثل القطع نفسه، وله ضلعان متواجهان طول كل منهما 2b، ويمسان القطع عند رأسيه، وضلعاه الآخران طول كل منهما 2a، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب 2c.

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد:



يمكن استعمال تعريف القطع الزائد لإيجاد معادلته كما في القطوع المخروطية الأخرى. افترض أن $P(x, y)$ نقطة على منحنى القطع الزائد الذي مركزه $C(h, k)$، ومحوره القاطع أفقي. يوضّح الشكل المجاور إحداثيات البؤرتين والرأسين. وبحسب تعريف القطع الزائد فإن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو مقدار ثابت. لذا فإن $|PF_1 - PF_2| = 2a$. وهذا يعني إمّا $PF_1 - PF_2 = 2a$ أو $PF_2 - PF_1 = 2a$.

$$PF_1 - PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2} = 2a$$
صيغة المسافة

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} - \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 2a$$
خاصية التوزيع ثم التجميع

$$\sqrt{[(x-h)+c]^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}$$
اجمع

$$(x-h)^2+2c(x-h)+c^2+(y-k)^2 = 4a^2+4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} + (x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2$$
ربّع الطرفين، ثم أوجد مفكوك مربع مجموع (أو الفرق) بين حدين

$$-4a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = 4a^2-4c(x-h)$$
بسّط

$$a\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2} = -a^2+c(x-h)$$
اقسم الطرفين على -4 .

$$a^2[(x-h)^2-2c(x-h)+c^2+(y-k)^2] = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$
ربّع الطرفين

$$a^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2 = a^4-2a^2c(x-h)+c^2(x-h)^2$$
الخاصية التوزيعية

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^4-a^2c^2$$
بسّط

$$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(a^2-c^2)$$
الخاصية التوزيعية

$$-b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2 = a^2(-b^2)$$
$a^2-c^2=-b^2$

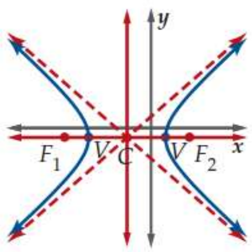
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
اقسم الطرفين على $a^2(-b^2)$.

المعادلة القياسية للقطع الزائد الذي مركزه (h, k) هي $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع أفقيًا، كما تكون في الصورة $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ عندما يكون المحور القاطع رأسيًا.

مفهوم أساسي — خصائص القطع الزائد

المعادلة في الصورة القياسية:

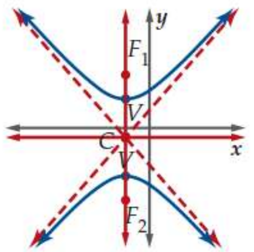
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه:	المحور القاطع أفقي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(h \pm c, k)$
المحور القاطع:	$y = k$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$x = h$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

المعادلة في الصورة القياسية:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



الاتجاه:	المحور القاطع رأسي
المركز:	(h, k)
الرأسان:	$(h, k \pm a)$
البؤرتان:	$(h, k \pm c)$
المحور القاطع:	$x = h$، وطوله $2a$
المحور المرافق:	$y = k$، وطوله $2b$
خطا التقارب:	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x-h)$
العلاقة بين a, b, c:	$c^2 = a^2 + b^2$ أو $c = \sqrt{a^2+b^2}$
طول البعد البؤري:	$2C$

مثال 1 تحديد خصائص قطع زائد معادلته معطاة على الصورة القياسية

حدِّد خصائص القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$ ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

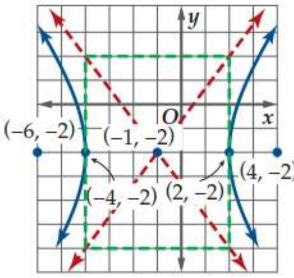
المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$h = -1\,, k = -2\,, a = \sqrt{9} = 3\,, b = \sqrt{16} = 4\,, c = \sqrt{9+16} = 5$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه:	أفقي	المطروح منه هو الحد الذي يحتوي x
المركز:	$(-1, -2)$	(h, k)
الرأسان:	$(2, -2)\,, (-4, -2)$	$(h \pm a, k)$
البؤرتان:	$(4, -2)\,, (-6, -2)$	$(h \pm c, k)$
خطا التقارب:	$y + 2 = \frac{4}{3}(x+1)$, $y + 2 = -\frac{4}{3}(x+1)$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
	$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$, $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$	

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(-1, -2)$ وأحد بعديه $2a = 6$ ، والبعد الآخر $2b = 8$، وطول كل من قطريه المحمولين على خطي التقارب $2c = 10$. ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



تحقق من فهمك

(1A $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$

(1B $\frac{(y+4)^2}{64} - \frac{(x+1)^2}{81} = 1$

يمكنك تمثيل القطع الزائد عند معرفة الصورة القياسية لمعادلته، وذلك باستعمال خصائصه. وإذا أُعطيت المعادلة في صورة أخرى فعليك إعادة كتابة المعادلة على الصورة القياسية لتحديد خصائص القطع.

مثال 2 كتابة معادلة قطع زائد على الصورة القياسية

اكتب معادلة القطع الزائد $25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد خصائصه ومثِّل منحناه بيانيًّا.

اكتب المعادلة على الصورة القياسية أولاً.

$25y^2 - 16x^2 + 100y + 96x = 444$	المعادلة الأصلية
$(25y^2 + 100y) + (-16x^2 + 96x) = 444$	جمِّع الحدود المتشابهة
$25(y^2 + 4y) - 16(x^2 - 6x) = 444$	حلِّل
$25(y^2 + 4y + 4) - 16(x^2 - 6x + 9) = 444 + 25(4) - 16(9)$	أكمل المربع
$25(y+2)^2 - 16(x-3)^2 = 400$	حلِّل وبسِّط
$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{25} = 1$	اقسم كلا الطرفين على 400

المعادلة مكتوبة على الصورة القياسية، حيث:

$$.\,h = 3\,, k = -2\,, a = \sqrt{16} = 4\,, b = \sqrt{25} = 5\,, c = \sqrt{16+25} \approx 6.4$$

استعمل هذه القيم لتحديد خصائص القطع الزائد.

تنبيه!

عندما تمثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا تذكر أن المنحنى سيقترب من خطي التقارب بشكل ملحوظ كلما ابتعد عن الرأسين.

إرشادات للدراسة

اتجاه القطع الزائد

إذا كانت معادلة القطع الزائد على الصورة القياسية، وفيها الحد المطروح منه يحتوي x فإن اتجاه القطع أفقي، أما إذا كان الحد المطروح منه يحتوي y ، فإن اتجاه القطع رأسي.

إرشادات للدراسة

الصورة القياسية

تذكر دائمًا عند التحويل من الصورة العامة إلى الصورة القياسية بأن الفرق بين الحدين الجبريين يجب أن يكون 1 .

الاتجاه: رأسي — المطروح منه هو الحد الذي يحتوي y .

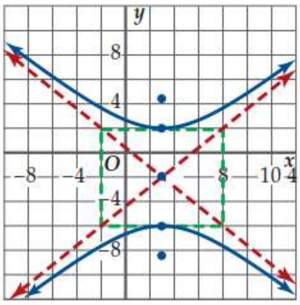
المركز: $(3, -2)$ — (h, k)

الرأسان: $(3, 2), (3, -6)$ — $(h, k \pm a)$

البؤرتان: $(3, 4.4), (3, -8.4)$ — $(h, k \pm c)$

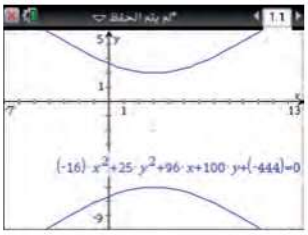
خطا التقارب: $y-(-2)=\frac{4}{5}(x-3)$, $y-(-2)=-\frac{4}{5}(x-3)$ — $y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$

$y=\frac{4}{5}x-\frac{22}{5}$, $y=\frac{-4}{5}x+\frac{2}{5}$



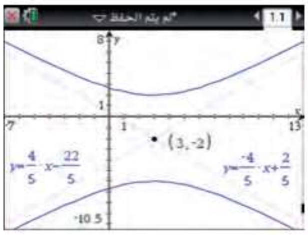
عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين، ثم ارسم المستطيل الذي مركزه $(3, -2)$ وأحد بُعدَيه $2a = 8$ ، والبعد الآخر $2b = 10$، وطول كلٍّ من قطريه المحمولين على خطَّي التقارب $2c = 12.8$
ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا، بحيث يمس جانبَي المستطيل عند رأسيه، ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.

