مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التعليم أولاً

الرياضيات

المستوى الثالث - الفصلان الدراسيان (2,3)

Obeikan العبيكان
McGraw Hill Education
١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧ م
طبعة تجريبية

Original Title:

Precalculus
Algebra 2

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

الرياضيات - المستوى الثالث

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

العبيكان Obeikan

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومتنا الرشيدة بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان التوجه نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز كتب الرياضيات بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف إستراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الوحدة 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 2 القطوع المخروطية

الوحدة 3 المتجهات

الفهرس

الوحدة 4 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة 5 النهايات والاشتقاق

الوحدة

3

المتجهات
Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات لحل المثلث .

والآن:

- أُجري العمليات على المتجهات ، وأمثلها في الأنظمة الإحداثية، الثنائية والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ مسقط متجه على متجه آخَر.
- أكتب متجهًا باستعمال متجهَي الوحدة.
- أجِدُ الضرب الداخلي، والزاوية بين متجهين في الأنظمة الإحداثية الثنائية، والثلاثية الأبعاد.
- أجِدُ الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء ، وأستعملُ الضرب القياسي الثلاثي؛ لإيجاد حجوم متوازيات السطوح.

لماذا؟

رياضة : تستعمل المتجهات لنمذجة مواقف حياتية، فمثلًا يمكن استعمالها لتحديد محصلة سرعة واتجاه حركة رمح رماه لاعب، إذا ركض إلى الأمام بسرعة 6m/s ، ورمى الرمح بسرعة 30m/s ، وبزاوية مقدارها 40° مع الأفقي.

قراءة سابقة : اقرأ عناوين الدروس والمفردات الأساسية في هذه الوحدة، واستعملها للتنبؤ بما ستتعلّمه في هذه الوحدة .

التهيئة للوحدة 3

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية، ثم أوجد إحداثيَّي نقطةٍ منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بينهما.

1) $(1, 4), (-2, 4)$

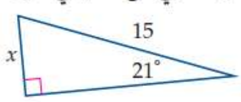
2) $(-5, 3), (-5, 8)$

3) $(2, -9), (-3, -7)$

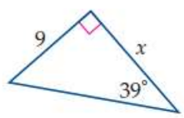
4) $(-4, -1), (-6, -8)$

أوجد قيمة x في كلٍّ مما يأتي مقرَّبًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

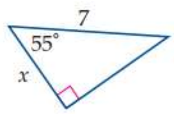
5)



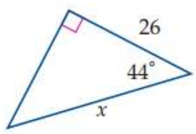
6)



7)



8)



9) **بالون:** أُطلق بالون يحتوي على هواء ساخنٍ في الفضاء. إذا كان البالون مربوطًا بحبلين مشدودين يمسك بكلٍّ منهما شخص يقف على سطح الأرض، والمسافة بين الشخصين 35 ft، بحيث كان قياس الزاوية بين كلٍّ من الحبلين والأرض $40°$، فأوجد طول كلٍّ من الحبلين إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

مراجعة المفردات

صيغة المسافة في المستوى الإحداثي (Distance Formula in The Coordinate Plane)

المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ هي:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

صيغة إحداثيَّي منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي (Midpoint Formula in The Coordinate Plane)

إذا كان $A(x_1 , y_1)$، $B(x_2 , y_2)$ ، فإن إحداثيَّي نقطةِ منتصف $\overline{AB}$:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

النسبة المثلثية (Trigonometric Ratio)

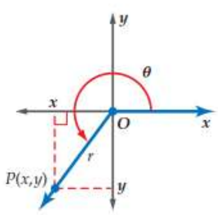
نسبة تقارن بين طولَي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الزاوية المرسومة في الوضع القياسي (Angle in Standard Position)

تكون الزاوية المرسومة في المستوى الإحداثي في الوضع القياسي إذا كان رأسها نقطة الأصل وأحد ضلعيها منطبق على الجزء الموجب من المحور x

الدوال المثلثية للزوايا (Trigonometric Functions of Angels)

لتكن θ زاويةً مرسومةً في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$، وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:



$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, x \neq 0 \qquad \csc\theta = \frac{r}{y}, y \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, x \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}, y \neq 0$$

3-1

مقدمة في المتجهات
Introduction to Vectors

فيما سبق:

درست استعمال حساب المثلثات في حل المثلث.

والآن:

- أجري العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم، وأمثّلها هندسيًا .
- أحلل المتجه إلى مركبتَيه المتعامدتين.
- أحلّ مسائل تطبيقية على المتجهات.

المفردات:

كمية قياسية (عددية) solar quantity
الكمية المتجهة vector quantity
متجه vector
نقطة البداية initial point
نقطة النهاية terminal point
قطعة مستقيمة متجهة directed line segment
الوضع القياسي standard position
اتجاه المتجه direction
طول المتجه (المقدار) magnitude
الاتجاه الربعي quadrant bearing
الاتجاه الحقيقي true bearing
المتجهات المتوازية parallel vectors
المتجهات المتساوية equal vectors
معكوس المتجه opposite vector
المحصلة resultant
قاعدة المثلث triangle method
قاعدة متوازي الأضلاع parallelogram method
المتجه الصفري zero vector
المركبات components
المركبات المتعامدة rectangular components

لماذا؟

المحاولة الناجحة لتسجيل هدف في كرة القدم تعتمد على عدة عوامل؛ منها سرعة الكرة بعد ضربها، واتجاه حركتها. ويمكنك وصف كلٍّ من هذين العاملين باستعمال كمية واحدة تُسمى متجهًا.

الكميات القياسية والكميات المتجهة يمكن وصف الكثير من الكميات الفيزيائية مثل الكتلة بقيمة عددية واحدة، وعندئذٍ تُسمى **كمية قياسية (عددية)**، ويدل هذا العدد على مقدار الكمية أو قياسها. أما **الكمية المتجهة** فهي كمية لها مقدار واتجاه؛ فمثلًا سرعة الكرة المتجهة نحو المرمى جنوبًا تمثل كلًا من: مقدار سرعة الكرة، واتجاه حركتها.

مثال 1 تحديد الكميات المتجهة

حدّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

a) يسير قارب بسرعة 15 mi/h في اتجاه الجنوب الغربي.

بما أن لهذه الكمية اتجاهًا، إذن هي كميةٌ متجهةٌ.

b) يسير شخص على قدميه بسرعة 75 m/min جهة الغرب.

بما أن لسرعة الشخص قيمة هي 75 m/min ، واتجاهًا للغرب؛ لذا فهي كمية متجهة.

c) قطعت سيارة مسافة قدرها 20 km .

بما أن لهذه الكمية قيمة وهي 20 km ، وليس لها اتجاه؛ إذن هذه المسافة كمية قياسية.

تحقق من فهمك

حدّد الكميات المتجهة ، والكميات القياسية (العددية) في كلٍّ مما يأتي:

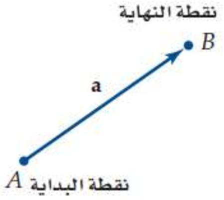
1A) تسير سيارة بسرعة 60 mi / h ، وبزاوية °15 جهة الجنوب الشرقي.

1B) هبوط مظلّي رأسيًا إلى أسفل بسرعة 12.5 mi / h .

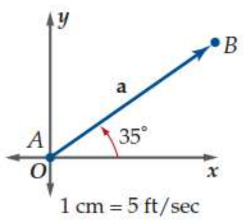
1C) طول قطعةٍ مستقيمةٍ 5 cm .

المتجهات:

يمكن تمثيل الكمية المتجِهة بسهم يُظهر كلًّا من المقدار والاتجاه ويسمى هذا التمثيل **متجهًا**. ويمثِّل الشكل المجاور المتجه الذي له **نقطة البداية** A، **ونقطة النهاية** B. ويرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{AB}$ أو $\vec{a}$ أو **a** .

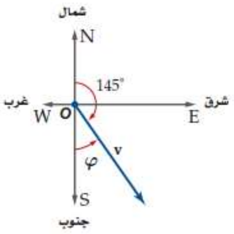


أما **طول المتجه** فهو مقدار المتجه ويمثله طول القطعة المستقيمة، ويتناسب مع مقدار الكمية المتجِهة، ففي الشكل المجاور، إذا كان مقياس الرسم هو $1\ cm = 5\ ft/s$، فإن طول المتجه **a** ، ويُرمز له بالرمز $|\mathbf{a}|$ ، يساوي 5×2.6 أو $13\ ft/s$.



يكون المتجه في **الوضع القياسي**. إذا كانت نقطة بداية المتجه هي نقطة الأصل ويعبّر عن **اتجاه المتجه** بالزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الأفقي (الاتجاه الموجب للمحور x). فمثلًا: اتجاه المتجه **a** هو °35 .

ويمكن التعبير عن اتجاه المتجه أيضًا باستعمال زاوية **الاتجاه الربعي** φ ، وتُقرأ فاي، وهي زاوية قياسها بين $0°$ و $90°$ شرق أو غرب الخط الرأسي (خط شمال – جنوب). فمثلًا زاوية الاتجاه الربعي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $35°$ جنوب شرق، وتُكتب $S\ 35°\ E$.



كما يمكن استعمال زاوية **الاتجاه الحقيقي** ، حيث تُقاس الزاوية مع عقارب الساعة بدءًا من الشمال. ويُقاس الاتجاه الحقيقي بثلاثة أرقام، فمثلًا يُكتب الاتجاه الذي يحدّد زاوية قياسها $25°$ من الشمال مع عقارب الساعة باستعمال الاتجاه الحقيقي على الصورة $025°$.

إرشادات للدراسة

زاوية الاتجاه الحقيقي

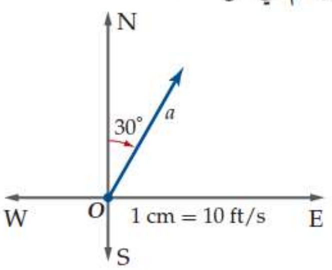
إذا أُعطي قياس زاوية بثلاثة أرقام، ولم تعطَ أي مركبات اتجاهية إضافية، فإنها زاوية اتجاه حقيقي. فمثلًا زاوية الاتجاه الحقيقي للمتجه **v** في الشكل المجاور هي $145°$.

مثال 2 تمثيل المتجه هندسيًا

استعمل مسطرةً ومنقلةً؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

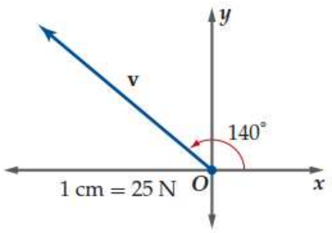
a) $\mathbf{a} = 20\ ft/s$ **باتجاه** $030°$.

استعمل مقياس الرسم $1\,cm = 10\ ft/s$ ، وارسم سهمًا طوله $10 \div 20$ ، أو $2\,cm$ بزاوية قياسها $30°$ من الشمال، وفي اتجاه عقارب الساعة.



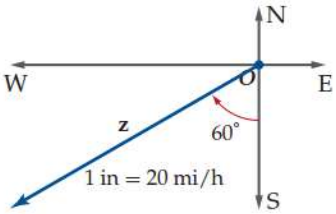
b) $\mathbf{v} = 75\,N$ **، بزاوية قياسها** $140°$ **مع الاتجاه الأفقي.**

استعمل مقياس الرسم $1\ cm = 25\ N$ ، وارسم سهمًا طوله $25 \div 75$ ، أو $3\,cm$ في الوضع القياسي، وبزاويةٍ قياسها $140°$ مع الاتجاه الموجب للمحور x .



c) $\mathbf{z} = 30\ mi/h$ **، باتجاه** $S\ 60°\ W$.

استعمل مقياس الرسم $1\ in = 20\ mi\ /\ h$ ، وارسم سهمًا طوله $1.5\,in = 20 \div 30$ ، بزاوية قياسها $60°$ في اتجاه جنوب غرب .



إرشادات للدراسة

النيوتن

وحدةٌ لقياس القوة، ويرمز له بالحرف **N**، وهو عبارة عن القوة التي تؤثر في جسم كتلته $1\,kg$؛ لتكسبه تسارعًا مقداره $1\,m/s^2$.

تحقق من فهمك

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، واكتب مقياس الرسم في كل حالة:

2A) $\mathbf{t} = 20\ ft/s$ ، باتجاه $065°$.

2B) $\mathbf{u} = 15\ mi/h$ ، باتجاه $S\ 25°\ E$.

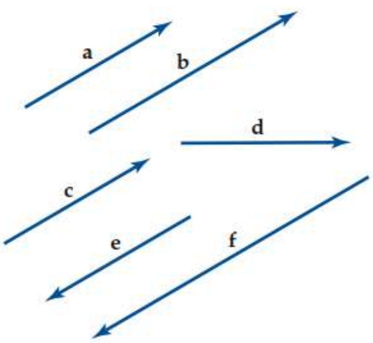
2C) $\mathbf{m} = 60\,N$ ، بزاوية قياسها $80°$ مع الاتجاه الأفقي.

تنبيه!

الطول

يمكن أن يمثل طول المتجه مسافة، أو سرعة، أو قوة. وإذا مثل المتجه سرعة، فإن طوله لا يمثّل المسافة المقطوعة .

عند إجرائك العمليات على المتجهات، فإنك تحتاج إلى الأنواع الشائعة الآتية من المتجهات:



- **المتجهات المتوازية** لها الاتجاه نفسه، أو اتجاهان متعاكسان، وليس بالضرورة أن يكون لها الطول نفسه. فمثلًا في الشكل المجاور $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \parallel \mathbf{c} \parallel \mathbf{e} \parallel \mathbf{f}$.
- **المتجهات المتساوية** لها الاتجاه نفسه، والطول نفسه. ففي الشكل المجاور **a, c** ؛ لهما الطول والاتجاه نفساهما، لذا هما متساويان، ويعبَّر عنه بالرموز: $\mathbf{a} = \mathbf{c}$.
لاحظ أن $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ ؛ لأن $|\mathbf{a}| \neq |\mathbf{b}|$ و $\mathbf{a} \neq \mathbf{d}$ ؛ لأن لهما اتجاهين مختلفين.
- **معكوس المتجه** هو متجه له طول المتجه a ، ولكنه في اتجاه معاكس له، ويكتب على الصورة $-\mathbf{a}$، ففي الشكل المجاور $\mathbf{e} = -\mathbf{a}$.

عند جمع متجهين أو أكثر يكون الناتج متجهًا،و يسمى **المحصّلة**. ويكون لمتجه المحصّلة التأثير نفسه الناتج عن تأثير المتجهين الأصليين عند تطبيقهما واحدًا تلو الآخر. ويمكن إيجاد المحصّلة هندسيًّا باستعمال **قاعدة المثلث**، أو **قاعدة متوازي الأضلاع**.

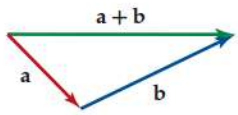
مفهوم أساسي — إيجاد المحصلة

قاعدة المثلث

لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b**، اتّبع الخطوتين الآتيتين:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **a**.

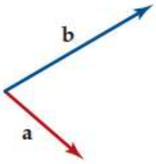
الخطوة 2 محصلة المتجهين **a , b** هي المتجه المرسوم من نقطة بداية **a** إلى نقطة نهاية **b**.



قاعدة متوازي الأضلاع

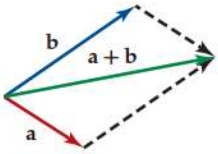
لإيجاد محصّلة المتجهين **a , b**، اتّبع الخطوات الآتية:

الخطوة 1 أجرِ انسحابًا للمتجه **b**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية المتجه **a**.



الخطوة 2 أكمل رسم متوازي الأضلاع الذي ضلعاه **a , b**.

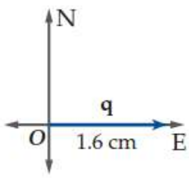
الخطوة 3 محصلة المتجهين هي المتجه الذي يُمثّله قطر متوازي الأضلاع.

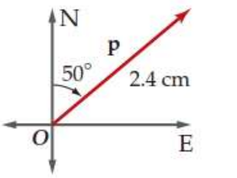


مثال 3 من واقع الحياة — إيجاد محصلة متجهين

رياضة المشي: قطع عبد اللّه في سباق للمشي، مسافة **120 m** باتجاه **N 50° E**، ثم مسافة **80 m** في اتجاه الشرق. كم يبعُد عبد الله عن نقطة البداية، وما هي زاوية الاتجاه الربعي؟

افترض أن المتجه **p** يمثِّل المشي 120 m في الاتجاه N 50° E، وأن المتجه **q** يمثِّل المشي 80 m باتجاه الشرق. ارسم شكلًا يمثِّل **p , q** باستعمال مقياس الرسم 1cm = 50 m.



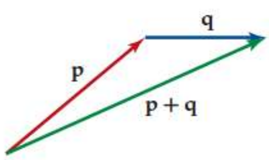


1 cm = 50 m

استعمل مسطرة ومنقلة؛ لرسم سهم طوله $120 \div 50 = 2.4\,cm$؛ ويصنع زاوية قياسها 50° شمال شرق؛ ليُمثّل المتجه **p**، وارسم سهمًا آخر طوله $80 \div 50 = 1.6\,cm$ في اتجاه الشرق؛ ليُمثّل المتجه **q**.

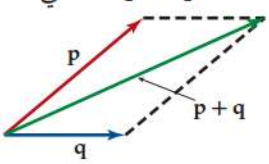
الطريقة 1 قاعدة المثلث

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة نهاية المتجه **p**، ثم ارسم متجه المحصلة **p + q** كما في الشكل أدناه.