التحقق: تمثيل القطع الزائد بيانيًّا وتحديد خصائصه، باستعمال الحاسبة البيانيّة TI-nspire ،



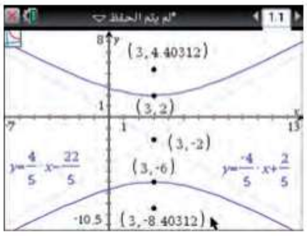
- مثِّل القطع الزائد بالضغط على المفاتيح:
on esc menu ثم اختيار
3: إدخال/ تحرير الرسم البياني 2: معادلة
6: القطوع المخروطية 1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة لمنحنى القطع الزائد.



- حدِّد خصائص القطع الزائد بالضغط على menu، ثم اختيار
6: تحليل الرسم البياني ومنها 7: تحليل القطوع المخروطية

ثم اضغط على مفتاح كل خاصية من خصائص القطع الزائد:
1: المركز 6: الخطوط المقاربة 2: الرؤوس
3: البؤرة



- قارن بين الناتج وتمثيلك السابق، وذلك باختبار النقاط وخطَّي التقارب.

تحقق من فهمك

2A) $4y^2 - 9x^2 - 8y - 36x = 68$

2B) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 36 = 0$

الربط مع تاريخ الرياضيات

هايباتيا (415 - 350)
كانت هايباتيا عالمة في الرياضيات، والعلوم، وفيلسوفة من الإسكندرية في مصر. وقامت بتحرير كتاب (أبولوينوس) في القطوع المخروطية، وأضافت إليه مسائل، وأمثلة توضيحية، وقد طوَّر هذا الكتاب مفاهيم كل من: القطع المكافئ، والقطع الناقص، والقطع الزائد.

يمكنك كتابة معادلة القطع الزائد إذا علمت بعض خصائصه التي توفر معلوماتٍ كافيةً.

مـثال 3 كتابة معادلة قطع زائد إذا عُلم بعض خصائصه

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) الرأسان $(-3, 2)$, $(-3, -6)$ ، والبؤرتان $(-3, 3)$, $(-3, -7)$.

بما أنّ إحداثيَّي x متساويان للرأسين، فإن المحور القاطع رأسي. أوجد المركز وقيم a, b, c .

المركز: $\left(\frac{-3-3}{2}, \frac{-6+2}{2}\right) = (-3, -2)$ نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين الرأسين

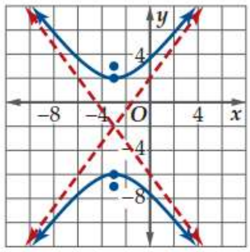
$a = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (-6-(-2))^2} = 4$ المسافة بين أيٍّ من الرأسين والمركز

$c = \sqrt{(-3-(-3))^2 + (3-(-2))^2} = 5$ المسافة بين أيٍّ من البؤرتين والمركز

$b = 3$ $\quad c^2 = a^2 + b^2$

بما أن المحور القاطع رأسي، فإن a^2 ترتبط بالحد y^2 ؛ لذا فمعادلة القطع الزائد هي:

$\frac{(y+2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$. انظر الشكل 2.3.1 .



الشكل 2.3.1

b) الرأسان $(-9, 0)$, $(-3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = -2x + 12$, $y = 2x - 12$.

بما أنّ إحداثيي y للرأسين متساويان، فإن المحور القاطع أفقي.

المركز: $\left(\frac{-3-9}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (-6, 0)$ نقطة المنتصف للقطعة الواصلة بين الرأسين

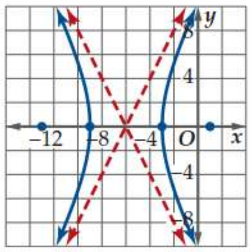
$a = 3$ المسافة بين أي من الرأسين والمركز

ميلا خطي التقارب: $\pm\frac{b}{a}$. استعمل الميل الموجب لتجد b .

$\frac{b}{a} = 2$ الميل الموجب لخط التقارب

$\frac{b}{3} = 2$ $\quad a = 3$

$b = 6$ بسِّط



الشكل 2.3.2

بما أنّ المحور القاطع أفقي، فإنّ a^2 ترتبط بالحد x^2 . لذا معادلة القطع الزائد هي $\frac{(x+6)^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ، انظر الشكل 2.3.2 .

تحقق من فهمك

3A) الرأسان $(3, 2)$, $(3, 6)$ ، وطول المحور المرافق 10 وحدات.

3B) البؤرتان $(2, -2)$, $(12, -2)$ ، وخطا التقارب $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{4}$, $y = \frac{3}{4}x - \frac{29}{4}$.

ويمكن استعمال قيمة الاختلاف المركزي لوصف القطع الزائد، فصيغة الاختلاف المركزي هي نفسها $e = \frac{c}{a}$ لكلٍّ من القطعين الناقص والزائد. تذكر أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الناقص تقع بين 0 و 1 ، لكن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد أكبر من 1 دائمًا، وكلما زادت قيمته زاد اتساع المنحنى.

مثال 4 الاختلاف المركزي للقطع الزائد

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y-4)^2}{48} - \frac{(x+5)^2}{36} = 1$.

حدّد أولًا قيمة c ثم الاختلاف المركزي .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c	$e = \frac{c}{a}$	صيغة الاختلاف المركزي
$c^2 = 48 + 36$	$a^2 = 48, b^2 = 36$	$= \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{48}}$	$a = \sqrt{48}, c = \sqrt{84}$
$c = \sqrt{84}$	بسّط	≈ 1.32	بسّط

الاختلاف المركزي يساوي 1.32 تقريبًا.

تحقق من فهمك

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي:

4A) $\frac{(x+8)^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{80} = 1$

4B) $\frac{(y-2)^2}{15} - \frac{(x+9)^2}{75} = 1$

يمكن لنظام كشف الصواعق تحديد موقع صاعقة باستعمال مجسين موضوعين عند بؤرتي قطع زائد.

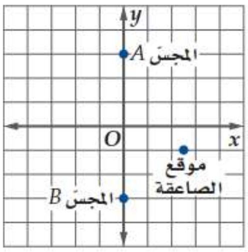
مثال 5 من واقع الحياة تطبيقات على القطع الزائد

الربط مع الحياة

تضرب الصواعق أمكنة على سطح الأرض بما يقارب 100 مرة في الثانية.

أرصاد: يحتوي نظام كشف الصواعق على مجسمين يحولان الأمواج الضوئية للصاعقة إلى صيغة رقمية تسجل تفاصيل تلك الصاعقة، فإذا وُضع مجسّان للكشف عن الصواعق يبعد أحدهما عن الآخر بمقدار 6 km ، بحيث كان المجسّ A شمال المجسّ B . ومض برق صاعقة شرق كل من المجسّين، وكان بعده عن المجس A يزيد بمقدار 1.5 km على بعده عن المجس B .