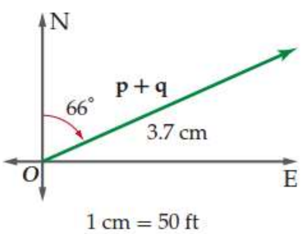


الطريقة 2 قاعدة متوازي الأضلاع

اعمل انسحابًا للمتجه **q**، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **p**، ثم أكمل متوازي الأضلاع، وارسم قطره الذي يمثِّل المحصلة **p + q**، كما في الشكل أدناه.



نحصل في كلتا الطريقتين على متجه المحصلة **p + q** نفسه. قِس طول **p + q** باستعمال المسطرة، ثم قِس الزاوية التي يصنعها هذا المتجه مع الخط الرأسي كما في الشكل المجاور.

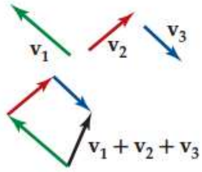


1 cm = 50 ft

تجد أن طول المتجه يساوي 3.7 cm تقريبًا، ويُمثّل $3.7 \times 50 = 185\,m$.
وعليه يكون عبد الله على بُعد 185 m من نقطة البداية باتجاه N 66° E.

إرشادات للدراسة

المحصلة
لإيجاد محصلة أكثر من متجهين باستعمال قاعدة متوازي الأضلاع، يلزم إعادة الرسم أكثر من مرة؛ لذا من الأسهل في هذه الحالة استعمال طريقة مشابهة لقاعدة المثلث، وذلك بوضع نقطة بداية متجه عند نقطة نهاية المتجه الذي يسبقه وهكذا.



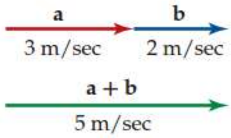
إرشادات للدراسة

انسحاب المتجه
عندما يجري انسحاب لمتجه ما فإن صورته متجه آخر له الطول والاتجاه نفساهما؛ لذا فهما متساويان.

إرشادات للدراسة

المتجهات المتوازية في الاتجاه نفسه

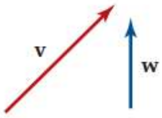
محصّلة متجهين أو أكثر لها الاتجاه نفسه، هو متجه طوله يساوي مجموع أطوال هذه المتجهات، واتجاهه هو اتجاه المتجهات الأصلية نفسه.



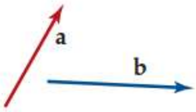
تحقق من فهمك

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع. ثمّ حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي.

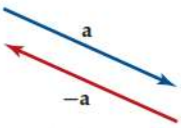
(3A



(3B



3C) لعبة أطفال: رمى طفل كرةً صغيرةً في لعبة مخصصة للأطفال بسرعة $7\,\text{in/s}$ ، باتجاه $310°$ ، فارتدت باتجاه $055°$ ، وبسرعة $4\,\text{in/s}$. أوجد مقدار محصلة حركة الكرة والاتجاه الحقيقي لها.
(قرب طول المحصلة إلى أقرب بوصة، والاتجاه إلى أقرب درجة)



$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0$

عند جمع متجهين متعاكسين لهما الطول نفسه، فإن المحصلة هي **المتجه الصفري**. ويرمز له بالرمز $\vec{0}$ أو $\mathbf{0}$ ، وطوله صفر ، وليس له اتجاه. وعملية طرح المتجهات تشبه عملية طرح الأعداد. لإيجاد $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ ، اجمع معكوس $\mathbf{q}$ إلى $\mathbf{p}$ ؛ أي أن: $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} + (-\mathbf{q})$.

و كذلك يمكن ضرب المتجه في عددٍ حقيقيٍّ.

قراءة الرياضيات

$|k|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

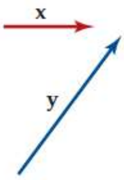
$|\mathbf{v}|$ تمثل طول المتجه $\mathbf{v}$.

مفهوم أساسي — ضرب المتجه في عدد حقيقي

إذا ضُرب المتجه $\mathbf{v}$ في عدد حقيقي k ينتج المتجه $k\mathbf{v}$ الذي يوازي المتجه $\mathbf{v}$، ويكون طول المتجه $k\mathbf{v}$ هو $|k|\,|\mathbf{v}|$. ويتحدّد اتجاهه بإشارة k .

- إذا كانت $k > 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو اتجاه $\mathbf{v}$ نفسه.
- إذا كانت $k < 0$ ، فإن اتجاه $k\mathbf{v}$ هو عكس اتجاه $\mathbf{v}$.

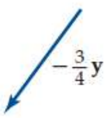
مثال 4 — العمليات على المتجهات



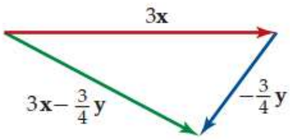
ارسم المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، حيث $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ متجهان كما في الشكل المجاور.

أعد كتابة المتجه $3\mathbf{x} - \frac{3}{4}\mathbf{y}$ على صورة حاصل جمع متجهين $3\mathbf{x} + \left(-\frac{3}{4}\mathbf{y}\right)$ ، ثم مثِّل المتجه $3\mathbf{x}$ برسم متجه طوله 3 أمثال المتجه $\mathbf{x}$ ، وبالاتجاه نفسه كما في الشكل **3.1.1** .
ولتمثيل المتجه $-\frac{3}{4}\mathbf{y}$ ، ارسم متجهًا طوله $\frac{3}{4}$ طول $\mathbf{y}$ ، وفي اتجاه معاكس لاتجاه $\mathbf{y}$ كما في الشكل **3.1.2** ، ثم استعمل قاعدة المثلث؛ لرسم متجه المحصلة كما في الشكل **3.1.3** .

الشكل 3.1.1



الشكل 3.1.2

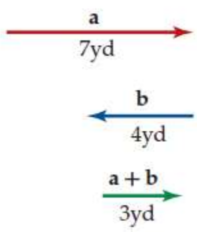


الشكل 3.1.3

إرشادات للدراسة

المتجهان المتوازيان المتعاكسان

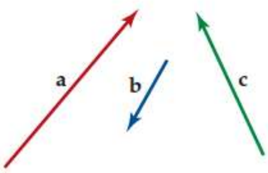
محصلة متجهين متوازيين متعاكسين، هو متجه طوله يساوي القيمة المطلقة للفرق بين طولي المتجهين، واتجاهه هو اتجاه المتجه الأكبر طولًا.



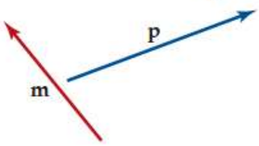
تحقق من فهمك

ارسم المتجه الذي يُمثّل كلًّا مما يأتي :

(4A $\mathbf{a} - \mathbf{c} + 2\mathbf{b}$



(4B $\mathbf{m} - \frac{1}{4}\mathbf{p}$



تطبيقات المتجهات: يُسمى المتجهان اللّذان ناتج جمعهما المتجه **r** ، **مركبتي r** . ومع أن مركبتي المتجه يمكن أن تكونا في أي اتجاه، إلا أنه من المفيد غالبًا تحليل المتجه إلى **مركبتين متعامدتين**، واحدة أفقية، والأخرى رأسية. ففي الشكل المجاور، يمكن اعتبار القوة **r** المبذولة لسحب العربة بصفتها مجموع مركبتين هما أفقية **x** تحرك العربة إلى الأمام، ورأسية **y** تسحب العربة إلى أعلى.

الربط مع الحياة

يتطلب الضغط على مفتاح الكهرباء، لإشعال الضوء قوة مقدارها 3 N . والقوة التي تؤثر بها الجاذبية الأرضية في الشخص تعادل 600 N تقريبًا. والقوة المبذولة من لاعب رفع أثقال تساوي 2000 N تقريبًا .

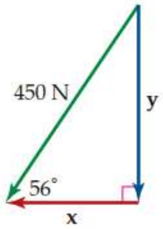
المصدر: Contemporary College Physics

مثال 5 من واقع الحياة — تحليل القوة إلى مركبتين متعامدتين

قص العشب: يدفع علي عربة قصّ العشب بقوة مقدارها 450 N ، وبزاويةٍ قياسها $56°$ مع الأفقي (سطح الأرض).

a) ارسم شكلًا يوضّح تحليل القوة التي يبذلها علي إلى مركبتين متعامدتين.

يمكن تحليل قوة الدفع إلى مركبتين؛ أفقية **x** إلى الأمام ورأسية **y** إلى أسفل كما في الشكل أدناه.



b) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين؛ الأفقية والرأسية للقوة.

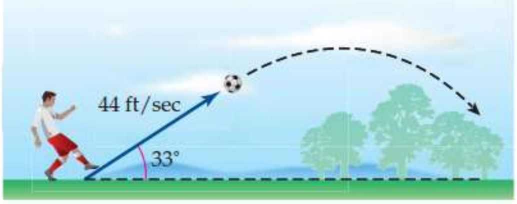
تكوّن كلٌّ من القوة ومركبتاها الأفقية والرأسية مثلثًا قائمَ الزاوية. استعمل تعريف الجيب، أو جيب التمام؛ لإيجاد مقدار كل قوة منهما.

$\cos 56° = \frac{\|x\|}{450}$	تعريف الجيب، وجيب التمام	$\sin 56° = \frac{\|y\|}{450}$
$\|x\| = 450 \cos 56°$	حُل بالنسبة إلى $\|x\|$ ، $\|y\|$	$\|y\| = 450 \sin 56°$
$\|x\| \approx 252$	استعمل الآلة الحاسبة	$\|y\| \approx 373$

مقدار المركبة الأفقية 252 N تقريبًا، ومقدار المركبة الرأسية 373 N تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **كرة قدم:** يركل لاعبٌ كرةَ قدمٍ من سطح الأرض بسرعةٍ مقدارها 44 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها $33°$ مع سطح الأرض كما في الشكل أدناه.



A) ارسم شكلًا يوضِّح تحليل هذه السرعة إلى مركبتين متعامدتين.

B) أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية والرأسية للسرعة .

تدرب وحل المسائل

حدِّد الكميات المتجهة والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي: (مثال 1)

1) طول محمد $125\,cm$.

2) مساحة مربع $20\ m^2$.

3) يركض غزال بسرعة $15\ m/s$ باتجاه الغرب.

4) المسافة التي قطعتها كرة قدم $5\ m$.

5) إطار سيارة وزنه $7\,kg$ معلق بحبل.

6) رمي حجر رأسيًا إلى أعلى بسرعة $50\ ft/s$.

استعمل المسطرة والمنقلة؛ لرسم متجه لكلٍّ من الكميات الآتية، ثم اكتب مقياس الرسم في كل حالة. (مثال 2)

7) $\mathbf{h} = 13\ in/s$ ، باتجاه $205°$

8) $\mathbf{g} = 6\ km/h$ ، باتجاه $N\ 70°\ W$

9) $\mathbf{j} = 5\ ft/s$ ، وبزاويةٍ قياسها $300°$ مع الأفقي.

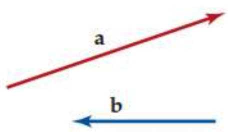
10) $\mathbf{d} = 28\ km$ ، وبزاويةٍ قياسها $35°$ مع الأفقي.

11) $\mathbf{R} = 40\ m$ ، باتجاه $S\ 55°\ E$

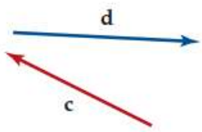
12) $\mathbf{n} = 32\ m/s$ ، باتجاه $030°$

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة: (مثال 3)

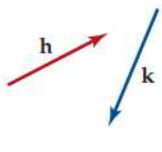
13)



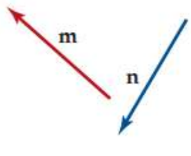
14)



15)



16)



17) ركوب الزوارق: غادر زورق أحد الموانئ باتجاه $N\,60°\,W$ ، فقطع مسافة 12 ميلًا بحريًا، ثم غيّر قائد الزورق اتجاه حركته إلى $N\,25°\,E$ ، فقطع مسافة 15 ميلًا بحريًا. أوجد بُعد الزورق، واتجاه حركته في موقعه الحالي بالنسبة إلى الميناء. (مثال 3)

حدّد مقدار المحصلة الناتجة عن جمع المتجهين، واتجاهها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 3)

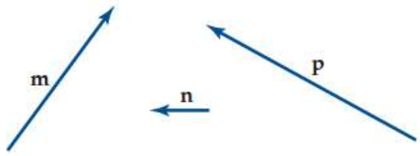
18) $18\,N$ للأمام، ثم $20\,N$ للخلف.

19) $100\,m$ للشمال، ثم $350\,m$ للجنوب .

20) $17\,mi$ شرقًا، ثم $16\,mi$ جنوبًا.

21) $15\,m/s^2$ باتجاه زاوية قياسها $60°$ مع الأفقي، ثم $9.8\ m/s^2$ إلى الأسفل.

استعمل المتجهات الآتية؛ لرسم متجه يمثِّل كل عبارة مما يأتي: (مثال 4)



22) $m - 2n$

23) $4n + \frac{4}{5}p$

24) $p + 2n - 2m$

25) $m - 3n + \frac{1}{4}p$

ارسم شكلًا يوضِّح تحليل كل متجه مما يأتي إلى مركبتَيه المتعامدتين، ثم أوجد مقدار كلٍّ منهما. (مثال 5)

26) $2\frac{1}{8}\ in/s$ ، باتجاه $310°$ مع الأفقي.

27) $1.5\,cm$ ، باتجاه $N\,49°\,E$.

28) $\frac{3}{4}\ in/min$ ، باتجاه $255°$.

(29 **تنظيف:** يدفع حسن عصا مكنسة التنظيف بقوة مقدارها 190 N ، وبزاوية قياسها °33 مع سطح الأرض كما في الشكل المجاور. **(مثال 5)**

(a ارسم شكلًا يوضّح تحليل هذه القوة إلى مركبتيها المتعامدتين.

(b أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية والمركبة الرأسية.

(30 **لعب أطفال:** يدفع محمد عربة أخته بقوة مقدارها 100 N، وباتجاه °31 مع الأفقي، أوجد مقدار المركبة الرأسية للقوة إلى أقرب عدد صحيح.

(31 **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي ضرب متجه في عدد حقيقي.

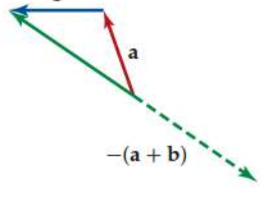
(a **بيانيًا:** ارسم المتجه **a** على المستوى الإحداثي، بحيث تكون نقطة بدايته عند نقطة الأصل. واختر قيمة عددية لِـ k ، ثم ارسم متجهًا ناتجًا عن ضرب k في المتجه الأصلي على المستوى الإحداثي نفسه. وكرّر العملية مع أربعة متجهات أخرى **b, c, d, e** ، واستعمل قيمة k نفسها في كل مرة.

(b **جدوليًا:** انسخ الجدول أدناه في دفترك، ثم اكتب البيانات المناسبة داخله لكل متجه رسمته في الفرع **a**.

المتجه	نقطة النهاية للمتجه	نقطة النهاية للمتجه مضروبًا في العدد k
a		
b		
c		
d		
e		

(c **تحليليًا:** إذا كانت (a, b) نقطة النهاية للمتجه **a** ، فما إحداثيات نقطة النهاية للمتجه k**a** ؟

المتجه الموازن هو متجه يساوي متجه المحصلة في المقدار ويعاكسه في الاتجاه، بحيث إن ناتج جمع متجه المحصلة مع المتجه الموازن يساوي المتجه الصفري، والمتجه الموازن للمتجه $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ هو $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

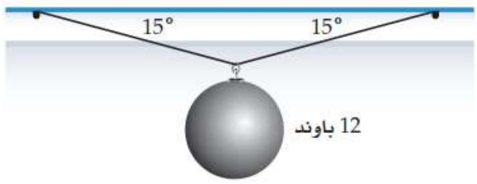


(32 أوجد طول واتجاه المتجه الموازن للمتجهين:

$\mathbf{a} = 15$ mi/h ، باتجاه °125

$\mathbf{b} = 12$ mi/h ، باتجاه °045

(33 **كرة حديدية:** عُلِّقت كرة حديدية بحبلين متساويين في الطول كما في الشكل أدناه.



(a أعد رسم الشكل باستعمال قاعدة المثلث لتجد $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$

(b استعمل الشكل في الفقرة **a** وحقيقة أن محصلة $\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2}$ هي المتجه الموازن لوزن الكرة؛ لحساب مقدار كلٍّ من $\mathbf{T_1}$ ، $\mathbf{T_2}$

أوجد طول كل متجه واتجاهه مما يأتي بمعلومية مركبتَيه الأفقية والرأسية، والمدى الممكن لزاوية كلٍّ منها:

(34 الأفقية 0.32 in ، الرأسية 2.28 in ، $90° < \theta < 180°$.

(35 الأفقية 3.1 ft ، الرأسية 4.2 ft ، $0° < \theta < 90°$.

(36 الأفقية 2.6 cm ، الرأسية 9.7 cm ، $270° < \theta < 360°$.

ارسم ثلاثة متجهات a, b, c ؛ لتوضح صحة كل خاصية من الخصائص الآتية هندسيًّا:

(37 الخاصية الإبدالية $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

(38 الخاصية التجميعية $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

(39 الخاصية التوزيعية $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث $k = 2, 0.5, -2$

مسائل مهارات التفكير العليا

40) **مسألة مفتوحة:** لديك متجه مقداره 5 وحدات بالاتجاه الموجب لمحور x ، حلّل المتجه إلى مركبتين متعامدتين على ألا تكون أيٌّ منهما أفقية أو رأسية.

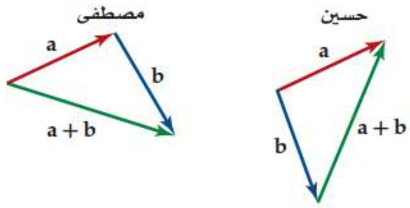
41) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا أو ليست صحيحة أبدًا، وبرِّر إجابتك.
"من الممكن إيجاد مجموع متجهين متوازيين باستعمال طريقة متوازي الأضلاع".

42) **تبرير:** بفرض أن: $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a} + \mathbf{b}|$

a) عبّر عن هذه العبارة بالكلمات .

b) هل هذه العبارة صحيحة أم خاطئة؟ برِّر إجابتك .

43) **اكتشف الخطأ:** حاول كلٌّ من حسين ومصطفى إيجاد محصلة المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



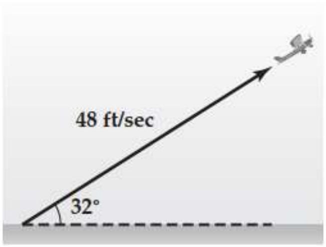
44) **تبرير:** هل من الممكن أن يكون ناتج جمع متجهين مساويًا لأحدهما؟ برِّر إجابتك.

45) **اكتب:** قارن بين قاعدتَي متوازي الأضلاع والمثلث في إيجاد محصلة متجهين.

تدريب على اختبار

46) **نزهة:** قام حسان بنزهة خارج مخيمه الكشفي، فقطع مسافة 3.75 km في اتجاه الشرق من المخيم حتى وصل أحد المساجد، ثم سار شمالًا قاصدًا حديقةً عامةً، فقطع مسافة 5.6 km ، حدّد موقع الحديقة بالنسبة للمخيم؟

47) طارت طائرة لعبة تسير باستعمال جهاز التحكم عن بُعد، بزاوية قياسها $32°$ مع الأفقي، وبسرعة 48 ft/s كما في الشكل أدناه. أيٌّ مما يأتي يُمثّل مقدار المركبتين الأفقية والرأسية لسرعة الطائرة على الترتيب؟



A 25.4 ft/s, 40.7 ft/s

B 40.7 ft/s, 25.4 ft/s

C 56.6 ft/s, 90.6 ft/s

D 90.6 ft/s, 56.6 ft/s

3-2 المتجهات في المستوى الإحداثي
Vectors in the Coordinate Plane

فيما سبق:
درست العمليات على المتجهات باستعمال مقياس الرسم.

والآن:
- أجري العمليات على المتجهات في المستوى الإحداثي، وأمثّلها بيانيًا.
- أكتب المتجه باستعمال متجهَي الوحدة.

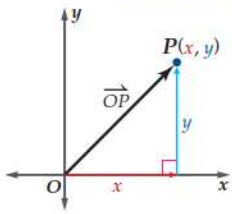
المفردات:
الصورة الإحداثية
component form
متجه الوحدة
unit vector
متجها الوحدة القياسيان
standard unit vectors
توافق خطي
linear combination

لماذا؟

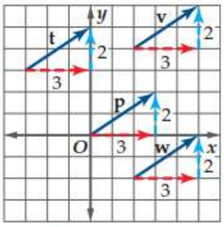
تؤثّر الرياح في سرعة الطائرة واتجاه حركتها؛ لذا يستعمل قائد الطائرة مقاييس مدرّجة؛ لتحديد السرعة والاتجاه الذي يجب على الطائرة السير فيه؛ لمعادلة أثر الرياح، وعادة ما يتم إجراء هذه الحسابات باستعمال المتجهات في المستوى الإحداثي.

المتجهات في المستوى الإحداثي في الدرس 1-3، تعلمت إيجاد طول (مقدار) المحصِّلة واتجاهها لمتجهين أو أكثر هندسيًّا باستعمال مقياس رسم. وبسبب عدم دقة الرسم، فإننا نحتاج إلى طريقة جبرية باستعمال نظام الإحداثيات المتعامدة للمواقف التي تحتاج إلى دقةٍ أكثر، أو التي تكون فيها المتجهات أكثر تعقيدًا.

ويمكن التعبير عن $\overrightarrow{OP}$ في الوضع القياسي في المستوى الإحداثي كما في الشكل 3.2.1 بصورة وحيدة، وذلك بإحداثيَي نقطة نهايته $P(x, y)$. وهذه الصورة هي $\langle x, y\rangle$، حيث إن x, y هما المركبتان المتعامدتان لـ $\overrightarrow{OP}$؛ لذا تُسمى $\langle x, y\rangle$ **الصورة الإحداثية** للمتجه.



الشكل 3.2.1



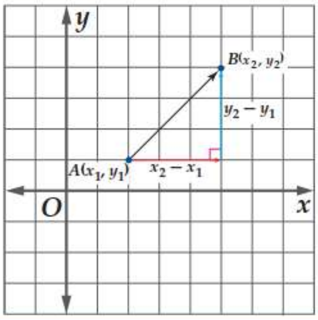
الشكل 3.2.2

وحيث إن المتجهات التي لها الطول والاتجاه نفساهما متساوية، فإنه بإمكاننا التعبير عن كثير من المتجهات بالإحداثيات نفسها، فمثلاً المتجهات p, t, v, w في الشكل 3.2.2 متساوية، إذ يمكن التعبير عن أيٍّ منها بالصورة $\langle 3, 2\rangle$، ولإيجاد الصورة الإحداثية لمتجهٍ مرسومٍ في وضعٍ غير قياسيٍّ، استعمل إحداثيي نقطتَي بدايته ونهايته.

مفهوم أساسي — الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي:

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$



مثال 1 — التعبير عن المتجه بالصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$، الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ — الصورة الإحداثية

$= \langle 3 - (-4), -5 - 2\rangle$ — $(x_1, y_1) = (-4, 2), (x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \langle 7, -7\rangle$ — بسّط

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممّا يأتي:

1A) $A(-2, -7), B(6, 1)$

1B) $A(0, 8), B(-9, -3)$

يمكن إيجاد طول المتجه في المستوى الإحداثي باستعمال قانون المسافة بين نقطتين.

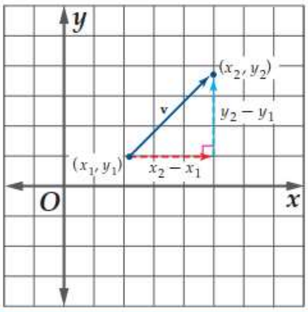
مفهوم أساسي طول المتجه في المستوى الإحداثي

إذا كان **v** متجهًا، نقطة بدايته (x_1, y_1) ، ونقطة نهايته (x_2, y_2) ، فإن طول **v** يُعطى بالصيغة:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

وإذا كانت $\langle a, b\rangle$ هي الصورة الإحداثية للمتجه **v** فإن :

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



قراءة الرياضيات

المعيار
يسمى مقدار المتجه أحيانًا معيار المتجه.

مثال 2 إيجاد طول متجه

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(3, -5)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ قانون المسافة بين نقطتين

$= \sqrt{[3 - (-4)]^2 + (-5 - 2)^2}$ $(x_1, y_1) = (-4, 2)$, $(x_2, y_2) = (3, -5)$

$= \sqrt{98} \approx 9.9$ بسّط

التحقق علمت من المثال 1 أن: $\overrightarrow{AB} = \langle 7, -7\rangle$ ؛ وعليه فإن: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + (-7)^2} = \sqrt{98}$ ✔

تحقق من فهمك

أوجد طول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي:

2A) $A(-2, -7), B(6, 1)$ **2B)** $A(0, 8), B(-9, -3)$

تشبه عمليات الضرب في عدد حقيقي، والجمع والطرح على المتجهات، العمليات نفسها على المصفوفات.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، و k عددًا حقيقيًا، فإن:

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$

ضرب متجه في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$

مثال 3 العمليات على المتجهات

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

a) $\mathbf{c} + \mathbf{a}$

$\mathbf{c} + \mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle + \langle 2, 5\rangle$ عوّض

$= \langle -4 + 2, 1 + 5\rangle = \langle -2, 6\rangle$ اجمع المتجهين

b) $\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$

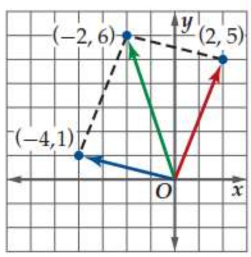
$\mathbf{b} - 2\mathbf{a} = \mathbf{b} + (-2)\mathbf{a}$ أعد كتابة الطرح كعملية جمع

$= \langle -3, 0\rangle + (-2)\langle 2, 5\rangle$ عوّض

$= \langle -3, 0\rangle + \langle -4, -10\rangle = \langle -7, -10\rangle$ اضرب متجهًا في عددٍ حقيقي، واجمع متجهين

إرشادات للدراسة

التحقق بيانيًا
يمكن التحقق بيانيًا من إجابة مثال 3 الفرع a ، استعمال طريقة قاعدة متوازي الأضلاع كما في الشكل أدناه .



تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{a} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{b} = \langle -3, 0\rangle, \mathbf{c} = \langle -4, 1\rangle$:

3A) $4\mathbf{c} + \mathbf{b}$ **3B)** $-3\mathbf{c}$ **3C)** $2\mathbf{c} + 4\mathbf{a} - \mathbf{b}$

متجهات الوحدة: يُسمَّى المتجه الذي طوله 1 **متجه الوحدة**، ويرمز له بالرمز **u**، ولإيجاد متجه الوحدة **u** الذي له نفس اتجاه المتجه v ، اقسم المتجه **v** على طوله $|\mathbf{v}|$.

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

وبذلك يكون $\mathbf{v} = \mathbf{u}\,|\mathbf{v}|$. ونكون قد عبَّرنا عن المتجه غير الصفريّ **v** في صورة حاصل ضرب متجه وحدة بنفس اتجاه **v** في عددٍ حقيقيٍّ.

🌍 **الربط مع تاريخ الرياضيات**

ويليام روان هاميلتون
(1805–1865)
طوّر الرياضي الأيرلندي هاميلتون نظريةً في نظام الأعداد؛ لتوسيع الأعداد المركبة، ونشر العديد من المحاضرات فيها. يُذكر أن العديد من المفاهيم الأساسية في تحليل المتجهات يعتمد على هذه النظرية.

مثال 4 إيجاد متجه وحدة له نفس الاتجاه لمتجهٍ معطًى

أوجد متجه الوحدة u الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$.

$\mathbf{u} = \frac{1}{\lvert\mathbf{v}\rvert}\mathbf{v}$	متجه وحدة باتجاه **v**
$= \frac{1}{\lvert\langle -2, 3\rangle\rvert}\langle -2, 3\rangle$	عوِّض
$= \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}}\langle -2, 3\rangle$	$\lvert\langle a, b\rangle\rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$
$= \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 3\rangle$	بسِّط
$= \left\langle \frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= \left\langle \frac{-2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13} \right\rangle$	أنطق المقام

التحقق بما أن **u** تمثل حاصل ضرب **v** في عدد موجب فإن له اتجاه **v** نفسه. تحقَّق من أن طول **u** هو 1 .

$\lvert\mathbf{u}\rvert = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2}$	قانون المسافة بين نقطتين
$= \sqrt{\frac{4}{13} + \frac{9}{13}}$	بسِّط
$= \sqrt{1} = 1$ ✔	بسِّط

☑ تحقق من فهمك

أوجد متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه المتجه المُعطى في كلٍّ ممَّا يأتي:

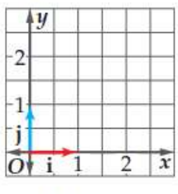
4A) $\mathbf{w} = \langle 6, -2\rangle$

4B) $\mathbf{x} = \langle -4, -8\rangle$

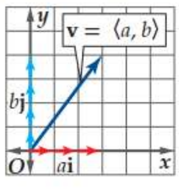
يُرمز لمتجهي الوحدة بالاتجاه الموجب لمحور x ، والاتجاه الموجب لمحور y بالرمزين $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ ، على الترتيب كما في الشكل 3.2.3 . كما يُسمَّى المتجهان **i** , **j** **متجهَي الوحدة القياسيين**.

تنبيه!

متجه الوحدة i
لا تخلط بين متجه الوحدة **i** ، والعدد التخيلي i ، حيث يُكتب متجه الوحدة بخطٍّ داكن غير مائل **i** ، بينما يُكتب العدد التخيلي بخطٍّ غير داكن مائل i .



الشكل 3.2.3



الشكل 3.2.4

ويمكن استعمال هذين المتجهين للتعبير عن أي متجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ كما في الشكل 3.2.4 ؛ وذلك لأن:

$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$	الصورة الإحداثية
$= \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$	أعد كتابة المتجه على صورة ناتج جمع متجهين
$= a\langle 1, 0\rangle + b\langle 0, 1\rangle$	اضرب متجه في عدد حقيقي
$= a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$	$\langle 1, 0\rangle = \mathbf{i}$, $\langle 0, 1\rangle = \mathbf{j}$

تسمى الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ **توافقًا خطيًّا** للمتجهين $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. ويُقصد بها كتابة المتجه بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$

مثال 5 كتابة متجهٍ على صورة توافق خطي لمتجهَي الوحدة

إذا كانت نقطة بداية المتجه $\overrightarrow{DE}$ هي $D(-2, 3)$ ، ونقطة نهايته $E(4, 5)$ ، فاكتب $\overrightarrow{DE}$ على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

أولًا، أوجد الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - (-2), 5 - 3\rangle$ $(x_1, y_1) = (-2, 3), (x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \langle 6, 2\rangle$ بسّط

ثم أعد كتابة المتجه على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة.

$\overrightarrow{DE} = \langle 6, 2\rangle$ الصورة الإحداثية

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ $\langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$

تحقق من فهمك

اكتب المتجه $\overrightarrow{DE}$ المُعطى نقطتا بدايته ونهايته على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ في كلٍّ ممَّا يأتي :

5A) $D(-6, 0), E(2, 5)$

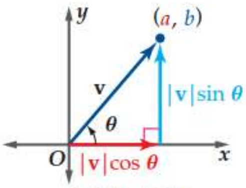
5B) $D(-3, -8), E(7, 1)$

ويمكن كتابة المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ ، باستعمال زاوية الاتجاه التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x . فمن الشكل **3.2.5** يمكن كتابة $\mathbf{v}$ على الصورة الإحداثية، أو على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ كما يأتي:

$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta\rangle$ عوّض

$= |\mathbf{v}| (\cos\theta)\mathbf{i} + |\mathbf{v}| (\sin\theta)\mathbf{j}$ توافق خطي من $\mathbf{i}, \mathbf{j}$



الشكل 3.2.5

إرشادات للدراسة

متجه الوحدة
تستنتج من الصورة $\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta\rangle$ أن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\mathbf{v}$ يأخذ الصورة
$\mathbf{u} = \langle 1 \cos\theta, 1 \sin\theta\rangle$
$= \langle \cos\theta, \sin\theta\rangle$

مثال 6 إيجاد الصورة الإحداثية

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ الذي طوله 10 ، وزاوية اتجاهه $120°$ مع الأفقي.

$\mathbf{v} = \langle |\mathbf{v}| \cos\theta, |\mathbf{v}| \sin\theta\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ بدلالة $|\mathbf{v}|, \theta$

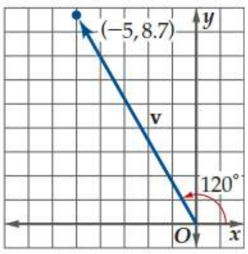
$= \langle 10 \cos 120°, 10 \sin 120°\rangle$ $|\mathbf{v}| = 10, \theta = 120°$

$= \left\langle 10\left(-\frac{1}{2}\right), 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\rangle$ $\cos 120° = -\frac{1}{2}, \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \langle -5, 5\sqrt{3}\rangle$ بسّط

التحقق مثِّل بيانيًّا: $\mathbf{v} = \langle -5, 5\sqrt{3}\rangle \approx \langle -5, 8.7\rangle$ ، تجد أن قياس الزاوية التي يصنعها $\mathbf{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور x هي $120°$ كما في الشكل المجاور،

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-5)^2 + (5\sqrt{3})^2} = 10 \checkmark$$



تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الأفقي في كلٍّ ممَّا يأتي :

6A) $|\mathbf{v}| = 8, \theta = 45°$

6B) $|\mathbf{v}| = 24, \theta = 210°$

من الشكل (1.2.5) تستنتج أنه يمكن إيجاد زاوية اتجاه المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ مع الاتجاه الأفقي (الموجب لمحور x) بحَلّ المعادلة المثلثية: $\tan\theta = \frac{|\mathbf{v}|\sin\theta}{|\mathbf{v}|\cos\theta}$، أو $\tan\theta = \frac{b}{a}$.