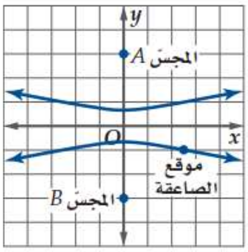
a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي تقع الصاعقة على منحناه.



حدّد موقع المجسّين على مستوى إحداثي على أن تكون نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما. وبما أن موقع الصاعقة إلى الشرق من كلا المجسين، وأقرب إلى المجس B ، فإن موقعها في الربع الرابع.

المجسّان موضوعان عند بؤرتي القطع الزائد، لذا $c = 3$. تذكَّر أن الفرق المطلق بين بعدي أي نقطة على المنحنى عن البؤرتين هو $2a$ ، وبما أنّ بعد الصاعقة عن المجسّ A يزيد بمقدار 1.5 km على بعدها عن المجس B ، فإن $2a = 1.5$ ، أي أن $a = 0.75$. استعمل قيمتي a و c لتجد b .

$c^2 = a^2 + b^2$	العلاقة بين a, b, c
$3^2 = 0.75^2 + b^2$	$c = 3, a = 0.75$
$8.4375 = b^2$	بسّط



المحور القاطع رأسي ومركز القطع الزائد عند نقطة الأصل. لذا فالمعادلة هي $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$. وعند تعويض قيمتي a^2, b^2 تصبح المعادلة $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$. أي أن موقع الصاعقة يمثّل نقطة على منحنى القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1$.

b) **أوجد إحداثيي موقع الصاعقة إذا حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسّين.**

بما أن الصاعقة حدثت على بعد 2.5 km شرق المجسين فإنّ $x = 2.5$ ، وموقع الصاعقة أقرب إلى المجس B منه إلى المجس A ، لذا فإن موقعها في الجزء الأسفل من المستوى الإحداثي. عوّض قيمة x في المعادلة، وأوجد y .

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{x^2}{8.4375} = 1 \quad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$\frac{y^2}{0.5625} - \frac{2.5^2}{8.4375} = 1 \quad x = 2.5$$

$$y \approx \pm 0.99 \quad \text{حل بالنسبة لـ } y$$

وحيث إن موقع الصاعقة في الربع الرابع، لذا فإن قيمة y هي -0.99 تقريبًا، وذلك يعني أن موقع الصاعقة هو $(2.5, -0.99)$.

تحقق من فهمك

5) **ملاحة بحرية:** تعطلت سفينة عند نقطة في عرض البحر، بحيث كان الفرق بين بعدي السفينة عن أقرب محطتين إليها 80 ميلًا بحريًا .

5A) إذا كان موقعا المحطتين يمثلان بؤرتي قطع زائد تقع السفينة عليه، فاكتب معادلة القطع الزائد عندما تقع المحطتان عند النقطتين $(100, 0)$، $(-100, 0)$.

5B) أوجد إحداثيي موقع السفينة إذا كانت تقع على المستقيم الواصل بين البؤرتين، وكانت أقرب إلى المحطة التي إحداثياها $(100, 0)$.

تدرب وحل المسائل

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 1)

1) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{17} = 1$

2) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{30} = 1$

3) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

4) $\frac{(y+4)^2}{49} - \frac{(x-4)^2}{64} = 1$

5) $3x^2 - 2y^2 = 12$

6) $3y^2 - 5x^2 = 15$

7) **إضاءة:** يمكن تمثيل الضوء المنعكس من مصباح طاولة على جدار بقطع زائد معادلته $\frac{y^2}{225} - \frac{x^2}{81} = 1$. مثِّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا. (مثال 1)

اكتب معادلة كل قطع زائد مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدد خصائصه، ومثِّل منحناه بيانيًّا: (مثال 2)

8) $x^2 - 4y^2 - 6x - 8y = 27$

9) $-x^2 + 3y^2 - 4x + 6y = 28$

10) $-5x^2 + 2y^2 - 70x - 8y = 287$

11) $9y^2 - 4x^2 - 54y + 32x - 19 = 0$

12) $16x^2 - 9y^2 + 128x + 36y + 76 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي: (مثال 3)

13) البؤرتان $(-1, 9)$ ، $(-1, -7)$ ، وطول المحور المرافق 14 وحدة.

14) الرأسان $(-5, 5)$ ، $(7, 5)$ ، والبؤرتان $(-9, 5)$ ، $(11, 5)$.

15) الرأسان $(-1, 3)$ ، $(-1, 9)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{7}x + \frac{45}{7}$.

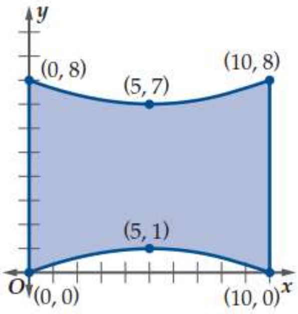
16) البؤرتان $(-17, 7)$ ، $(9, 7)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{5}{12}x + \frac{104}{12}$.

17) المركز $(-7, 2)$ ، وأحد خطي التقارب $y = \frac{7}{5}x + \frac{59}{5}$ ، والمحور القاطع أفقيًّا وطوله 10 وحدات.

18) الرأسان $(2, -2)$ ، $(2, 10)$ ، وطول المحور المرافق 16 وحدة.

19) الاختلاف المركزي $\frac{7}{6}$ والبؤرتان عند $(-1, -2)$ ، $(13, -2)$.

20) هندسة معمارية: يبيّن الشكل المجاور مخطّط أرضية مكتب.



a) اكتب معادلة تمثِّل فرعي المنحنى في الشكل.

b) إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثِّل 15 ft، فما أقصر عرض لأرضية المكتب؟ (مثال 3)

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي: (مثال 4)

21) $\dfrac{(y-1)^2}{10} - \dfrac{(x-6)^2}{13} = 1$

22) $\dfrac{(x+4)^2}{24} - \dfrac{(y+1)^2}{15} = 1$

23) $\dfrac{(x-3)^2}{38} - \dfrac{(y-2)^2}{5} = 1$

24) $\dfrac{(y+2)^2}{32} - \dfrac{(x+5)^2}{25} = 1$

25) $3x^2 - 2y^2 + 12x - 12y = 42$

26) $-x^2 + 7y^2 + 24x + 70y = -24$

27) **طيران:** يقع المطاران A , B على بعد 72 km كل منهما عن الآخر، بحيث يقع المطار B جنوب A . وعند لحظة ما كان بُعد طائرة عن المطار B يزيد بمقدار 18 km عن بُعدها عن المطار A . (مثال 5)

a) اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ويقع المطاران عند بؤرتيه، وتقع الطائرة على منحناه عند تلك اللحظة.

b) مثّل منحنى القطع الزائد بيانيًّا مع توضيح فرع القطع الذي تقع عليه الطائرة عند تلك اللحظة.

c) إذا كانت الطائرة في تلك اللحظة على بعد 40 km شرق كلا المطارين، فأوجد إحداثيي موقع الطائرة.

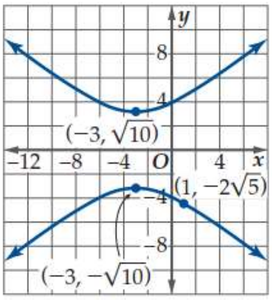
28) **هندسة معمارية:** يأخذ برج "كوب بورت" في اليابان شكل مجسم ناتج عن دوران قطع زائد حول محوره المرافق. افترض أن قيمة الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي نتج عن دوران البرج تساوي 19.

a) إذا كان أقصر عرض للبرج هو 8 m، فما معادلة القطع الزائد؟

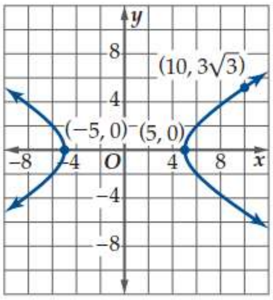
b) إذا كان ارتفاع قمة البرج عن مركز القطع الزائد هو 32 m، وانخفاض القاعدة عن المركز هو 76 m، فأوجد نصف قطر القمة ونصف قطر القاعدة.