مثال 7 زوايا الاتجاه للمتجهات

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x.

a) $\mathbf{p} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

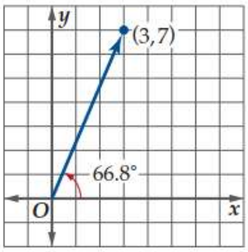
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{7}{3}$ $a = 3, b = 7$

$\theta = \tan^{-1}\frac{7}{3}$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $x = 3$ ، $y = 7$ ،
فإن المتجه يقع في الربع الأول، إذن:

$\theta \approx 66.8°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 3.2.6

أي أن زاوية اتجاه المتجه **p** هي $66.8°$ تقريبًا كما في الشكل **3.2.6** .

b) $\mathbf{r} = \langle 4, -5\rangle$

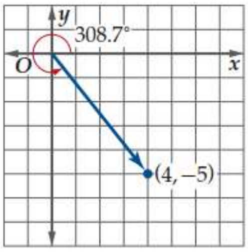
$\tan\theta = \frac{b}{a}$ معادلة زاوية الاتجاه

$\tan\theta = \frac{-5}{4}$ $a = 4, b = -5$

$\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{4}\right)$ حُل بالنسبة إلى θ

من خلال الصورة الإحداثية للمتجه $y = -5 < 0$ ، $x = 4 > 0$ ،
فإن المتجه يقع في الربع الرابع وبالتالي زاويته

$\theta \approx -51.3°$ استعمل الآلة الحاسبة



الشكل 3.2.7

بما أن **r** يقع في الربع الرابع، كما في الشكل **3.2.7** ، فإن: $\theta \approx 360° - 51.3° = 308.7°$

تحقق من فهمك

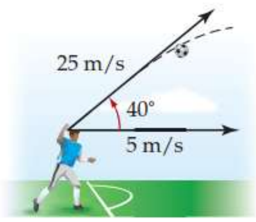
أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهين الآتيين مع الاتجاه الموجب لمحور x.

7A) $-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **7B)** $\langle -3, -8\rangle$

> **تنبيه!**
>
> لكل قيمة لـ $\tan\theta$ توجد زاويتان مختلفتان، بناءً على العلاقة:
> $\tan\theta = \tan(\theta + 180)$
> فإذا كانت قيمة $\tan\theta$ موجبة فإن θ زاوية تقع في الربع الأول أو الربع الثالث، وإذا كانت قيمة $\tan\theta$ سالبة، فإن θ زاوية تقع في الربع الثاني أو الرابع، وتكون العلاقة بين الزاويتين هي أن قياس إحداهما عبارة عن قياس الأولى مجموعًا لها $180°$.

مثال 8 من واقع الحياة تطبيق العمليات على المتجهات

كرة قدم: يركض حارس مرمى في لعبة كرة القدم للأمام بسرعة **5 m/s** ، ليرمي الكرة بسرعة **25 m/s** ، بزاوية **40°** مع الأفقي. أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة.



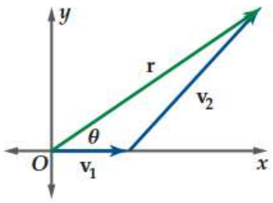
بما أن اللاعب يتحرك للأمام بشكل مستقيم، فإن الصورة الإحداثية لمتجه سرعة اللاعب $\mathbf{v}_1$ هي $\langle 5, 0\rangle$ ، وتكون الصورة الإحداثية لمتجه سرعة الكرة $\mathbf{v}_2$ هي:

$\mathbf{v}_2 = \langle |\mathbf{v}_2|\cos\theta, |\mathbf{v}_2|\sin\theta\rangle$ الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}_2$

$= \langle 25\cos 40°, 25\sin 40°\rangle$ $|\mathbf{v}_2| = 25, \theta = 40°$

$\approx \langle 19.2, 16.1\rangle$ بسِّط

اجمع المتجهين $\mathbf{v_1}$ ، $\mathbf{v_2}$ جبريًّا؛ لتجد متجه محصلة السرعة $\mathbf{r}$.



$\mathbf{r} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$ متجه المحصلة

$= \langle 5, 0\rangle + \langle 19.2, 16.1\rangle$ عوِّض

$= \langle 24.2, 16.1\rangle$ اجمع

طول متجه المحصلة هو $|\mathbf{r}| = \sqrt{24.2^2 + 16.1^2} \approx 29.1$. وتكون زاوية اتجاه المحصلة مع الأفقي هي θ حيث:

$\tan\theta = \frac{16.1}{24.2}$ ، $\tan\theta = \frac{b}{a}$ حيث $\langle a, b\rangle = \langle 24.2, 16.1\rangle$

$\theta = \tan^{-1}\frac{16.1}{24.2} \approx 33.6°$ حُل بالنسبة إلى θ

أي أن محصلة سرعة الكرة هي $29.1\ m/s$ تقريبًا، وتصنع زاوية قياسها $33.6°$ مع الأفقي تقريبًا.

تحقق من فهمك

8) كرة قدم: أوجد محصلة السرعة، واتجاه حركة الكرة إذا تحرك اللاعب إلى الأمام بسرعة $7\,m/s$

تدرب وحل المسائل

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي: (المثالان 2, 3)

1) $A(-3, 1), B(4, 5)$

2) $A(2, -7), B(-6, 9)$

3) $A(10, -2), B(3, -5)$

4) $A(-2, 6), B(1, 10)$

5) $A(2.5, -3), B(-4, 1.5)$

6) $A\left(\frac{1}{2}, -9\right), B\left(6, \frac{5}{2}\right)$

إذا كان: $\mathbf{f} = \langle 8, 0\rangle$, $\mathbf{g} = \langle -3, -5\rangle$, $\mathbf{h} = \langle -6, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي: (مثال 3)

7) $4\mathbf{h} - \mathbf{g}$

8) $\mathbf{f} + 2\mathbf{h}$

9) $2\mathbf{f} + \mathbf{g} - 3\mathbf{h}$

10) $\mathbf{f} - 2\mathbf{g} - 2\mathbf{h}$

11) $\mathbf{h} - 4\mathbf{f} + 5\mathbf{g}$

12) $4\mathbf{g} - 3\mathbf{f} + \mathbf{h}$

أوجد متجه وحدة له اتجاه المتجه $\mathbf{v}$ نفسه في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 4)

13) $\mathbf{v} = \langle -2, 7\rangle$

14) $\mathbf{v} = \langle 9, -3\rangle$

15) $\mathbf{v} = \langle -8, -5\rangle$

16) $\mathbf{v} = \langle 6, 3\rangle$

17) $\mathbf{v} = \langle -1, -5\rangle$

18) $\mathbf{v} = \langle 1, 7\rangle$

اكتب $\overrightarrow{DE}$ ، المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ ممَّا يأتي على صورة توافقٍ خطيٍّ لمتجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$: (مثال 5)

19) $D(4, -1), E(5, -7)$

20) $D(9, -6), E(-7, 2)$

21) $D(3, 11), E(-2, -8)$

22) $D(9.5, 1), E(0, -7.3)$

23) $D(-4, -6), E(9, 5)$

24) $D\left(\frac{1}{8}, 3\right), E\left(-4, \frac{2}{7}\right)$

أوجد الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ ، المُعطى طوله وزاوية اتجاهه مع الاتجاه الموجب لمحور x في كلٍّ ممَّا يأتي: (مثال 6)

25) $|\mathbf{v}| = 12, \theta = 60°$

26) $|\mathbf{v}| = 16, \theta = 330°$

27) $|\mathbf{v}| = 4, \theta = 135°$

28) $|\mathbf{v}| = 15, \theta = 125°$

أوجد زاوية اتجاه كلٍّ من المتجهات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور x : (مثال 7)

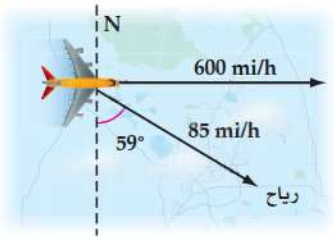
29) $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

30) $-2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

31) $-4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

32) $\langle -5, 9 \rangle$

33) **ملاحة جوية:** تطير طائرة جهة الشرق بسرعةٍ مقدارها 600 mi/h ، وتهب الرياح بسرعةٍ مقدارها 85 mi/h باتجاه S59°E . (مثال 8)



a) أوجد محصِّلة سرعة الطائرة.

b) أوجد زاوية اتجاه مسار الطائرة.

34) **تجديف:** يجدف شخص بقاربه في نهر باتجاه عمودي على الشاطئ بسرعة 5 mi/h ، ويؤثِّر فيه تيار مائي باتجاه مجرى النهر سرعته 3 mi/h .

a) أوجد السرعة التي يتحرك بها القارب إلى أقرب جزء من عشرة.

b) أوجد زاوية اتجاه حركة القارب بالنسبة للشاطئ إلى أقرب درجة.

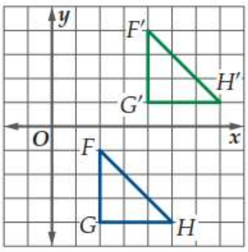
35) **ملاحة جوية:** تطير طائرة بسرعة مقدارها 480 mi/h بالاتجاه N82°E ، وبسبب الرياح، فإن محصلة سرعة الطائرة بالنسبة لسطح الأرض أصبحت 518 mi/h باتجاه N79°E .
ارسم شكلًا يُمثِّل هذا الموقف.

بيّن ما إذا كان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ المُعطاة نقطتا البداية والنهاية لكلٍّ منهما فيما يأتي متكافئين أو لا، وإذا كانا متكافئين، فأثبت أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ، وإذا كانا غير ذلك، فاذكر السبب.

36) $A(3, 5), B(6, 9), C(-4, -4), D(-2, 0)$

37) $A(1, -3), B(0, -10), C(11, 8), D(10, 1)$

38) **انسحاب:** يمكنك سحب شكل هندسي باستعمال المتجه $\langle a, b \rangle$؛ وذلك بإضافة a إلى الإحداثي x ، وإضافة b إلى الإحداثي y .



a) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F'G'H'$ في الشكل المجاور.

b) إذا استعمل المتجه $\langle -3, -6 \rangle$ لسحب $\triangle F'G'H'$ ، فمثّل بيانيًّا كلًّا من $\triangle F'G'H'$ ، وصورته $\triangle F''G''H''$.

c) حدّد المتجه الذي يُستعمل لسحب $\triangle FGH$ إلى $\triangle F''G''H''$.

أوجد نقطة نهاية ممكنة لكل متجه مما يأتي، إذا علِمتُ طوله ونقطة بدايته:

39) $\sqrt{37}, (-1, 4)$

40) $10, (-3, -7)$

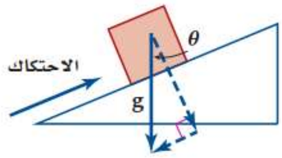
41) **آلة تصوير:** عُلِّقت آلة تصوير معدة لمتابعة حدث رياضي بثلاثة حبال كما في الشكل المجاور، إذا كان الشد في كل حبل يمثِّل متجهًا، فأجب عما يأتي:

a) أوجد الصورة الإحداثية لكل متجه لأقرب عدد صحيح.

b) أوجد الصورة الإحداثية لمتجه المحصلة المؤثر على آلة التصوير.

c) أوجد مقدار واتجاه محصلة القوى.

42) **قوة:** تؤثِّر قوة الجاذبية g وقوة الاحتكاك على صندوق في وضع السكون موضوع على سطح مائل، ويبيّن الشكل أدناه المركبتين المتعامدتين للجاذبية الأرضية (الموازية للسطح والعمودية عليه). ما الوصف الصحيح لقوة الاحتكاك ليكون هذا الوضع ممكنًا؟



مسائل مهارات التفكير العليا

43) **تبرير:** إذا أُعطيت طول متجه، ونقطة بدايته، فصف المحل الهندسي للنقاط التي يمكن أن تُمثِّل نقطة نهايته. (إرشاد: المحل الهندسي هو مجموعة من النقاط تحقق شرطًا معيّنًا).

44) **تحدّ:** إذا كانت زاوية اتجاه $\langle x, y\rangle$ هي $(4y)°$ ، فأوجد قيمة x بدلالة y .

برهان: إذا كان: $\mathbf{a} = \langle x_1, y_1\rangle, \mathbf{b} = \langle x_2, y_2\rangle, \mathbf{c} = \langle x_3, y_3\rangle$ ، فأثبت الخصائص الآتية:

45) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

46) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

47) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ ، حيث k عدد حقيقي.

48) $|k\mathbf{a}| = |k|\,|\mathbf{a}|$ ، حيث k عدد حقيقي.

تدريب على اختبار

49) ما طول المتجه الذي نقطة بدايته $(2, 5)$، ونقطة نهايته $(-3, -4)$ ؟

A $\sqrt{2}$

B $\sqrt{26}$

C $\sqrt{82}$

D $\sqrt{106}$

50) ما الصورة الإحداثية للمتجه v الذي طوله 4 ، وزاوية اتجاهه $30°$ مع الأفقي؟

A $<2, 2>$

B $<2, 2\sqrt{3}>$

C $<2\sqrt{3}, 2>$

D $<2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}>$

3-3

الضرب الداخلي
Dot Product

فيما سبق:

درست عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات هندسيًا وجبريًا.

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، وأستعمله في إيجاد الزاوية بينهما.

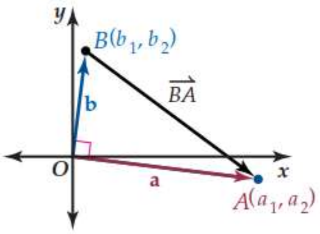
المفردات:

الضرب الداخلي
dot product
المتجهان المتعامدان
orthogonal vectors
الزاوية بين متجهين
angle between two vectors
الشغل
work

لماذا؟

تحمل كلمة الشغل معانٍ متعددة في الحياة اليومية، إلا أن لها معنى محددًا في الفيزياء، وهو مقدار القوة المؤثرة في جسم مضروبة في المسافة، التي يتحركها الجسم في اتجاه القوة. ومثال ذلك: الشغل المبذول لدفع سيارة مسافة محددة. ويمكن حساب هذا الشغل باستعمال عملية على المتجهات تسمى الضرب الداخلي.

الضرب الداخلي تعلمت في الدرس 2-3 عمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات. وفي هذا الدرس سوف تتعلم عملية ثالثة على المتجهات. إذا كان لديك المتجهان المتعامدان $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الوضع القياسي، وكان $\overrightarrow{BA}$ المتجه الواصل بين نقطتي نهاية المتجهين كما في الشكل المجاور. فإنك تعلم من نظرية فيثاغورس أن $|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$.



وباستعمال مفهوم طول المتجه يمكنك إيجاد $|\overrightarrow{BA}|^2$.

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$ تعريف طول متجه

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$$ ربّع الطرفين

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2$$ فك الأقواس

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = (a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ جمّع الحدود المربعة

$$|\overrightarrow{BA}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$ $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,,\ |\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2\,,$ $|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}\,,\ |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2$

لاحظ أن العبارتين $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ ، $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2)$ متكافئتان، إذا وفقط إذا كان $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. وتُسمَّى العبارة $a_1b_1 + a_2b_2$ **الضرب الداخلي** للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ، ويُقرأ الضرب الداخلي للمتجهين a, b ، أو يُقرأ اختصارًا $\mathbf{a}$ dot $\mathbf{b}$.

قراءة الرياضيات

الضرب القياسي
يسمى الضرب الداخلي في بعض الأحيان بالضرب القياسي.

مفهوم أساسي **الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى الإحداثي**

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle\,,\ \mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ كالآتي :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

لاحظ أنه خلافًا لعمليتي الجمع والضرب في عدد حقيقي على المتجهات، فإن حاصل الضرب الداخلي لمتجهين يكون عددًا وليس متجهًا. ويتعامد متجهان غير صفريين، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا. ويقال للمتجهين اللّذين حاصل ضربهما الداخلي صفر: **متجهان متعامدان** .

مفهوم أساسي **المتجهان المتعامدان**

يكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

على الرغم من أن حاصل الضرب الداخلي للمتجه الصفري في أي متجه آخر يساوي الصفر، أي أن : $\langle 0, 0 \rangle \cdot \langle a_1, a_2 \rangle = 0a_1 + 0a_2 = 0$ ، إلا أن المتجه الصفري لا يعامد أي متجه آخر؛ لأنه ليس له طول أو اتجاه.

مثال 1 استعمال الضرب الداخلي في التحقق من تعامد متجهين

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$

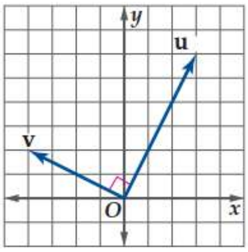
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(-4) + 6(2)$$
$$= 0$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان كما هو موضَّح في الشكل 3.3.1 .

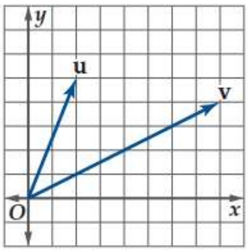
b) $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 4\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(8) + 5(4)$$
$$= 36$$

بما أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين كما هو موضَّح في الشكل 3.3.2 .



الشكل 3.3.1



الشكل 3.3.2

تحقق من فهمك

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين .

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 1\rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, -6\rangle$

يحقق الضرب الداخلي الخصائص الآتية :

نظريَّة خصائص الضرب الداخلي

إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ متجهات، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن الخصائص الآتية صحيحة:

الخاصية الإبدالية	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
خاصية التوزيع	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
خاصية الضرب في عدد حقيقي	$k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$
خاصية الضرب الداخلي في المتجه الصفري	$\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$
العلاقة بين الضرب الداخلي وطول المتجه	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \lvert\mathbf{u}\rvert^2$

البرهان

إثبات أن: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2$

افترض أن: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2\rangle$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 \quad \text{الضرب الداخلي}$$
$$= \left(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\right)^2 \quad \text{اكتب على صورة مربع جذر } (u_1^2 + u_2^2)$$
$$= |\mathbf{u}|^2 \quad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = |\mathbf{u}|$$

ستبرهن الخصائص الثلاث الأولى في الأسئلة 35-37

مثال 2 استعمال الضرب الداخلي لإيجاد طول متجه

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول $\mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$.