اكتب معادلة القطع الزائد الممثَّل بيانيًّا في كل مما يأتي:

29)

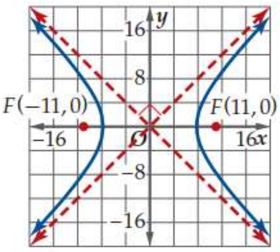


30)



31) **طقس:** يقف محمد وعلي في مكانين، البعد بينهما 4000 ft . إذا علمت أن الفرق الزمني بين سماع محمد لصوت رعد وسماع علي هو 3 sec، وأن سرعة الصوت 1100 ft/sec، فأوجد معادلة القطع الزائد الأفقي الذي يقع عليه مصدر البرق.

32) يتشكَّل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما يكون خطا تقاربه متعامدين، وَ $a = b$ عند كتابة معادلته على الصورة القياسية. اكتب معادلة القطع الزائد المتطابق الساقين في الشكل المجاور.



33) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة نوعًا خاصًّا من القطوع الزائدة يسمّى القطع الزائد المرافق. ويظهر هذا القطع عندما يكون المحور المرافق لقطع زائد هو المحور القاطع لقطع زائد آخر.

a) **بيانيًّا:** مثِّل منحنى القطع $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ ومنحنى القطع $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{36} = 1$ على المستوى الإحداثي نفسه.

b) **تحليليًّا** قارن بين المنحنيين من حيث: البؤرتان، الرأسان، خطا التقارب.

c) **تحليليًّا:** اكتب معادلة القطع الزائد المرافق للقطع الذي معادلته $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$.

d) **بيانيًّا:** مثل منحنيي القطعين في الفرع c.

e) **لفظيًّا:** كوّن تخمينًا حول تشابه القطعين الزائدين المترافقين.

مسائل مهارات التفكير العليا

34) مسألة مفتوحة: اكتب معادلةً لقطع زائد يكون فيه طول المحور القاطع يساوي نصف المسافة بين البؤرتين.

35) تبرير: افترض أن $rx^2 = -sy^2 - t$ ، حيث r, s, t أعداد ثابتة. صف نوع القطع المخروطي الناتج في كل حالة. واشرح تبريرك.

a) $rs = 0$

b) $rs > 0$

c) $r = s$

d) $rs < 0$

36) تبرير: افترض أنك أُعطيت اثنتين من خصائص القطع الزائد الآتية: رأسين، بؤرتين، المحور القاطع، المحور المرافق، خطي تقارب. هل يمكنك كتابة معادلة هذا القطع: *دائمًا أو أحيانًا أو غير ممكن أبدًا*؟

37) تحدٍّ: قطع زائد بؤرتاه $F_1(0, 9)$ ، $F_2(0, -9)$ ، ويمر بالنقطة P . يزيد بعد P عن F_1 بمقدار 6 وحدات على بعد P عن F_2 . اكتب معادلة القطع الزائد بالصيغة القياسية.

38) برهان: يتشكل القطع الزائد المتطابق الساقين عندما $a = b$ عند كتابة المعادلة على الصورة القياسية. برهن أن الاختلاف المركزي لكل قطع زائد متطابق الساقين هو $\sqrt{2}$.

39) اكتب: صف خطوات إيجاد معادلة قطع زائد عندما تعطى بؤرتاه وطول محوره القاطع.

تدريب على اختبار

40) مراجعة: يمثِّل منحنى $\left(\frac{x}{4}\right)^2 - \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ قطعًا زائدًا. ما معادلتا خطي تقارب هذا المنحنى؟

A $y = \frac{4}{5}x, y = -\frac{4}{5}x$

B $y = \frac{5}{4}x, y = -\frac{5}{4}x$

C $y = \frac{1}{4}x, y = -\frac{1}{4}x$

D $y = \frac{1}{5}x, y = -\frac{1}{5}x$

41) سؤال ذو إجابة قصيرة: أوجد معادلتي خطي التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} = 1$.

2-4

تحديد أنواع القطوع المخروطية
Identifying Conic Sections

فيما سبق:

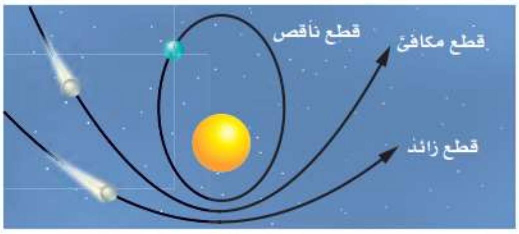
درستُ كتابة معادلات القطوع المخروطية على الصورة القياسية.

والآن:

- أحدد نوع القطوع المخروطية من معادلاتها.

لماذا؟

تدور كواكب مجموعتنا الشمسية حول الشمس في مدارات على شكل قطع ناقص، في حين تنطلق المذنبات في مسارات قد تكون على شكل قطع مكافئ أو قطع ناقص أو قطع زائد، بحيث يمثّل مركز الشمس بؤرة للقطع.



الصورة العامة لمعادلات القطوع المخروطية : يمكن كتابة معادلة أي قطع مخروطي على الصورة العامة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ ، على أن لا تساوي A, B, C جميعها أصفارًا. ويمكن تحويل هذه الصورة إلى الصور القياسية باستعمال طريقة إكمال المربع إذا كانت $B = 0$.

مثال 1 كتابة المعادلة العامة لقطع مخروطي على الصورة القياسية

اكتب كلًّا من المعادلتين الآتيتين على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله:

a) $16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$

$16x^2 - 25y^2 - 128x - 144 = 0$ المعادلة الأصلية

$16(x^2 - 8x + \blacksquare) - 25y^2 = 144 + 16(\blacksquare)$ جمِّع الحدود المتشابهة، وأخرج العامل المشترك

$16(x^2 - 8x + 16) - 25y^2 = 144 + 16(16)$ حلّل وبسِّط

$16(x - 4)^2 - 25y^2 = 400$ مربع كامل

$\frac{(x-4)^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ اقسم كل حدّ على 400

بما أن المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع زائد مركزه $(4, 0)$.

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$

$x^2 + 4y^2 - 6x - 7 = 0$ المعادلة الأصلية

$(x^2 - 6x) + 4y^2 = 7$ جمِّع الحدود المتشابهة

$(x^2 - 6x + 9) + 4y^2 = 7 + 9$ أكمل المربع

$(x - 3)^2 + 4y^2 = 16$ حلّل وبسِّط

$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ اقسم كلا الطرفين على 16

بما أنّ المعادلة على الصورة $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ فإنها معادلة قطع ناقص مركزه $(3, 0)$.

تحقق من فهمك

1) اكتب المعادلة $4x^2 + y^2 - 16x + 8y - 4 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثله.

تحديد أنواع القطوع المخروطية يمكنك تحديد نوع القطع المخروطي دون أن تكتب المعادلة: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ على الصورة القياسية، وذلك باستعمال المميز $B^2 - 4AC$.

مراجعة المفردات

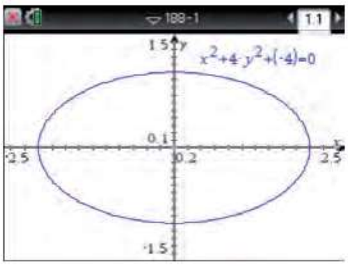
المميز
تذكر أن مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ هو $b^2 - 4ac$.