بما أن: $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ ، فإن: $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

$$|\langle -5, 12\rangle| = \sqrt{\langle -5, 12\rangle \cdot \langle -5, 12\rangle} \quad \mathbf{a} = \langle -5, 12\rangle$$
$$= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13 \quad \text{بسّط}$$

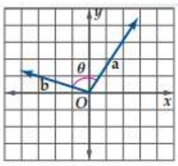
تحقق من فهمك

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول كلٍّ من المتجهات الآتية :

2A) $\mathbf{b} = \langle 12, 16\rangle$

2B) $\mathbf{c} = \langle -1, -7\rangle$

الزاوية θ بين أي متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هي الزاوية بين هذين المتجهين، عندما يكونان في وضع قياسي كما في الشكل المجاور، حيث: $0 \leq \theta \leq \pi$ ، أو $0° \leq \theta \leq 180°$ ، ويمكن استعمال الضرب الداخلي؛ لإيجاد قياس **الزاوية بين متجهين** غير صفريين.



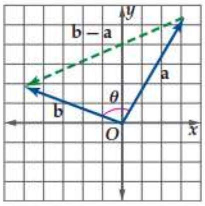
إرشادات للدراسة

المتجهات المتعامدة والمتجهات المتوازية
يقال لمتجهين: إنهما متعامدان، إذا كانت الزاوية بينهما $90°$. ويقال لمتجهين أنهما متوازيان، إذا كانت الزاوية بينهما $0°$ أو $180°$.

مفهوم أساسي — الزاوية بين متجهين

إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$



البرهان

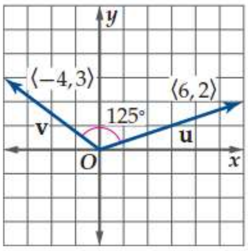
إذا كان: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}-\mathbf{a}$ أضلاع مثلث كما في الشكل أعلاه ، فإن:

$\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2-2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta=\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2$	قانون جيوب التمام
$\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2-2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta=(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$	$\|\mathbf{u}\|^2=\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$
$\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2-2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta=\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$	خاصية التوزيع للضرب الداخلي
$\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2-2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta=\|\mathbf{b}\|^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\|\mathbf{a}\|^2$	$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\|\mathbf{u}\|^2$
$-2\,\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos\theta=-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	بطرح $\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2$ من الطرفين
$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|}$	بقسمة الطرفين على $-2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$

مثال 3 إيجاد قياس الزاوية بين متجهين

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(a $\mathbf{u}=\langle 6,2\rangle,\ \mathbf{v}=\langle -4,3\rangle$

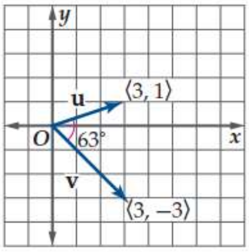


$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta=\dfrac{\langle 6,2\rangle\cdot\langle -4,3\rangle}{\|\langle 6,2\rangle\|\,\|\langle -4,3\rangle\|}$	$\mathbf{u}=\langle 6,2\rangle,\ \mathbf{v}=\langle -4,3\rangle$
$\cos\theta=\dfrac{-24+6}{\sqrt{40}\,\sqrt{25}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta=\dfrac{-18}{10\sqrt{10}}$	بسّط
$\theta=\cos^{-1}\dfrac{-18}{10\sqrt{10}}\approx 125°$	معكوس جيب التمام

أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $125°$ تقريبًا، كما في الشكل أعلاه.

(b $\mathbf{u}=\langle 3,1\rangle,\ \mathbf{v}=\langle 3,-3\rangle$

$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$	الزاوية بين متجهين
$\cos\theta=\dfrac{\langle 3,1\rangle\cdot\langle 3,-3\rangle}{\|\langle 3,1\rangle\|\,\|\langle 3,-3\rangle\|}$	$\mathbf{u}=\langle 3,1\rangle,\ \mathbf{v}=\langle 3,-3\rangle$
$\cos\theta=\dfrac{9+(-3)}{\sqrt{10}\,\sqrt{18}}$	الضرب الداخلي لمتجهين، طول المتجه
$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	بسّط
$\theta=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}\approx 63°$	معكوس جيب التمام



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو $63°$ تقريبًا، كما في الشكل المجاور.

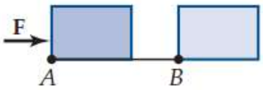
تحقق من فهمك

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\mathbf{u} = \langle -5, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 4 \rangle$

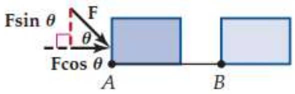
(3B $\mathbf{u} = \langle 9, 5 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 7 \rangle$

من التطبيقات على الضرب الداخلي للمتجهات، حساب الشغل الناتج عن قوة، فإذا كانت $\mathbf{F}$ قوةً ثابتة مؤثرةً في جسم لتحريكه من النقطة A إلى B كما في الشكل أدناه، وكانت $\mathbf{F}$ موازيةً لـ $\overrightarrow{AB}$ ، فإن **الشغل** W الناتج عن $\mathbf{F}$ يساوي مقدار القوة $\mathbf{F}$ مضروبًا في المسافة من A إلى B ، أو $W = |\mathbf{F}||\overrightarrow{AB}|$.



ولحساب الشغل الناتج من قوة ثابتة $\mathbf{F}$ ، بأي اتجاه لتحريك جسم من النقطة A إلى B ، كما في الشكل المجاور، يمكنك استعمال الصيغة:

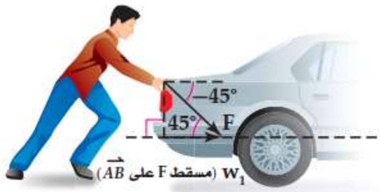
$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$



أي أنه يمكن حساب هذا الشغل بإيجاد الضرب الداخلي بين القوة الثابتة $\mathbf{F}$ ، والمسافة المتجهة $\overrightarrow{AB}$ بعد كتابتهما في الصورة الإحداثية.

مثال 7 من واقع الحياة — حساب الشغل

سيارة: يدفع شخص سيارةً بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 120 N بزاوية 45° كما في الشكل المجاور، أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك السيارة 10 m (بإهمال قوة الاحتكاك).



استعمل قاعدة الضرب الداخلي للشغل.

الصورة الإحداثية للقوة المتجهة $\mathbf{F}$ بدلالة مقدار القوة، وزاوية الاتجاه هي :

$\langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle$ والصورة الإحداثية لمتجه المسافة هي $\langle 10, 0 \rangle$.

$W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$ — قاعدة الضرب الداخلي للشغل

$= \langle 120 \cos(-45°), 120 \sin(-45°) \rangle \cdot \langle 10, 0 \rangle$ — عوّض

$= [120 \cos(-45°)](10) \approx 848.5$ — الضرب الداخلي

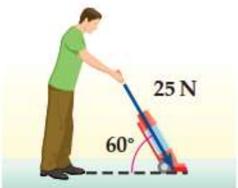
أي أن الشخص يبذل 848.5J تقريبًا من الشغل؛ لدفع السيارة.

إرشادات للدراسة

وحدات الشغل
وحدة قياس الشغل في النظام الإنجليزي هي قدم-رطل، وفي النظام المتري نيوتن-متر أو جول.

تحقق من فهمك

4) **تنظيف:** يدفع إبراهيم مكنسةً كهربائيةً بقوةٍ مقدارها 25 N، إذا كان قياس الزاوية بين ذراع المكنسة وسطح الأرض 60°، فأوجد الشغل بالجول الذي بذله إبراهيم عند تحريك المكنسة مسافة 6 m؟



تدرب وحل المسائل

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$، ثم تحقق ممّا إذا كانا متعامدين أم لا. (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 2\rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 9, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle 4, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 5\rangle$

4) $\mathbf{u} = 11\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, \mathbf{v} = -7\mathbf{i} + 11\mathbf{j}$

5) $\mathbf{u} = \langle -4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, -2\rangle$

6) **زيت الزيتون:** يمثّل المتجه $\mathbf{u} = \langle 406, 297\rangle$ أعداد علبتين مختلفتين من زيت الزيتون في متجر، ويمثّل المتجه $\mathbf{v} = \langle 27.5, 15\rangle$ سعر العلبة من كلا النوعين على الترتيب (مثال 1)

a) أوجد $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

b) فسّر النتيجة التي حصلت عليها في الفرع a في سياق المسألة.

استعمل الضرب الداخلي؛ لإيجاد طول المتجه المعطى. (مثال 2)

7) $\mathbf{m} = \langle -3, 11\rangle$ **8)** $\mathbf{r} = \langle -9, -4\rangle$

9) $\mathbf{v} = \langle 1, -18\rangle$ **10)** $\mathbf{t} = \langle 23, -16\rangle$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرة. (مثال 3)

11) $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, -4\rangle$

12) $\mathbf{u} = \langle 7, 10\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, -4\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -10\rangle$

14) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

15) **مخيم كشفي:** غادر يوسف ويحيى مخيَّمهما الكشفي للبحث عن حطب. إذا كان المتجه $\mathbf{u} = \langle 3, -5\rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يوسف، والمتجه $\mathbf{v} = \langle -7, 6\rangle$ يُمثّل الطريق الذي سلكه يحيى، فأوجد قياس الزاوية بين المتجهين. (مثال 3)

16) **فيزياء:** يدفع طارق برميلًا على أرضٍ مستوية مسافة $1.5\,\text{m}$ بقوةٍ مقدارها $534\,\text{N}$؛ بزاوية $25°$ كما في الشكل أدناه، أوجد مقدار الشغل بالجول الذي يبذله طارق، وقرّب الناتج إلى أقرب عددٍ صحيحٍ. (مثال 4)

أوجد متجهًا يعامد المتجه المعطى في كلٍّ مما يأتي:

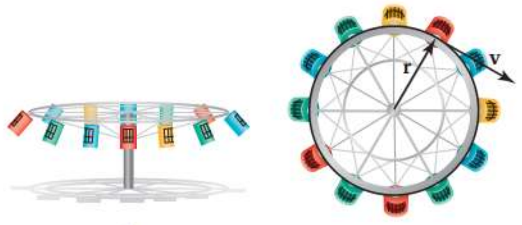
17) $\langle -2, -8\rangle$

18) $\langle 3, 5\rangle$

19) $\langle 7, -4\rangle$

20) $\langle -1, 6\rangle$

21) **عجلة دوّارة:** يعامد متجه الموقع $\mathbf{r}$ في العجلة الدوارة متجه السرعة المماسية $\mathbf{v}$ عند أيِّ نقطةٍ من نقاط الدائرة.



منظر علوي منظر أمامي

a) إذا كان طول نصف قطر العجلة $20\,\text{ft}$، وسرعتها ثابتة ومقدارها $40\,\text{ft/s}$، فاكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{r}$، إذا كان يصنع زاويةً قياسها $35°$ مع الأفقي، ثم اكتب الصورة الإحداثية لمتجه السرعة المماسية في هذه الحالة؟ قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

b) كيف يمكن إثبات تعامد المتجه $\mathbf{r}$، ومتجه السرعة باستعمال الصورتين الإحداثيتين اللتين أوجدتهما في الفرع **a**؟ وأثبت أن المتجهين متعامدان.

إذا علمت كلًّا من $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

22) $\mathbf{v} = \langle 3, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 33$

23) $\mathbf{v} = \langle 4, 6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 38$

24) **مدرسة:** يسحب طالب حقيبته المدرسية بقوة مقدارها $100\,\text{N}$، إذا بذل الطالب شغلًا مقداره $1747\,\text{J}$، لسحب حقيبته مسافة $31\,\text{m}$، فما قياس الزاوية بين قوة السحب والأفقي (بإهمال قوة الاحتكاك)؟

اختبر كل زوج من المتجهات في كلٍّ مما يأتي، من حيث كونها متعامدة، أو متوازية، أو غير ذلك.

25) $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 8 \rangle$

26) $\mathbf{u} = \langle -1, -4 \rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 6 \rangle$

أوجد قياس الزاوية بين كل متجهين في كلٍّ مما يأتي، قرّب الناتج إلى أقرب عُشر.

27) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

28) $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

29) النقاط: $(8, 1)$, $(4, 7)$, $(2, 3)$ تُمثّل رؤوس مثلثٍ، أوجد قياسات زواياه باستعمال المتجهات.

إذا علمت كلًّا من $|\mathbf{v}|$, $\mathbf{u}$ والزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، فأوجد قيمةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{v}$ ، قرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من مئةٍ.

30) $\mathbf{u} = \langle 4, -2 \rangle, |\mathbf{v}| = 10, \theta = 45°$

31) $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle, |\mathbf{v}| = \sqrt{29}, \theta = 121°$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) **تبرير:** اختبر صحة أو خطأ العبارة الآتية:
إذا كانت $|\mathbf{f}|, |\mathbf{e}|, |\mathbf{d}|$ تُمثّل ثلاثية فيثاغورس، وكانت الزاويتان بين $\mathbf{d}, \mathbf{e}$ وبين $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ حادتين، فإن الزاوية بين $\mathbf{d}, \mathbf{f}$ يجب أن تكون قائمة. فسّر تبريرك.

33) **اكتشف الخطأ:** يدرس كلٌّ من فهدٍ وفيصلٍ خصائص الضرب الداخلي للمتجهات، فقال فهد: إن الضرب الداخلي للمتجهات عملية تجميعية؛ لأنها إبدالية؛ أي أن:
$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$، ولكن فيصل عارضه، فأيهما كان على صواب؟ وضّح إجابتك.

34) **اكتب:** وضّح كيف تجد الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين.

برهان: إذا كان: $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle, \mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle, \mathbf{w} = \langle w_1, w_2 \rangle$ ، فأثبت خصائص الضرب الداخلي الآتية:

35) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

36) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

37) $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = k\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot k\mathbf{v}$

38) **برهان:** إذا كان قياس الزاوية بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ يساوي $90°$، فأثبت أن $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ باستعمال قاعدة الزاوية بين متجهين غير صفريين.

تدريب على اختبار

39) ما قياس الزاوية بين المتجهين $\langle -1, -1 \rangle$, $\langle -9, 0 \rangle$ ؟

A $0°$ C $90°$

B $45°$ D $135°$

40) إذا كان: $\mathbf{s} = \langle 4, -3 \rangle$, $\mathbf{t} = \langle -6, 2 \rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يمثّل r، حيث $\mathbf{r} = \mathbf{t} - 2\mathbf{s}$ ؟

A $\langle 14, 8 \rangle$ C $\langle -14, 8 \rangle$

B $\langle 14, 6 \rangle$ D $\langle -14, -8 \rangle$

اختبار منتصف الوحدة

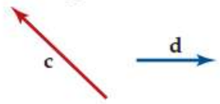
الدروس من 1-3 إلى 3-3

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية مستعملًا قاعدة المثلث، أو متوازي الأضلاع، وقرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة والمنقلة. (الدرس 1-3)

1) 2)

3) **التزلُّج:** يسحب شخص مزلجةً على الجليد بقوةٍ مقدارها $50\,N$ بزاوية $35°$ مع الأفقي، أوجد مقدار كلٍّ من المركبة الأفقية، والعمودية للقوة، وقرّب إلى أقرب جزء من مئة. (الدرس 1-3)

4) ارسم شكلًا يُمثِّل المتجه $\frac{1}{2}\mathbf{c} - 3\mathbf{d}$ (الدرس 1-3)



اكتب $\overrightarrow{BC}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ ممّا يأتي بدلالة متجهَي الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. (الدرس 2-3)

5) $B(3,-1), C(4,-7)$

6) $B(10,-6), C(-8,2)$

7) $B(1,12), C(-2,-9)$

8) $B(4,-10), C(14, 10)$

9) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يُمثِّل الصورة الإحداثية لـ $\overrightarrow{AB}$، حيث $A(-5, 3)$ نقطة بدايته، و $B(2, -1)$ نقطة نهايته؟ (الدرس 2-3)

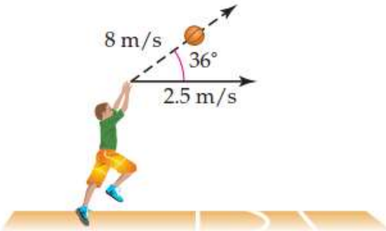
A $\langle 4, -1\rangle$

B $\langle 7, -4\rangle$

C $\langle -4, 7\rangle$

D $\langle -6, 4\rangle$

10) **كرة سلة:** ركض راشد في اتجاه السلة في أثناء مباراة بسرعة $2.5\ m/s$، ومن منتصف الملعب صوَّب كرةً بسرعة $8\ m/s$ بزاويةٍ قياسها $36°$ مع الأفقي. (الدرس 2-3)



a) اكتب الصورة الإحداثية للمتجهين اللّذين يُمثِّلان سرعة راشد، وسرعة الكرة، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) ما السرعة المحصلة، واتجاه حركة الكرة؟ قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة، وقياس الزاوية إلى أقرب درجة.

أوجد الصورة الإحداثية، وطول المتجه المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته على الترتيب في كلٍّ مما يأتي، قرِّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة. (الدرس 2-3)

11) $A(-4, 2), B(3,6)$

12) $Q(1, -5), R(-7, 8)$

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$، وقرِّب الناتج إلى أقرب درجة: (الدرس 3-3)

13) $\mathbf{u}=\langle 9, -4\rangle, \mathbf{v}=\langle -1, -2\rangle$

14) $\mathbf{u}=\langle 8, 4\rangle, \mathbf{v}=\langle -2, 4\rangle$

15) $\mathbf{u}=\langle 2, -2\rangle, \mathbf{v}=\langle 3, 8\rangle$

16) **اختيار من متعدد:** إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{w} = \langle 8, -5\rangle$، فما ناتج $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})$؟ (الدرس 3-3)

A -2

B -18

C 15

D 38

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين في كلٍّ مما يأتي، ثم تحقَّق مما إذا كانا متعامدين أم لا: (الدرس 3-3)

17) $\langle 2, -5\rangle \cdot \langle 4, 2\rangle$

18) $\langle 4, -3\rangle \cdot \langle 7, 4\rangle$

19) $\langle 1, -6\rangle \cdot \langle 5, 8\rangle$

20) $\langle 3, -6\rangle \cdot \langle 10, 5\rangle$

21) **عربة:** يسحب أحمد عربةً بقوةٍ مقدارها $25\,N$، وبزاوية $30°$ مع الأفقي كما في الشكل أدناه. (الدرس 3-3)

a) ما مقدار الشغل الذي يبذله أحمد عندما يسحب العربة $150\,m$، قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة.

b) إذا كانت الزاوية بين ذراع العربة والأفقي $40°$، وسحب أحمد العربة المسافة نفسها، وبالقوة نفسها، فهل يبذل شغلًا أكبر أم أقل؟ فسّر إجابتك.

3-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد
Vectors in Three-Dimensional Space

فيما سبق:

درست المتجهات في النظام الثنائي الأبعاد هندسيًا وجبريًا.

والآن:

- أعيّنُ نقاطًا، ومتجهات في النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد.
- أعبّرُ عن المتجهات جبريًا، وأُجري العمليات عليها في الفضاء الثلاثي الأبعاد.

المفردات:

نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد
three-dimensional coordinate system

المحور z
z-axis

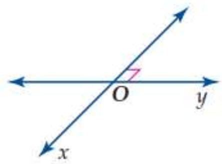
الثُمن
octant

الثلاثي المرتب
ordered triple

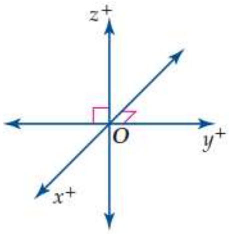
لماذا ؟

لإطلاق صاروخ في الفضاء، يلزم تحديد اتجاهه وزاويته في الفضاء. وبما أن مفاهيم المسافة والسرعة والقوة المتجهة غير مقيدة في المستوى، فلا بد من توسيع مفهوم المتجه إلى الفضاء الثلاثي الأبعاد.

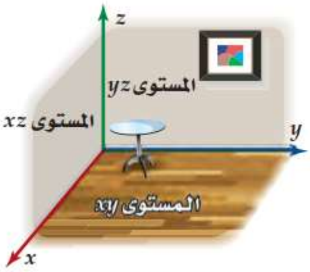
الإحداثيات في الفضاء الثلاثي الأبعاد المستوى الإحداثي: هو نظام إحداثي ثنائي الأبعاد يتشكل بواسطة خطَّي أعداد متعامدين، هما المحور x والمحور y، اللذان يتقاطعان في نقطة تسمى نقطة الأصل. ويسمح لك هذا النظام بتحديد وتعيين نقاطٍ في المستوى، وتحتاج إلى **نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد**؛ لتعيين نقطةٍ في الفضاء، فنبدأ بالمستوى xy، ونضعه بصورة تُظهر عمقًا للشكل كما في الشكل 3.4.1، ثم نضيف محورًا ثالثًا يُسمَّى **المحور z** يمر بنقطة الأصل، ويعامد كلًا من المحورين x، y كما في الشكل 3.4.2. فيكون لدينا ثلاثة مستويات هي xy, yz, xz ، وتقسم هذه المستويات الفضاء إلى ثماني مناطق، يُسمَّى كلٌّ منها **الثُّمُن**، ويمكن تمثيل الثُّمُن الأول بجزء الحجرة في الشكل 3.4.3.



الشكل 3.4.1



الشكل 3.4.2



الشكل 3.4.3

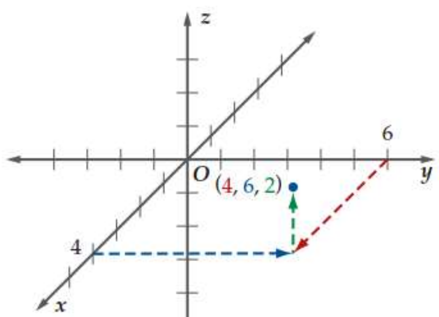
تُمثَّل النقطة في الفضاء **بثلاثيات مرتبة** من الأعداد الحقيقية (x, y, z)، ولتعيين مثل هذه النقطة، عيّن أولًا النقطة (x, y) في المستوى $x\,y$ ، ثم تحرك لأعلى، أو إلى أسفل موازيًا للمحور z ، بحسب المسافة المتجهة التي يُمثّلها z .

مثال 1 تعيّين نقطة في الفضاء

عيِّن كلًا من النقطتين الآتيتين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

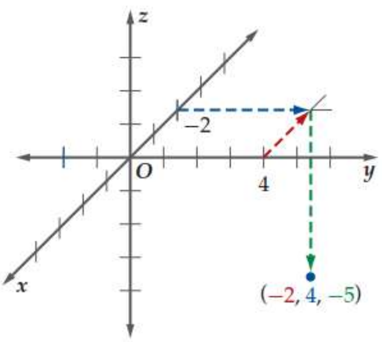
(a $(4, 6, 2)$

عيّن $(4, 6)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد وحدتين أعلى الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



(b $(-2, 4, -5)$

عيّن $(4 , -2)$ في المستوى xy بوضع إشارة مناسبة، ثم ضع نقطةً على بُعد 5 وحداتٍ أسفل الإشارة التي وضعتها، وبموازاة المحور z، كما في الشكل أدناه.



إرشادات للدراسة

تدريج المحاور
تذكر أن التدريج في المحاور الثلاثة في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد متساوٍ.

✓ تحقق من فهمك

عيِّن كلًا من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

(1A $(-3, -4, 2)$ **(1B** $(3, 2, -3)$ **(1C** $(5, -4, -1)$

عملية إيجاد المسافة بين نقطتين، وإيجاد نقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء تشبهان عملية إيجاد المسافة، ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في المستوى الإحداثي .

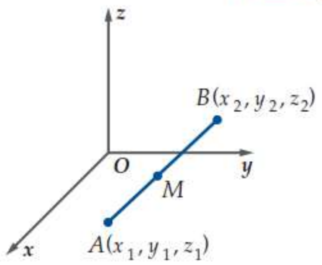
مفهوم أساسي — صيغتا المسافة ونقطة المنتصف في الفضاء

تُعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

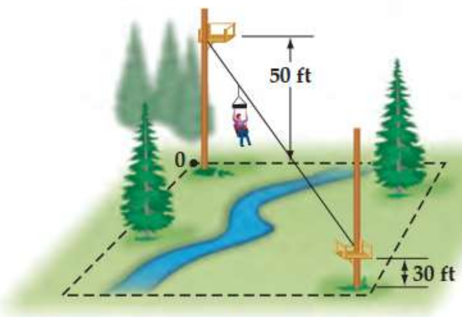
وتعطى نقطة المنتصف M لـ $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$



مثال 2 من واقع الحياة — المسافة بين نقطتين ونقطة منتصف قطعة مستقيمة في الفضاء

رحلة: تتحرك العربة في الشكل المجاور على سلسلة مشدودة، تربط بين منصَّتين تسمح للمتنزهين بالمرور فوق مناظر طبيعية خلابة. إذا مُثلت المنصتان بالنقطتين: (50 ,12 ,10) , (30 , 92 ,70)، وكانت الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:



a) أوجد طول السلسلة اللازمة للربط بين المنصَّتَين إلى أقرب قدمٍ.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين.

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad \text{صيغة المسافة}$$

$$= \sqrt{(70 - 10)^2 + (92 - 12)^2 + (30 - 50)^2} \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$\approx 101.98 \quad \text{بسّط}$$

أي أننا نحتاج إلى حبلٍ طوله 102 ft تقريبًا للربط بين المنصَّتين.

b) أوجد إحداثيات منتصف المسافة بين المنصَّتين.

استعمل صيغة نقطة المنتصف في الفضاء .

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \quad \text{صيغة المنتصف}$$

$$= \left(\frac{10 + 70}{2}, \frac{12 + 92}{2}, \frac{50 + 30}{2}\right) \quad (x_2, y_2, z_2) = (70, 92, 30) , (x_1, y_1, z_1) = (10, 12, 50)$$

$$= (40, 52, 40)$$

أي أن إحداثيات منتصف المسافة بين المنصتين هي (40, 52, 40)

تحقق من فهمك

2) طائرات: تفرض أنظمة السلامة ألَّا تقل المسافة بين الطائرات عن 0.5 mi في أثناء طيرانها، إذا علمت أن طائرتين تطيران فوق إحدى المناطق، وفي لحظةٍ معينةٍ كانت إحداثيات موقِعَي الطائرتين: (300, 150, 30000) , (450, −250, 28000)، مع العلم بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام، فأجب عما يأتي:

A) هل تخالف الطائرتان أنظمة السلامة؟

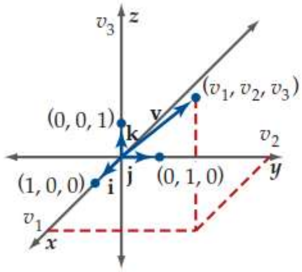
B) إذا أُطلقت ألعابٌ ناريةٌ، وانفجرت في منتصف المسافة بين الطائرتين، فما إحداثيات نقطة الانفجار؟

إرشادٌ: الميل = 5280 قدمًا

الربط مع الحياة

يستمتع سكان البنايات الشاهقة، خصوصًا في الأماكن المرتفعة، بمشاهدة أجزاء من المدينة كالجسور وحركة المرور، والحدائق ... إلخ .

المتجهات في الفضاء إذا كان $\mathbf{v}$ متجهًا في الفضاء في وضع قياسي، وكانت (v_1, v_2, v_3) نقطة نهايته، فإننا نعبّر عنه بالصورة الإحداثية $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ ،كما يُعبّر عن المتجه الصفري بالصورة الإحداثية $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ ، وعن متجهات الوحدة القياسية بالصورة الإحداثية $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ ، كما في الشكل **3.4.4** ، ويمكن التعبير عن الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{v}$ على صورة توافق خطي لمتجهات الوحدة $\mathbf{i, j, k}$ كما يأتي: $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$.



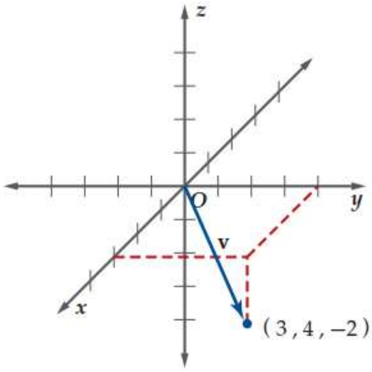
الشكل 3.4.4

مثال 3 تعيين متجه في الفضاء

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

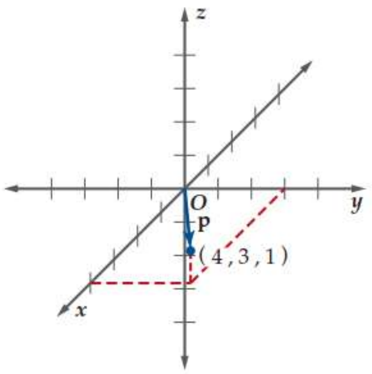
a) $\mathbf{v} = \langle 3, 4, -2 \rangle$

عيِّن النقطة $(3, 4, -2)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{v}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(3, 4, -2)$ نقطة نهايته.



b) $\mathbf{p} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

عيِّن النقطة $(4, 3, 1)$ ، ثم مثِّل المتجه $\mathbf{p}$ بيانيًّا، بحيث تكون النقطة $(4, 3, 1)$ نقطة نهايته.



تحقق من فهمك

مثِّل بيانيًّا كلًّا من المتجهين الآتيين في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد:

3A) $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$

3B) $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

إذا كُتبت المتجهات في الفضاء على الصورة الإحداثية، فإنه يمكن أن تُجرى عليها عمليات الجمع، والطرح ، والضرب في عدد حقيقي كما هي الحال في المتجهات في المستوى الإحداثي.

مفهوم أساسي العمليات على المتجهات في الفضاء

إذا كان $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ متجهين في الفضاء، وكان k عددًا حقيقيًّا ، فإن :

جمع متجهين $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

طرح متجهين $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$

ضرب متجهٍ في عددٍ حقيقيٍّ $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$

إرشادات للدراسة

العمليات على المتجهات
خصائص العمليات على المتجهات في الفضاء هي الخصائص نفسها في المستوى الإحداثي.

مثال 4 العمليات على المتجهات في الفضاء

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

a) $4\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

$$4\mathbf{y} + 2\mathbf{z} = 4\langle 3, -6, 2 \rangle + 2\langle -2, 0, 5 \rangle$$ عوّض
$$= \langle 12, -24, 8 \rangle + \langle -4, 0, 10 \rangle$$ اضرب متجهًا في عدد حقيقي
$$= \langle 8, -24, 18 \rangle$$ اجمع المتجهين

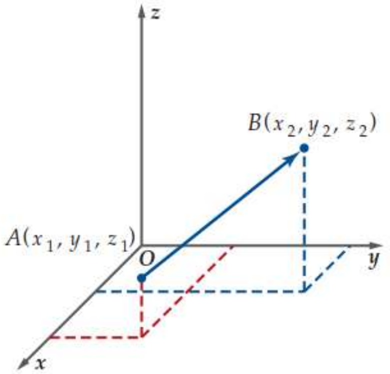
b) $2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y}$

$$2\mathbf{w} - \mathbf{z} + 3\mathbf{y} = 2\langle -1, 4, -4 \rangle - \langle -2, 0, 5 \rangle + 3\langle 3, -6, 2 \rangle$$ عوّض
$$= \langle -2, 8, -8 \rangle + \langle 2, 0, -5 \rangle + \langle 9, -18, 6 \rangle$$ اضرب متجهٍ في عددٍ حقيقي
$$= \langle 9, -10, -7 \rangle$$ اجمع المتجهات

تحقق من فهمك

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات: $\mathbf{y} = \langle 3, -6, 2 \rangle, \mathbf{w} = \langle -1, 4, -4 \rangle, \mathbf{z} = \langle -2, 0, 5 \rangle$:

4A) $4\mathbf{w} - 8\mathbf{z}$ 4B) $3\mathbf{y} + 3\mathbf{z} - 6\mathbf{w}$



وكما في المتجهات ذات البُعدين، نجد الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1, z_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2, z_2)$، وذلك بطرح إحداثيات نقطة البداية من إحداثيات نقطة النهاية.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

وعندها يكون: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ،

وهذا يعني أنه إذا كان: $\overrightarrow{AB} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ ، فإن:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

ويكون متجه الوحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ هو $\mathbf{u} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$

مثال 5 التعبير عن المتجهات في الفضاء جبريًّا

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(-4, -2, 1)$، ونقطة نهايته $B(3, 6, -6)$، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$ الصورة الإحداثية لمتجه
$$= \langle 3-(-4), 6-(-2), -6-1 \rangle = \langle 7, 8, -7 \rangle$$ $(x_1, y_1, z_1) = (-4, -2, 1), (x_2, y_2, z_2) = (3, 6, -6)$

وباستعمال الصورة الإحداثية، فإن طول $\overrightarrow{AB}$ هو :

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 8^2 + (-7)^2}$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle$
$$= 9\sqrt{2}$$

ويستعمل هذا الطول والصورة الإحداثية؛ لإيجاد متجه وحدة $\mathbf{u}$ باتجاه $\overrightarrow{AB}$ كما يأتي:

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$ متجه وحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$
$$= \frac{\langle 7, 8, -7 \rangle}{9\sqrt{2}} = \left\langle \frac{7\sqrt{2}}{18}, \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{-7\sqrt{2}}{18} \right\rangle$$ $\overrightarrow{AB} = \langle 7, 8, -7 \rangle, |\overrightarrow{AB}| = 9\sqrt{2}$

تحقق من فهمك

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، ثم أوجد متجه الوحدة باتجاه $\overrightarrow{AB}$ في كلٍّ مما يأتي:

5A) $A(-2, -5, -5), B(-1, 4, -2)$ 5B) $A(-1, 4, 6), B(3, 3, 8)$

تدرب وحل المسائل

عيِّن كل نقطة مما يأتي في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 1)

1) $(1, -2, -4)$

2) $(3, 2, 1)$

3) $(-5, -4, -2)$

4) $(-2, -5, 3)$

5) $(2, -2, 3)$

6) $(-16, 12, -13)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المعطاة نقطتا نهايتها وبدايتها، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها في كلٍّ مما يأتي: (مثال 2)

7) $(-4, 10, 4), (1, 0, 9)$

8) $(-6, 6, 3), (-9, -2, -2)$

9) $(8, 3, 4), (-4, -7, 5)$

10) $(-7, 2, -5), (-2, -5, -8)$

11) **طيَّارون:** في لحظةٍ ما أثناء تدريب عسكري، كانت إحداثيات موقع طائرة $(675, -121, 19300)$، وإحداثيات موقع طائرةٍ أخرى $(-289, 715, 16100)$، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام. (مثال 2)

a) أوجد المسافة بين الطائرتين مقرَّبة إلى أقرب قدم.

b) عيّن إحداثيات النقطة التي تقع في منتصف المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة.