مفهوم أساسي **تصنيف القطوع المخروطية باستعمال المميز**

نوع القطع المخروطي	المميز
قطع مكافئ	$B^2 - 4AC = 0$
قطع ناقص	$B^2 - 4AC < 0, A \neq C$ أو $B \neq 0$
دائرة	$B^2 - 4AC < 0, B = 0, A = C$
قطع زائد	$B^2 - 4AC > 0$

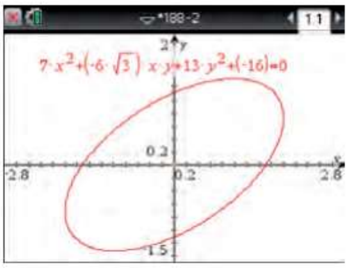
يكون القطع أفقيًّا أو رأسيًّا عندما $B = 0$، أما إذا كانت $B \neq 0$، فلا يكون القطع أفقيًّا ولا رأسيًّا.

قطع ناقص أفقي؛ $B = 0$



$x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

قطع ناقص ليس رأسيًّا ولا أفقيًّا ؛ $B \neq 0$



$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

مثال 2 تحديد نوع القطع المخروطي من معادلته

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

a) $y^2 + 4x^2 - 3xy + 4x - 5y - 8 = 0$

$A = 4, B = -3, C = 1$

المميز يساوي $(-3)^2 - 4(4)(1) = -7$.

ولأن المميز أصغر من الصفر، $B \neq 0$، فإن المعادلة تمثِّل قطعًا ناقصًا.

b) $3x^2 - 6x + 4y - 5y^2 + 2xy - 4 = 0$

$A = 3, B = 2, C = -5$

المميز يساوي $2^2 - 4(3)(-5) = 64$.

ولأن المميز أكبر من الصفر، فإن القطع زائد.

c) $4y^2 - 8x + 6y - 14 = 0$

$A = 0, B = 0, C = 4$

المميز يساوي $0^2 - 4(0)(4) = 0$.

ولأن المميز يساوي صفرًا ، فإن المعادلة تمثِّل قطع مكافئ.

تحقق من فهمك

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية:

2A) $8y^2 - 6x^2 + 4xy - 6x + 2y - 4 = 0$

2B) $3xy + 4x^2 - 2y + 9x - 3 = 0$

2C) $3x^2 + 16x - 12y + 2y^2 - 6 = 0$

تدرب وحل المسائل

اكتب كل معادلة مما يأتي على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله. (مثال 1)

1) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y - 11 = 0$

2) $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 36 = 0$

3) $9y^2 - 16x^2 - 18y - 64x - 199 = 0$

4) $6y^2 - 24y + 28 - x = 0$

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي، دون كتابتها على الصورة القياسية. (مثال 2)

5) $4x^2 - 5y = 9x - 12$

6) $5y^2 = 2x + 6y - 8 + 3x^2$

7) $8x^2 + 8y^2 + 16x + 24 = 0$

8) $4x^2 - 6y = 8x + 2$

9) $4x^2 - 3y^2 + 8xy - 12 = 2x + 4y$

10) $5xy - 3x^2 + 6y^2 + 12y = 18$

11) $16xy + 8x^2 + 10y^2 - 18x + 8y = 13$

12) **طيران:** في أحد عروض الطيران يمكن تمثيل مسار طائرة نفاثة خلال جولة واحدة، بقطع مخروطي وفق المعادلة $24x^2 + 1000y - 31680x - 45600 = 0$، وقد حدّدت الأبعاد بالأقدام.

a) حدّد شكل منحنى القطع الذي يمثّل مسار الطائرة، ثم اكتب معادلته على الصورة القياسية.

b) إذا بدأت الطائرة بالصعود عند $x = 0$، فما المسافة الأفقية التي تقطعها من بداية صعودها إلى نهاية هبوطها؟

c) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الطائرة؟

قابل بين كل حالة في التمارين 16-13 مع المعادلة التي تمثّلها من a-d

a) $47.25x^2 - 9y^2 + 18y + 33.525 = 0$

b) $25x^2 + 100y^2 - 1900x - 2200y + 45700 = 0$

c) $16x^2 - 90x + y - 0.25 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 18x - 30y - 14094 = 0$

13) **حاسوب:** حدود شبكة لاسلكية مداها 120 ft.

14) **لياقة:** المسار البيضي لقدميك على جهاز التمرين.

15) **اتصالات:** موقع هاتف محمول بين عمودي إرسال.

16) **رياضة:** ارتفاع كرة قدم عن الأرض بعد ركلها.

17) **تمثيلات متعددة:** افترض أن مركز قطع ناقص $(3, -2)$، وأحد رأسيه $M(-1, -2)$، وأحد الرأسين المرافقين $N(3, -4)$.

a) **تحليليًا:** أوجد الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص.

b) **جبريًا:** حوّل المعادلة في الفرع **a** إلى الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

c) **بيانيًا:** مثّل معادلة القطع الناقص بيانيًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تبرير:** حدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا.
"عندما يكون القطع رأسيًا، وتكون $A = C$، فإن القطع دائرة".

19) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلة على الصورة $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$، بحيث يكون $A = 9C$، وتُمثّل المعادلة قطعًا مكافئًا.

20) **اكتب:** اكتب أوجه الشبه والاختلاف بين منحنيات القطوع المخروطية ومعادلاتها.

تدريب على اختبار

21) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** حدِّد ما إذا كانت المعادلة $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$ تمثِّل قطعًا مكافئًا أو دائرة أو قطعًا ناقصًا أو قطعًا زائدًا، دون كتابتها على الصورة القياسية.

22) **اختيار من متعدد:** ما المعادلة التي تمثِّل قطعًا مكافئًا رأسه عند النقطة $(2, 2)$، ويمر بالنقطة $(0, 6)$؟

A $y = x^2 - 4x + 6$

B $y = x^2 + 4x - 6$

C $y = -x^2 - 4x + 6$

D $y = -x^2 + 4x - 6$

توسع
2-4

معمل الحاسبة البيانية:
أنظمة المعادلات والمتباينات غير الخطية
Systems of Nonlinear Equations and Inequalities

الهدف
استعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لتقريب حلول أنظمة معادلات ومتباينات غير خطية.

معادلات القطوع المخروطية هي معادلات غير خطية، ولا تمثل دوالّ إلا في بعض الحالات. ويمكنك حل أنظمة المعادلات الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire من خلال تمثيل كل معادلة في النظام ثم إيجاد نقاط التقاطع.

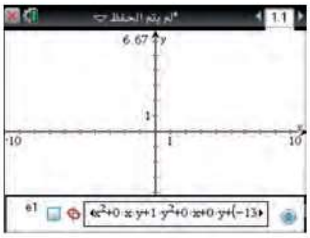
نشاط 1 حل نظام معادلات غير خطية بيانيًا

حلّ نظام المعادلات الآتي بيانيًا:

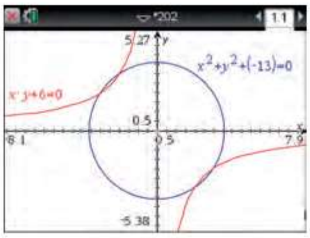
$$x^2 + y^2 = 13$$

$$xy + 6 = 0$$

لحل المعادلتين بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية TI–nspire نقوم بالخطوات التالية:



الخطوة 1: مثل المعادلتين بيانيًا.

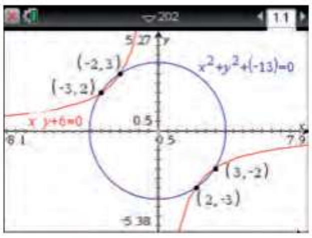


- اضغط على المفاتيح:

menu esc on ثم اختيار 3: إدخال/ تحرير الرسم البياني
2: معادلة 6: القطوع المخروطية
1: $a\cdot x^2+b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+d\cdot x+e\cdot y+f=0$

- اكتب المعادلة ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الأولى.
- اضغط tab واكتب المعادلة الثانية ثم اضغط enter سيظهر التمثيل البياني للمعادلة الثانية.