مثّل بيانيًا كلًّا من المتجهات الآتية في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد: (مثال 3)

12) $\mathbf{a} = \langle 0, -4, 4\rangle$

13) $\mathbf{b} = \langle -3, -3, -2\rangle$

14) $\mathbf{c} = \langle -1, 3, -4\rangle$

15) $\mathbf{d} = \langle 4, -2, -3\rangle$

16) $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

17) $\mathbf{w} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

18) $\mathbf{m} = 7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

19) $\mathbf{n} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات:
$\mathbf{a} = \langle -5, -4, 3\rangle, \mathbf{b} = \langle 6, -2, -7\rangle, \mathbf{c} = \langle -2, 2, 4\rangle$.
(مثال 4)

20) $6\mathbf{a} - 7\mathbf{b} + 8\mathbf{c}$

21) $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

22) $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c}$

23) $6\mathbf{b} + 4\mathbf{c} - 4\mathbf{a}$

24) $8\mathbf{a} - 5\mathbf{b} - \mathbf{c}$

25) $-6\mathbf{a} + \mathbf{b} + 7\mathbf{c}$

أوجد كلًّا مما يأتي للمتجهات:
$\mathbf{x} = -9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{y} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}, \mathbf{z} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
(مثال 4)

26) $7\mathbf{x} + 6\mathbf{y}$

27) $3\mathbf{x} - 5\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$

28) $4\mathbf{x} + 3\mathbf{y} + 2\mathbf{z}$

29) $-8\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + 5\mathbf{z}$

30) $-6\mathbf{y} - 9\mathbf{z}$

31) $-\mathbf{x} - 4\mathbf{y} - \mathbf{z}$

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المُعطاة نقطتا بدايته ونهايته، في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد متجه الوحدة في اتجاه $\overrightarrow{AB}$. (مثال 5)

32) $A(-5, -5, -9), B(11, -3, -1)$

33) $A(-4, 0, -3), B(-4, -8, 9)$

34) $A(3, 5, 1), B(0, 0, -9)$

35) $A(-3, -7, -12), B(-7, 1, 8)$

36) $A(2, -5, 4), B(1, 3, -6)$

37) $A(8, 12, 7), B(2, -3, 11)$

38) $A(3, 14, -5), B(7, -1, 0)$

39) $A(1, -18, -13), B(21, 14, 29)$

إذا كانت N منتصف $\overline{MP}$ ، فأوجد إحداثيات النقطة P في كلٍّ ممَّا يأتي:

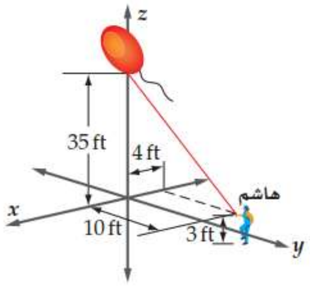
40) $M(3, 4, 5), N\left(\frac{7}{2}, 1, 2\right)$

41) $M(-1, -4, -9), N(-2, 1, -5)$

42) $M(7, 1, 5), N\left(5, -\frac{1}{2}, 6\right)$

43) $M\left(\frac{3}{2}, -5, 9\right), N\left(-2, -\frac{13}{2}, \frac{11}{2}\right)$

44) **تطوُّع:** تَطَوَّع هاشم لحمل بالونٍ كدليل في استعراض رياضي. إذا كان البالون يرتفع 35 ft عن سطح الأرض، ويمسك هاشم بالحبل الذي ثبت به البالون على ارتفاع 3 ft عن سطح الأرض، كما في الشكل أدناه، فأوجد طول الحبل إلى أقرب قدمٍ.



حدّد نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط الثلاث في كلٍّ مما يأتي (قائم الزاوية، أو متطابق الضلعين، أو مختلف الأضلاع):

45) $A(3, 1, 2)$, $B(5, -1, 1)$, $C(1, 3, 1)$

46) $A(4, 3, 4)$, $B(4, 6, 4)$, $C(4, 3, 6)$

47) $A(-1, 4, 3)$, $B(2, 5, 1)$, $C(0, -6, 6)$

48) **كرات:** استعمل قانون المسافة بين نقطتين في الفضاء؛ لكتابة صيغة عامة لمعادلة كرة مركزها (h, k, ℓ)، وطول نصف قطرها r .
"**إرشاد:** الكرة هي مجموعة نقاط في الفضاء تبعد بعدًا ثابتًا (نصف القطر) عن نقطة ثابتة (المركز)".

استعمل الصيغة العامة لمعادلة الكرة التي وجدتها في السؤال 48؛ لإيجاد معادلة الكرة المعطى مركزها، وطول نصف قطرها في كلٍّ مما يأتي:

49) مركزها $(-4, -2, 3)$ ، طول نصف قطرها 4

50) مركزها $(6, 0, -1)$ ، طول نصف قطرها $\frac{1}{2}$

51) مركزها $(5, -3, 4)$ ، طول نصف قطرها $\sqrt{3}$

52) مركزها $(0, 7, -1)$ ، طول نصف قطرها 12

مسائل مهارات التفكير العليا

53) **تحدٍّ:** إذا كانت M هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين: $M_1(-1, 2, -5), M_2(3, 8, -1)$ ، فأوجد إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة M_1M .

54) **اكتب:** اذكر موقفًا يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثنائي الأبعاد أكثر منطقية، وآخر يكون فيه استعمال النظام الإحداثي الثلاثي الأبعاد أكثر منطقية.

تدريب على اختبار

55) ما نوع المثلث الذي رؤوسه هي النقاط $A(0, 3, 5)$, $B(1, 0, 2)$, $C(0, -3, 5)$ ؟

A قائم الزاوية

B متطابق الضلعين

C متطابق الأضلاع

D مختلف الأضلاع

3-5

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء
Dot and Cross Products of Vectors in Space

فيما سبق:

درست الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى .

والآن:

- أجدُ الضرب الداخلي لمتجهين، والزاوية بينهما في الفضاء .
- أجدُ الضرب الاتجاهي للمتجهات ، وأستعمله في إيجاد المساحات والحجوم.

المفردات:

الضرب الاتجاهي
cross product

متوازي السطوح
parallelepiped

الضرب القياسي الثلاثي
triple scalar product

لماذا؟

يستعمل طارق المتجهات؛ ليتحقق ممَّا إذا كان خطَّا سير طائرتين متوازيين أم لا؛ وذلك بمعرفة إحداثيات نقطتَي الإقلاع، ونقطتين تصلان إليهما بعد فترة زمنية معينة.

الضرب الداخلي في الفضاء إيجاد الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء يشبه إيجاده لمتجهين في المستوى، وكما هي الحال مع المتجهات في المستوى، يتعامد متجهان غير صفريين في الفضاء، إذا وفقط إذا كان حاصل ضربهما الداخلي صفرًا.

مفهوم أساسي — الضرب الداخلي والمتجهات المتعامدة في الفضاء

يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ في الفضاء كالآتي:
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ ، ويكون المتجهان غير الصفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ متعامدين ، إذا وفقط إذا كان $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

مثال 1 — إيجاد الضرب الداخلي لتحديد المتجهات المتعامدة

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين:

a) $\mathbf{u} = \langle -7, 3, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 17, 5\rangle$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -7(5) + 3(17) + (-3)(5)$$
$$= -35 + 51 + (-15) = 1$$

وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \neq 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ غير متعامدين .

b) $\mathbf{u} = \langle 3, -3, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 7, 3\rangle$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 3(4) + (-3)(7) + 3(3)$$
$$= 12 + (-21) + 9 = 0$$

وبما أن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ ، فإن $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ متعامدان.

تحقق من فهمك

أوجد حاصل الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا:

1A) $\mathbf{u} = \langle 3, -5, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7, 5\rangle$

1B) $\mathbf{u} = \langle 4, -2, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3, -2\rangle$

وكما هو في المتجهات في المستوى، إذا كانت θ هي الزاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ في الفضاء فإن $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

مثال 2 — الزاوية بين متجهين في الفضاء

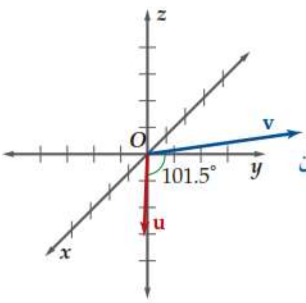
أوجد قياس الزاوية θ بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ، إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$ ، إلى أقرب جزءٍ من عشرة.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|\,|\mathbf{v}|}$$ الزاوية بين متجهين

$$\cos\theta = \frac{\langle 3, 2, -1\rangle\cdot\langle -4, 3, -2\rangle}{|\langle 3, 2, -1\rangle|\,|\langle -4, 3, -2\rangle|}$$ $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -2\rangle$

$$\cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{14}\sqrt{29}}$$ أوجد الضرب الداخلي، وطول كلٍّ من المتجهين

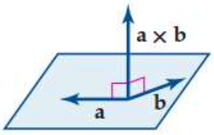
$$\theta = \cos^{-1}\frac{-4}{\sqrt{406}} \approx 101.5^\circ$$ بسِّط وحُل بالنسبة إلى θ



أي أن قياس الزاوية بين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ هو 101.5° تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) أوجد قياس الزاوية بين المتجهين: $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ ، إلى أقرب منزلةٍ عشرية.



الضرب الاتجاهي هو نوع آخر من الضرب بين المتجهات في الفضاء، وبخلاف الضرب الداخلي، فإن **الضرب الاتجاهي** لمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو متجه وليس عددًا، ويُرمز له بالرمز $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$، ويُقرأ a cross b ، ويكون المتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ عموديًّا على المستوى الذي يحوي المتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

مفهوم أساسي — الضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء

إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

هو المتجه: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

إذا طبَّقنا قاعدة حساب قيمة محدّدة من الدرجة الثالثة على المحدّدة أدناه، والتي تتضمن متجهات الوحدة $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ، وإحداثيات كلٍّ من $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإننا نتوصل إلى القاعدة نفسها للمتجه $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{بوضع متجهات الوحدة } \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ في الصف 1} \\ \longleftarrow \text{بوضع إحداثيات } \mathbf{a} \text{ في الصف 2} \\ \longleftarrow \text{بوضع إحداثيات } \mathbf{b} \text{ في الصف 3} \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

مثال 3 — إيجاد الضرب الاتجاهي لمتجهين

أوجد الضرب الاتجاهي $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ حيث: $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 3, 1 \rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

قاعدة إيجاد قيمة محدّدة الدرجة الثالثة $\quad = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k}$

أوجد قيمة محدّدة الدرجة الثانية $\quad = (-2 - 3)\mathbf{i} - [3 - (-3)]\mathbf{j} + (9 - 6)\mathbf{k}$

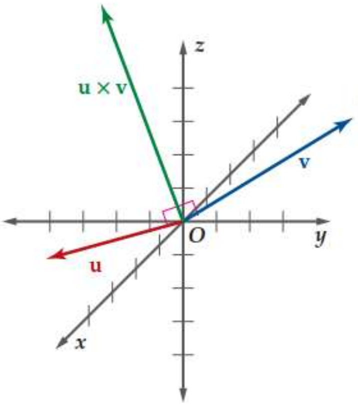
بسّط $\quad = -5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

الصورة الإحداثية $\quad = \langle -5, -6, 3 \rangle$

ولإثبات أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ جبريًّا، أوجد الضرب الداخلي لـ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ مع كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$	$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$
$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle 3, -2, 1 \rangle$	$= \langle -5, -6, 3 \rangle \cdot \langle -3, 3, 1 \rangle$
$= -5(3) + (-6)(-2) + 3(1)$	$= -5(-3) + (-6)(3) + 3(1)$
$= -15 + 12 + 3 = 0$ ✔	$= 15 + (-18) + 3 = 0$ ✔

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.



تحقق من فهمك

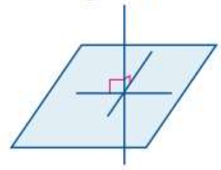
أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ ممايأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

3A) $\mathbf{u} = \langle 4, 2, -1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

3B) $\mathbf{u} = \langle -2, -1, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 1, 4 \rangle$

إرشادات للدراسة

يكون المستقيم عموديًا على مستوى، إذا كان عموديًا على كل مستقيم يقع في هذا المستوى ويتقاطع معه.

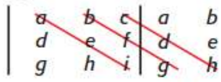


إرشادات للدراسة

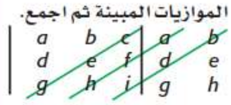
قاعدة الأقطار:
يمكنك استعمال قاعدة الأقطار لإيجاد محددة المصفوفة من الرتبة 3×3 التي درستها سابقًا وفق الخطوات الآتية:

خطوة 1: أعد كتابة العمود الأول والثاني عن يمين المحدّدة.

خطوة 2: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.



خطوة 3: أوجد حاصل ضرب عناصر القطر الآخر وثلاثيات العناصر على الموازيات المبينة ثم اجمع.



خطوة 4: لإيجاد قيمة المحدّدة نطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

تنبيه!

الضرب الاتجاهي

– يطبق الضرب الاتجاهي على المتجهات في نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد فقط، ولا يطبق على المتجهات في المستوى الإحداثي.

– الضرب الاتجاهي ليس إبداليًا $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a})$

للضرب الاتجاهي تطبيقات هندسية عديدة، فمثلًا مقدار المتجه $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ أو المقدار $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ يُعبِّر عن مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران كما في الشكل 1.5.1 .

مثال 4 مساحة متوازي أضلاعٍ في الفضاء

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ضلعان متجاوران.

الخطوة 1 أوجد $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثالثة

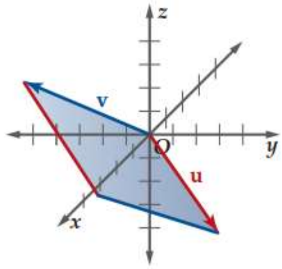
$$= -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$$ بإيجاد قيمة محدِّدة الدرجة الثانية

الخطوة 2 أوجد طول $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + (-14)^2}$$ طول متجه في الفضاء

$$= \sqrt{286} \approx 16.91$$ بسِّط

أي أن مساحة متوازي الأضلاع في الشكل 3.5.1 ، تساوي 16.91 وحدةً مربعةً تقريبًا.



الشكل 3.5.1

تحقق من فهمك

4) أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه: $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ضلعان متجاوران .

الضرب القياسي الثلاثي إذا التقت ثلاثة متجهات في مستويات مختلفة في نقطة البداية، فإنها تكوّن أحرفًا متجاورة **لمتوازي سطوح**، وهو عبارة عن مجسم له ستة أوجهٍ، كل وجهٍ منها على شكل متوازي أضلاع كما في الشكل 3.5.2 أدناه، إن القيمة المطلقة **للضرب القياسيّ الثلاثي** لهذه المتجهات هو عدد يُمثّل حجم متوازي السطوح.

مفهوم أساسي الضرب القياسي الثلاثي

إذا كان: $\mathbf{t} = t_1\mathbf{i} + t_2\mathbf{j} + t_3\mathbf{k}, \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ،

فإن الضرب القياسي الثلاثي للمتجهات $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ يُعرف كالآتي

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

مثال 5 حجم متوازي السطوح

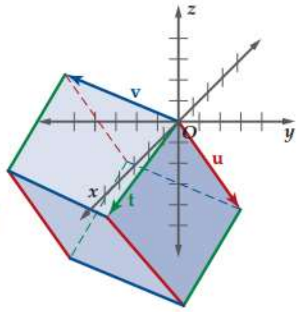
أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

$$\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \mathbf{t} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ \mathbf{v} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}(4) - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-2) + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}(-2)$$ أوجد قيمة محدِّدة المصفوفة من الرتبة 3×3

$$= -12 + 18 + 28 = 34$$ بسِّط

أي أن حجم متوازي السطوح في الشكل 3.5.2 هو $|\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|$ ، ويساوي 34 وحدةً مكعبةً.



الشكل 3.5.2

تحقق من فهمك

5) أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه: $\mathbf{t} = 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{u} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ أحرف متجاورة.