الخطوة 2: إيجاد نقاط التقاطع.



- استعمل ميزة **نقاط التقاطع** لإيجاد الحلول بالضغط على menu ثم اختيار 6: تحليل الرسم البياني ثم 4: نقاط التقاطع واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقطة من نقاط التقاطع، ستظهر الأزواج المرتبة الممثلة لنقاط التقاطع الأربع؛

أي أن الحلول هي: $(-3, 2), (-2, 3), (2, -3), (3, -2)$

تمارين:

حلّ كل نظام معادلات فيما يأتي بيانيًا مقرّبًا إلى أقرب جزء من عشرة:

1) $xy = 2$، $x^2 - y^2 = 3$

2) $49 = y^2 + x^2$، $x = 1$

3) $x = 2 + y$، $x^2 + y^2 = 100$

4) $25 - 4x^2 = y^2$، $2x + y + 1 = 0$

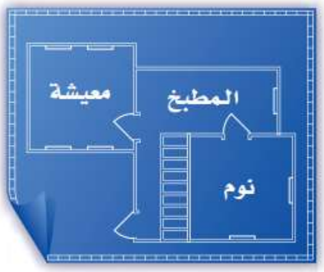
5) $y^2 = 9 - 3x^2$، $x^2 = 10 - 2y^2$

6) $y = -1 - x$، $4 + x = (y - 1)^2$

7) **تحدٍّ:** يحتوي جناح في منزل على غرفتين مربعتين؛ غرفة معيشة وغرفة نوم، والمساحة الكلية للغرفتين هي $468\,ft^2$، ومساحة غرفة النوم أصغر من مساحة غرفة المعيشة بمقدار $180\,ft^2$.

a) اكتب نظامًا من معادلات تربيعية يمثل معطيات هذا الموقف.

b) مثّل نظام المعادلات بيانيًا، وقدّر طول كل غرفة.



كذلك يمكنك حل أنظمة المتباينات غير الخطية باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire، وقد مرّ معك في صفٍّ سابقٍ أنه يمكنك تمثيل المتباينات غير الخطية بيانيًّا، وذلك بكتابة كل متباينة بدلالة y.

نشـاط 2 حل نظام متباينات غير خطية

حلّ نظام المتباينات الآتي بيانيًّا:

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

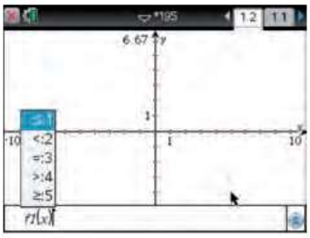
الخطوة 1: اكتب كل متباينة بدلالة y .

$$y > x^2,\ y \le \sqrt{36 - x^2},\ y \ge -\sqrt{36 - x^2}$$

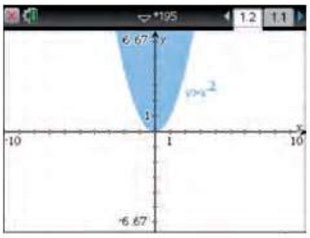
الخطوة 2: افتح الحاسبة بالضغط على on .

اختر من الشاشة الظاهرة 1 مستند جديد

ثم اختر من الشاشة الظاهرة 2: إضافة تطبيق الرسوم البيانية



الخطوة 3: اكتب المتباينة الأولى $y > x^2$ ، وذلك بالضغط على مفتاح del ، ثم اختر رمز التباين > مستعملًا الأسهم، فتظهر $y >$ ، أكمل كتابة المتباينة، ثم اضغط enter .

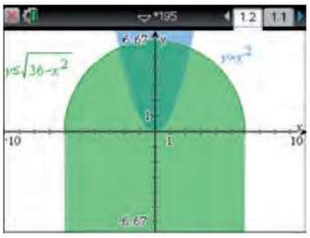


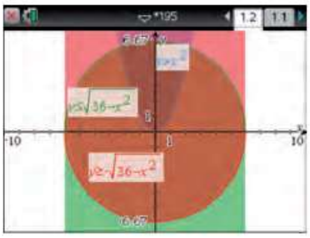
الخطوة 4: اكتب المتباينة الثانية $y \le \sqrt{36 - x^2}$ بالضغط على المفتاح tab ثم المفتاح del ، ثم اختر رمز التباين ≤ مستعملًا الأسهم، ستظهر $y \le$، أكمل كتابة المتباينة ثم اضغط enter ثم اضغط على المفتاح tab وتمثيل المتباينة $y \ge -\sqrt{36 - x^2}$ ، ستكون منطقة الحل هي منطقة التظليل المشترك.

أي قم بالضغط على المفاتيح:

tab enter $36 - x^2$ x^2 ctrl ≤ del tab enter x^2 > del

enter $36 - x^2$ x^2 ctrl − ≥ del





لاحظ نمط التظليل فوق $y = x^2$ ، وتحت $y = \sqrt{36 - x^2}$.

إن منطقة الحل هي المنطقة الناتجة عن تقاطع أنماط التظليل، وهي المنطقة التي تحوي النقاط التي تحقق النظام جميعها.

$$x^2 + y^2 \le 36$$
$$y - x^2 > 0$$

تمارين:

حُلَّ كل نظام متباينات فيما يأتي بيانيًّا:

8) $2y^2 \le 32 - 2x^2$ ، $x + 4 \ge y^2$

9) $y + 5 \ge x^2$ ، $9y^2 \le 36 + x^2$

10) $x^2 + 4y^2 \le 32$ ، $4x^2 + y^2 \le 32$

إرشاد تقني

تدريج المحاور

يمتد تدريج الحاسبة التلقائي على محور y بين $(-6.67, 6.67)$ ، ولكي يتضمن التمثيل البياني للمعادلة $f2(x)$ القيمة $f2(x) = 7$، قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختيار 4: تكبير/تصغير النافذة ثم اختيار 1: إعدادات النافذة

وليمتد تدريج المتغير y ليتضمن العدد 7 ، يمكن اختيار قيمة القيمة العظمى لـ Y: 10

إرشاد تقني

لون التظليل

يمكن تغيير لون التظليل الذي يمثل منطقة حل المتباينة بالضغط على menu ctrl ، ثم اختيار B: اللون ومنها 1: لون السطر أو 2: لون التعبئة أو كلاهما، وذلك حتى يكون لون منطقة الحل مميزًا عن لون تظليل كل متباينة من نظام المتباينات.

الوحدة 2

دليل الدراسة و المراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

القطوع المكافئة (الدرس 1-2)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأس	البؤرة
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$	أفقي	(h, k)	$(h+p, k)$
$(x-h)^2 = 4p(y-k)$	رأسي	(h, k)	$(h, k+p)$

- تحدد قيمة p موقع البؤرة.

القطوع الناقصة والدوائر (الدرس 2-2)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور الأكبر رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الناقص هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 - b^2 = c^2$.
- الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها (h, k) ونصف قطرها r هي $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.

القطوع الزائدة (الدرس 3-2)

المعادلة في الصورة القياسية	الاتجاه	الرأسان	البؤرتان
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع أفقي	$(h \pm a, k)$	$(h \pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	المحور القاطع رأسي	$(h, k \pm a)$	$(h, k \pm c)$

- صيغة الاختلاف المركزي للقطع الزائد هي $e = \frac{c}{a}$ ، حيث: $a^2 + b^2 = c^2$.

تحديد أنواع القطوع المخروطية (الدرس 4-2)

- يمكن تحديد أنواع القطوع المخروطية بكتابة معادلاتها العامة بالصورة القياسية إن أمكن، أو باستعمال المميز.

المفردات

القطع المخروطي ص 46	المركز ص 54
المحل الهندسي ص 46	المحور الأصغر ص 54
القطع المكافئ ص 46	الرأسان ص 54
البؤرة ص 46	الرأسان المرافقان ص 54
الدليل ص 46	الاختلاف المركزي ص 57
محور التماثل ص 46	القطع الزائد ص 63
الرأس ص 46	المحور القاطع ص 63
الوتر البؤري ص 46	المحور المرافق ص 63
القطع الناقص ص 54	البؤرتان ص 63
البؤرتان ص 54	المركز ص 63
المحور الأكبر ص 54	الرأسان ص 63

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة أعلاه لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) ______ هو الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروطين دائريين قائمين متقابلين بالرأس كليهما أو أحدهما، بحيث لا يمر المستوى بالرأس.

2) الدائرة هي ______ للنقاط في المستوى التي تبعد المسافة نفسها عن نقطة معطاة.

3) يكون ______ القطع المكافئ عموديًا على محور تماثله.

4) يقع الرأسان المرافقان في ______ على محوره الأصغر، بينما يقع الرأسان على محوره الأكبر.

5) مجموع بعدي نقطة واقعة على منحنى القطع الناقص عن ______ يساوي مقدارًا ثابتًا.

6) ______ للقطع الناقص هو نسبة تحدِّد ما إذا كان شكل منحناه متسعًا أو دائريًّا، ويمكن إيجاده باستعمال النسبة $\frac{c}{a}$.

7) ______ الدائرة هو نقطة تبعد عنها جميع نقاط الدائرة بعدًا ثابتًا.

8) كما يوجد للقطع الناقص رأسان وبؤرتان فإن لِـ ______ الشيء نفسه، لكن له خطي تقارب، ومنحناه مكوّن من جزئين.

مراجعة الدروس

2-1 القطوع المكافئة (الصفحات 53 - 46)

حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

9) $(x+3)^2 = 12(y+2)$

10) $(x-2)^2 = -4(y+1)$

11) $(x-5) = \frac{1}{12}(y-3)^2$

اكتب معادلة القطع المكافئ المعطاة إحداثيات رأسه وبؤرته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

12) $F(1, 1), V(1, 5)$

13) $F(-3, 6), V(7, 6)$

14) $F(-2, -3), V(-2, 1)$

15) $F(3, -4), V(3, -2)$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

16) $F(-4, -4)$ والمنحنى المفتوح إلى اليسار ويمر بالنقطة $(-7, 0)$

17) $F(-1, 4)$ والمنحنى المفتوح إلى أسفل ويمر بالنقطة $(7, -2)$

18) $F(3, -6)$ والمنحنى المفتوح إلى أعلى ويمر بالنقطة $(9, 2)$

مثال 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(2, 1)$ ورأسه $(2, -3)$، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

بما أن البؤرة والرأس يشتركان في الإحداثي x، فإن المنحنى رأسي. البؤرة هي $(h, k+p)$، لذلك فإن قيمة p هي $4 = (-3) - 1$. وبما أن p قيمة موجبة، فإن المنحنى مفتوح إلى أعلى.

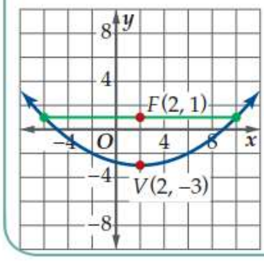
اكتب معادلة القطع المكافئ على الصورة القياسية باستعمال القيم h, p, k.

$4p(y-k) = (x-h)^2$ الصورة القياسية

$4(4)(y+3) = (x-2)^2$ $\quad p = 4, k = 3, h = 2$

$16(y+3) = (x-2)^2$ بسّط

الصورة القياسية للمعادلة هي: $(x-2)^2 = 16(y+3)$. مثّل بيانيًّا كلًّا من الرأس والبؤرة والوتر البؤري، ثم ارسم منحنى يمر بالرأس، ويمتد مارًّا بكلا طرفي الوتر البؤري.



2-2 القطوع الناقصة والدوائر (الصفحات 61 - 54)

حدد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍ مما يأتي، ثم مثّل منحناه بيانيًّا.

19) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

20) $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

21) الرأسان $(3, -3), (-7, -3)$، والبؤرتان $(4, -3), (6, -3)$

22) البؤرتان $(9, 2), (1, 2)$، وطول المحور الأصغر يساوي 6 وحدات.

23) إحداثيات نهايتي المحور الأكبر $(6, 4), (-4, 4)$ و إحداثيات نهايتي المحور الأصغر $(1, 7), (1, 1)$

أوجد معادلة كل دائرة من الدوائر في الحالات الآتية:

24) المركز $(-1, 6)$، وطول نصف القطر 3 وحدات.

25) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(0, 0), (5, 2)$

26) إحداثيات نهايتي القطر عند النقطتين $(-6, -2), (-2, 4)$

مثال 2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي إحداثيات نهايتي محوره الأكبر $(11, 4), (-9, 4)$ و إحداثيات نهايتي محوره الأصغر $(1, -4), (1, 12)$.

استعمل نهايات المحورين الأكبر والأصغر لتحديد a, b.

نصف طول المحور الأكبر: $a = \frac{11-(-9)}{2} = 10$

نصف طول المحور الأصغر: $b = \frac{12-(-4)}{2} = 8$

مركز القطع الناقص هو نقطة منتصف المحور الأكبر.

$(h, k) = \left(\frac{11+(-9)}{2}, \frac{12+(-4)}{2}\right)$ قانون نقطة المنتصف

$= (1, 4)$ بسّط

الإحداثيان y لنقطتي نهايتي المحور الأكبر متساويان؛ لذلك فإن المحور الأكبر أفقي، وقيمة a مرتبطة بالمتغير x. لذا فإن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

2-3 القطوع الزائدة (الصفحات 71 - 63)

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كل مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

27) $\frac{(y+3)^2}{30} - \frac{(x-6)^2}{8} = 1$

28) $\frac{(x+7)^2}{18} - \frac{(y-6)^2}{36} = 1$

29) $\frac{(y-1)^2}{4} - (x+1)^2 = 1$

30) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

31) الرأسان $(-7, 0)$ ، $(7, 0)$ ، طول المحور المرافق 8.

32) البؤرتان $(0, -5)$ ، $(0, 5)$ ، والرأسان $(0, -3)$ ، $(0, 3)$.

33) البؤرتان $(1, -5)$ ، $(1, 15)$ ، وطول المحور القاطع 16.

34) الرأسان $(-2, 0)$ ، $(2, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$.

مثال 3

مثّل معادلة القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(y+3)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$ بيانيًّا.

في هذه المعادلة: $h = -1, k = -3, a = \sqrt{16} = 4,$
$b = \sqrt{4} = 2, c = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

حدّد خصائص القطع الزائد.

الاتجاه: راسي

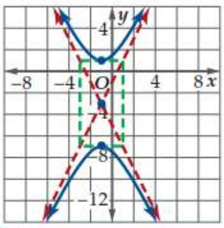
المركز: $(-1, -3)$ $\quad (h, k)$

الرأسان: $(-1, 1), (-1, -7)$ $\quad (h, k \pm a)$

البؤرتان: $(-1, -3 + 2\sqrt{5})$ $\quad (h, k \pm c)$
$(-1, -3 - 2\sqrt{5})$

خطا التقارب: $y + 3 = 2(x + 1)$ $\quad y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$
وَ $y + 3 = -2(x + 1)$

عيِّن المركز والرأسين والبؤرتين وخطي التقارب، ثم ارسم المستطيل الذي قطراه محمولان على خطي التقارب، ثم مثِّل القطع الزائد بيانيًّا بحيث يمس جانبي المستطيل عند رأسيه ويكون محصورًا بين امتداد قطريه.