تدرب وحل المسائل

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدِّد ما إذا كانا متعامدين أم لا: (مثال 1)

1) $\mathbf{u} = \langle 3, -9, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, 2, 7\rangle$

2) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -1, 4\rangle$

3) $\mathbf{u} = \langle -7, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -4, 5, -13\rangle$

4) $\mathbf{u} = \langle 11, 4, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3, 8\rangle$

5) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

6) $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

7) **كيمياء:** تقع إحدى ذرتَي الهيدروجين في جُزيءِ الماء عند $\langle 55.5, 55.5, -55.5\rangle$، والأخرى عند $\langle -55.5, -55.5, -55.5\rangle$، وذلك في الوقت الذي تقع فيه ذرة الأكسجين في نقطة الأصل. أوجد الزاوية بين المتجهين اللّذين يكوّنان رابطة الأكسجين – الهيدروجين مقرّبة إلى أقرب جزء من عشرة. (مثال 2)

أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، وقرّب الناتج إلى أقرب جزءٍ من عشرة: (مثال 2)

8) $\mathbf{u} = \langle 6, -5, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -8, -9, 5\rangle$

9) $\mathbf{u} = \langle -8, 1, 12\rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 4, 2\rangle$

10) $\mathbf{u} = \langle 10, 0, -8\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -1, -12\rangle$

11) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$: (مثال 3)

12) $\mathbf{u} = \langle -1, 3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -6, -3\rangle$

13) $\mathbf{u} = \langle 4, 7, -2\rangle, \mathbf{v} = \langle -5, 9, 1\rangle$

14) $\mathbf{u} = \langle 3, -6, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5, -8\rangle$

15) $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 7\mathbf{i} + \mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد مساحة متوازي الأضلاع الذي فيه $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ضلعان متجاوران في كلٍّ مما يأتي: (مثال 4)

16) $\mathbf{u} = \langle -9, 1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, -5, 3\rangle$

17) $\mathbf{u} = \langle 4, 3, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 7, 2, -2\rangle$

18) $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$

19) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

أوجد حجم متوازي السطوح الذي فيه $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ أحرف متجاورة في كلٍّ مما يأتي: (مثال 5)

20) $\mathbf{t} = \langle -1, -9, 2\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -7, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2, 6\rangle$

21) $\mathbf{t} = \langle 2, -3, -1\rangle, \mathbf{u} = \langle 4, -6, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle -9, 5, -4\rangle$

22) $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

23) $\mathbf{t} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \mathbf{v} = 8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

أوجد متجهًا غير صفري يعامد المتجه المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

24) $\langle 3, -8, 4\rangle$

25) $\langle -1, -2, 5\rangle$

26) $\left\langle 6, -\frac{1}{3}, -3\right\rangle$

27) $\langle 7, 0, 8\rangle$

إذا عُلم كلٌّ من $\mathbf{v}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، فأوجد حالةً ممكنةً للمتجه $\mathbf{u}$ في كلٍّ مما يأتي:

28) $\mathbf{v} = \langle 2, -4, -6\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -22$

29) $\mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, 0, 4\right\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{31}{2}$

30) $\mathbf{v} = \langle -2, -6, -5\rangle, \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 35$

حدّد ما إذا كانت النقاط المعطاة واقعةً على استقامةٍ واحدةٍ أم لا:

31) $(-1, 7, 7), (-3, 9, 11), (-5, 11, 13)$

32) $(11, 8, -1), (17, 5, -7), (8, 11, 5)$

حدّد ما إذا كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

33) $\mathbf{m} = \langle 2, -10, 6\rangle, \mathbf{n} = \langle 3, -15, 9\rangle$

34) $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -7\rangle, \mathbf{b} = \langle -4, -2, 3\rangle$

35) اكتب الصورة الإحداثية للمتجه $\mathbf{u}$ الذي يقع في المستوى yz، وطوله 8، ويصنع زاويةً قياسها $60°$ فوق الاتجاه الموجب للمحور y.

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي $ABCD$ المُعطاة إحداثيات رؤوسه متوازي أضلاع أم لا، وإذا كان كذلك، فأوجد مساحته، وحدِّد ما إذا كان مستطيلًا أم لا:

36) $A(3, 0, -2), B(0, 4, -1), C(0, 2, 5), D(3, 2, 4)$

37) $A(7, 5, 5), B(4, 4, 4), C(4, 6, 2), D(7, 7, 3)$

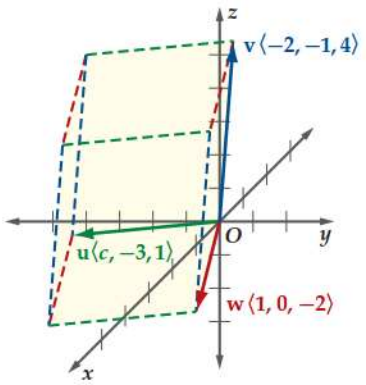
38) **عرض جوي:** أقلعت طائرتان معًا في عرض جوي، فأقلعت الأولى من موقع إحداثياته $(0, -2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, -10, 15)$، في حين أقلعت الثانية من موقع إحداثياته $(0, 2, 0)$، وبعد 3 ثوانٍ وصلت موقعًا إحداثياته $(6, 10, 15)$. هل يتوازى خطّا سير الطائرتين؟ وضِّح إجابتك.

إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -2 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -4, 4, 5 \rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي إن أمكن:

39) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

40) $\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

41) **إذا كانت $\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}$ تُمثِّل ثلاثة أحرف متجاورة لمتوازي السطوح في الشكل المجاور، وكان حجمه 7 وحداتٍ مكعبةٍ، فما قيمة c؟**



مسائل مهارات التفكير العليا

42) **تبرير:** حدّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، برِّر إجابتك.

«لأي متجهين غير صفريين وغير متوازيين، يوجد متجه عمودي على هذين المتجهين».

43) **تحدٍّ:** إذا كان: $\mathbf{u} = \langle 4, 6, c \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle -3, -2, 5 \rangle$ ، فأوجد قيمة c التي تجعل: $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 34\mathbf{i} - 26\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$.

44) **تبرير:** فسِّر لماذا لا يمكن تعريف الضرب الاتجاهي في المستوى.

45) **اكتب:** بيِّن طرق الكشف عن توازي متجهَين أو تعامدهما.

تدريب على اختبار

46) أيٌّ مما يأتي متجهان متعامدان؟

A $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 1, 2, 3 \rangle$

B $\langle 1, -2, 3 \rangle$, $\langle 2, -4, 6 \rangle$

C $\langle 3, 4, 6 \rangle$, $\langle 6, 4, 3 \rangle$

D $\langle 3, -5, 4 \rangle$, $\langle 6, 2, -2 \rangle$

47) ما حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle 3, 8, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2, 6 \rangle$؟

A $48\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

B $48\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

C $46\mathbf{i} - 22\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

D $46\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$

الوحدة 3

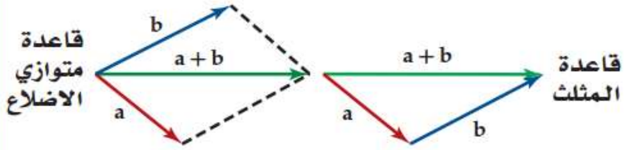
دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

مفاهيم أساسية

مقدمة في المتجهات (الدرس 3-1)

- يُعبَّر عن اتجاه المتجه بالزاوية بين المتجه، والأفقي. ومقدار المتجه هو طوله.
- ناتج جمع متجهين هو متجه يُسمى المحصّلة، ويمكن إيجاده باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع.



المتجهات في المستوى الإحداثي (الدرس 3-2)

- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع القياسي هي $\langle x, y\rangle$.
- الصورة الإحداثية للمتجه في الوضع غير القياسي الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$، ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي: $\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$.
- يُعطى طول المتجه $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2\rangle$ بالصيغة $|\mathbf{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$
- إذا كان: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle, \mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ متجهين، وكان k عددًا حقيقيًّا، فإن: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2\rangle$ ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2\rangle$ ، $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2\rangle$
- يمكن استعمال متجهَي الوحدة $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ للتعبير عن المتجه $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ على الصورة $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

الضرب الداخلي (الدرس 3-3)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ بالصيغة: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$
- إذا كانت θ زاوية بين متجهين غير صفريين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ، فإن: $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$

المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الدرس 3-4)

- تعطى المسافة بين النقطتين $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ بالصيغة:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- تعطى نقطة منتصف $\overline{AB}$ بالصيغة:

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء (الدرس 3-5)

- يُعرَّف الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ بالصيغة $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- إذا كان: $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ ، فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ هو $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$. ويساوي $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

المفردات

كمية قياسية عددية ص 84
كمية متجهة ص 84
المتجه ص 84
نقطة البداية ص 84
نقطة النهاية ص 84
قطعة مستقيمة متجهة ص 84
طول المتجه ص 84
الوضع القياسي ص 84
اتجاه المتجه ص 84
الاتجاه الربعي ص 85
الاتجاه الحقيقي ص 85
المتجهات المتوازية ص 85
المتجهات المتساوية ص 85
معكوس المتجه ص 85
المحصلة ص 86
قاعدة المثلث ص 86
قاعدة متوازي الأضلاع ص 86
المتجه الصفري ص 87
المركبات ص 88
المركبات المتعامدة ص 88
الصورة الإحداثية ص 92
متجه الوحدة ص 94
متجها الوحدة القياسيّان ص 94
توافق خطّيّ ص 95
الضرب الداخلي ص 100
المتجهان المتعامدان ص 100
الزاوية بين متجهين ص 101
الشغل ص 103
نظام الإحداثيات الثلاثي الأبعاد ص 107
المحور z ص 107
الثُمن ص 107
الثلاثي المرتب ص 107
الضرب الاتجاهي ص 114
متوازي السطوح ص 115
الضرب القياسي الثلاثي ص 115

اختبر مفرداتك

حدّد ما إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم خاطئة، وإذا كانت خاطئة فاستبدل ما تحته خط لتصبح العبارة صحيحة:

1) نقطة نهاية المتجه هي الموقع الذي يبدأ منه .

2) إذا كان: $\mathbf{a} = \langle -4, 1\rangle$ ، $\mathbf{b} = \langle 3, 2\rangle$ ، فإن الضرب الداخلي للمتجهين هو $-4(1) + 3(2)$.

3) نقطة منتصف $\overline{AB}$ عندما تكون $A(x_1, y_1, z_1)$ ، $B(x_2, y_2, z_2)$ هي $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

4) طول المتجه $\mathbf{r}$ الذي نقطة بدايته $A(-1, 2)$ ، ونقطة نهايته $B(2, -4)$ هو $\langle 3, -6\rangle$.

5) يتساوَى متجهان إذا وفقط إذا كان لهما الطول نفسه، والاتجاه نفسه.

6) إذا تعامد متجهان غير صفريين، فإن قياس الزاوية بينهما $180°$.

7) لتجد متجهًا يعامد أي متجهين على الأقل في الفضاء، أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين الأصليين.

8) طرح متجه يكافئ إضافة معكوس المتجه.

9) إذا كان $\mathbf{v}$ متجه وحدةٍ باتجاه $\mathbf{u}$، فإن $\mathbf{v} = \dfrac{|\mathbf{u}|}{\mathbf{u}}$.

مراجعة الدروس

3-1 مقدمة في المتجهات (الصفحات 91 - 84)

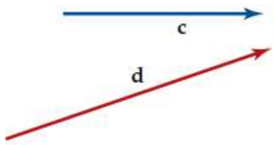
حدِّد الكميات المتجهة، والكميات القياسية في كلٍّ مما يأتي:

10) تسير سيارة بسرعة 50 mi/h باتجاه الشرق.

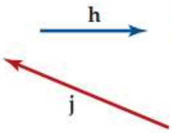
11) شجرة طولها 20 ft.

أوجد محصلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي، مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

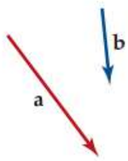
12)



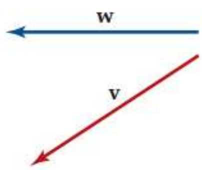
13)



14)



15)



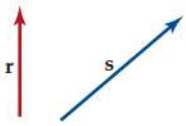
أوجد طول المحصِّلة لناتج جمع المتجهين واتجاهها في كلٍّ مما يأتي:

16) 70 m جهة الغرب، ثم 150 m جهة الشرق.

17) 8 N للخلف، ثم 12 N للخلف.

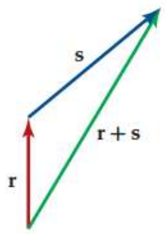
مثال 1

أوجد محصلة المتجهين r, s مستعملًا قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع. قرِّب المحصّلة إلى أقرب جزء من عشرة من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.



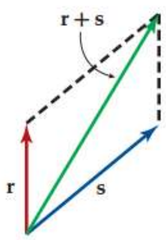
قاعدة المثلث

اسحب **r** ، بحيث تلتقي نقطة نهاية **r** مع نقطة بداية **s** ، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يبدأ من نقطة بداية **r** ، وينتهي عند نقطة نهاية **s**.



قاعدة متوازي الأضلاع

اسحب **s** ، بحيث تلتقي نقطة بدايته مع نقطة بداية **r** ، ثم أكمل متوازي الأضلاع الذي فيه **r, s** ضلعان متجاوران، فتكون المحصلة هي المتجه الذي يكوّن قطر متوازي الأضلاع.



فيكون طول المحصلة 3.4 cm ، وقياس زاويتها °59 مع الأفقي.

دليل الدراسة والمراجعة

3-2 المتجهات في المستوى الإحداثي (الصفحات 99 - 92)

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

18) $A(-1, 3), B(5, 4)$

19) $A(7, -2), B(-9, 6)$

20) $A(-8, -4), B(6, 1)$

21) $A(2, -10), B(3, -5)$

إذا كان: $\mathbf{p} = \langle 4, 0\rangle$ ، $\mathbf{q} = \langle -2, -3\rangle$ ، $\mathbf{t} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

22) $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$

23) $\mathbf{p} + 2\mathbf{t}$

24) $\mathbf{t} - 3\mathbf{p} + \mathbf{q}$

25) $2\mathbf{p} + \mathbf{t} - 3\mathbf{q}$

أوجد متجه وحدة **u** باتجاه **v** في كلٍّ مما يأتي:

26) $\mathbf{v} = \langle -7, 2\rangle$

27) $\mathbf{v} = \langle 3, -3\rangle$

28) $\mathbf{v} = \langle -5, -8\rangle$

29) $\mathbf{v} = \langle 9, 3\rangle$

مثال 2

أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overrightarrow{AB}$ الذي نقطة بدايته $A(3, -2)$ ، ونقطة نهايته $B(4, -1)$.

$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$ الصورة الإحداثية

$= \langle 4 - 3, -1 - (-2)\rangle$ عوّض

$= \langle 1, 1\rangle$ اطرح

أوجد طول المتجه $\overrightarrow{AB}$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2}$ قانون المسافة

$= \sqrt{1^2 + 1^2}$ عوّض

$= \sqrt{2} \approx 1.4$ بسّط

3-3 الضرب الداخلي (الصفحات 105 - 100)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u, v** في كلٍّ ممَّا يأتي، ثم تحقَّق ممَّا إذا كانا متعامدين أم لا:

30) $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$

31) $\mathbf{u} = \langle 4, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 5, 7\rangle$

32) $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2\rangle$

33) $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 3\rangle$

أوجد الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كلٍّ ممَّا يأتي:

34) $\mathbf{u} = \langle 5, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$

35) $\mathbf{u} = \langle -1, 8\rangle, \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$

مثال 3

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين: $\mathbf{x} = \langle 2, -5\rangle$ ، $\mathbf{y} = \langle -4, 7\rangle$ ، ثم تحقق مما إذا كانا متعامدين أم لا.

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ الضرب الداخلي

$= 2(-4) + (-5)(7)$ عوّض

$= -8 + (-35) = -43$ بسّط

بما أن $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \neq 0$ ، فإن المتجهين **x** ، **y** غير متعامدين.

3-4 المتجهات في الفضاء الثلاثي الأبعاد (الصفحات 112 - 107)

عيِّن كل نقطة من النقاط الآتية في الفضاء الثلاثي الأبعاد:

36) $(1, 2, -4)$

37) $(3, 5, 3)$

38) $(5, -3, -2)$

39) $(-2, -3, -2)$

أوجد طول القطعة المستقيمة المُعطاة نقطتا طرفَيها في كلٍّ مما يأتي، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصفها.

40) $(-4, 10, 4), (2, 0, 8)$

41) $(-5, 6, 4), (-9, -2, -2)$

42) $(3, 2, 0), (-9, -10, 4)$

43) $(8, 3, 2), (-4, -6, 6)$

مثّل بيانيًّا كلًّا من المتجهات الآتية في الفضاء:

44) $\mathbf{a} = \langle 0, -3, 4 \rangle$

45) $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

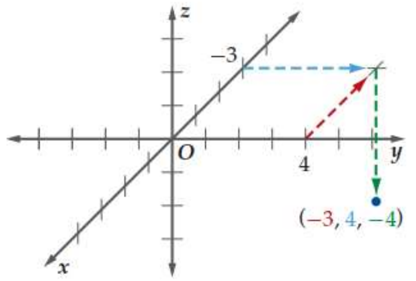
46) $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

47) $\mathbf{d} = \langle -4, -5, -3 \rangle$

مثال 4

عيّن النقطة $(-3, 4, -4)$ في الفضاء الثلاثي الأبعاد .

حدّد موقع النقطة $(-3, 4)$ في المستوى xy بوضع إشارة، ثم عيّن نقطةً تبعد 4 وحداتٍ أسفل هذه النقطة، وباتجاه موازٍ للمحور z .



3-5 الضرب الداخلي والضرب الاتجاهي للمتجهات في الفضاء (الصفحات 117 - 113)

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم حدّد ما إذا كانا متعامدين أم لا.

48) $\mathbf{u} = \langle 2, 5, 2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 8, 2, -13 \rangle$

49) $\mathbf{u} = \langle 5, 0, -6 \rangle, \mathbf{v} = \langle -6, 1, 3 \rangle$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ في كلٍّ مما يأتي، ثم بيِّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلاًّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$:

50) $\mathbf{u} = \langle 1, -3, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 4, -3 \rangle$

51) $\mathbf{u} = \langle 4, 1, -2 \rangle, \mathbf{v} = \langle 5, -4, -1 \rangle$

مثال 5

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين: $\mathbf{u} = \langle -4, 2, -3 \rangle$ ، $\mathbf{v} = \langle 7, 11, 2 \rangle$ ، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلاًّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$$= \langle 37, -13, -58 \rangle$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle -4, 2, -3 \rangle$$

$$= -148 - 26 + 174 = 0 \checkmark$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \langle 37, -13, -58 \rangle \cdot \