2-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية (الصفحات 74 - 72)

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

35) $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 11 = 0$

36) $4y^2 - x - 40y + 107 = 0$

37) $9x^2 + 4y^2 + 162x + 8y + 732 = 0$

مثال 4

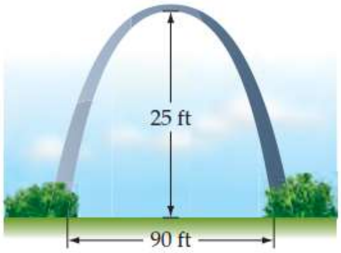
اكتب المعادلة $3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$ على الصورة القياسية، ثم حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله.

$$3x^2 + 3y^2 - 12x + 30y + 39 = 0$$
$$3(x^2 - 4x + \blacksquare) + 3(y^2 + 10y + \blacksquare) = -39 + 3(\blacksquare) + 3(\blacksquare)$$
$$3(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 10y + 25) = -39 + 3(4) + 3(25)$$
$$3(x-2)^2 + 3(y+5)^2 = 48$$
$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$$

بما أن المعادلة على الصورة $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ فإنها معادلة دائرة مركزها $(2, -5)$.

تطبيقات ومسائل

38) أقواس: يوضح الشكل المجاور قوسًا على شكل قطع مكافيء مقامًا عند بوابة متنزّه. (الدرس 2-1)



a) اكتب معادلة القطع المكافئ التي يمكن أن يمثّلها هذا القوس بصورة تقريبية.

b) أوجد موقع بؤرة هذا القطع المكافئ.

39) حركة الماء: أحدث سقوط حجر في بركة ماء تموّجات على شكل دوائر متسعة متحدة المركز. افترض أن أنصاف أقطار هذه الدوائر تزداد بمعدل 3 بوصات في الثانية. (الدرس 2-2)

a) اكتب معادلة الدائرة المتشكّلة بعد 10 ثوانٍ من سقوط الحجر في البركة، مفترضًا أن نقطة سقوط الحجر هي نقطة الأصل.

b) معادلة إحدى الدوائر الموجية هي $x^2 + y^2 = 225$.
بعد كم ثانية من سقوط الحجر في البركة تكونت هذه الدائرة؟

40) طاقة: تكون أبراج تبريد محطات توليد الطاقة على شكل مجسّم ناشئ عن دوران قطع زائد، والمقطع العرضي لهذا المجسّم هو قطع زائد. (الدرس 2-3)

a) اكتب معادلة المقطع العرضي لبرج ارتفاعه 50 ft، وعرضه عند أضيق نقطة 30 ft.

b) إذا زادت نسبة ارتفاع البرج إلى عرضه عند أضيق نقطة، فكيف تتأثر معادلة المقطع العرضي له؟

41) ضوء: ينعكس ضوء مصباح على حائط مشكّلًا قطعًا مخروطيًا. افترض أن معادلة القطع هي $3y^2 - 2y - 4x^2 + 2x - 8 = 0$.
حدّد نوع القطع. (الدرس 2-4)

اختبار الوحدة

اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقِّق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

1) الرأسان $(-3, -4)$, $(7, -4)$ ، والبؤرتان $(-2, -4)$, $(6, -4)$.

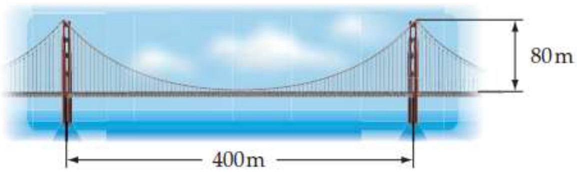
2) البؤرتان $(-2, 1)$, $(-2, -9)$ ، وطول المحور الأكبر 12.

3) **اختيار من متعدد:** ما قيمة c التي تجعل منحنى المعادلة $4x^2 + cy^2 + 2x - 2y - 18 = 0$ دائرةً؟

A -8 **C** 4

B -4 **D** 8

4) **جسور:** يمثِّل الشكل أدناه جسرًا معلقًا ، تظهر أسلاكه على شكل قطوع مكافئة .



افترض أن أدنى نقطة لحزمة الأسلاك تقع على ارتفاع 5m عن سطح الطريق، وأن البؤرة ترتفع عن الرأس مسافة 373m تقريبًا . اكتب معادلة القطع المكافئ.

اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين الآتيين:

5) الرأسان $(-3, 0)$, $(3, 0)$ ، وخطا التقارب $y = \pm\frac{2}{3}x$.

6) البؤرتان $(8, 8)$, $(8, 0)$ ، والرأسان $(8, 6)$, $(8, 2)$

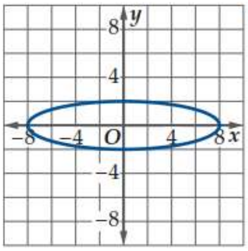
مثِّل بيانيًّا منحنى القطع الزائد المعطاة معادلته في السؤالين 7 وَ 8:

7) $\frac{x^2}{64} - \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

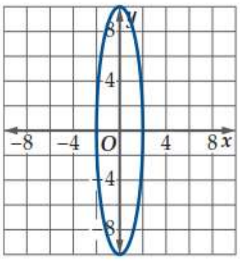
8) $\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x+6)^2}{36} = 1$

9) **اختيار من متعدد:** أيّ قطع ناقص مما يأتي له أكبر اختلاف مركزي؟

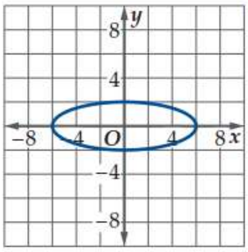
A



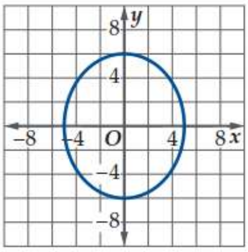
C



B



D



مستعملًا البؤرة F والرأس V، اكتب معادلة كل من القطعين المكافئين الآتيين، ثم مثِّل منحنييهما بيانيًّا.

10) $F(2, 8)$, $V(2, 10)$

11) $F(2, 5)$, $V(-1, 5)$

مثِّل منحنى القطع الناقص المعطاة معادلته في كل من السؤالين الآتيين:

12) $\frac{(x-5)^2}{49} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

13) $(x+3)^2 + \frac{(y+6)^2}{81} = 1$

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	الضرب	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ أو $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	الدائرة	$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ أو $x^2 + y^2 = r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$	$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$	$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ $\cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\cot(-\theta) = -\cot\theta$	$\cos(-\theta) = \cos\theta$ $\sec(-\theta) = \sec\theta$	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\csc(-\theta) = -\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ $\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$		$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الهندسة الإحداثية

المسافة	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	نقطة المنتصف	$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$
الميل	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_2 \neq x_1$		

كثيرات الحدود

القانون العام	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, a \neq 0$	مربع الفرق	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
مربع المجموع	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	الفرق بين مربعين	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

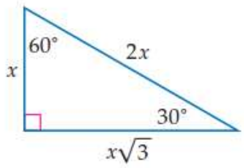
الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

$30°-60°-90°$

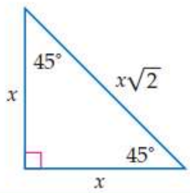
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad\tan 60° = \sqrt{3}$



$45°-45°-90°$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad\tan 45° = 1$

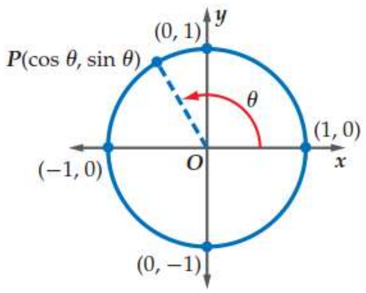


دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$،

فإن $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$. أي أن: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل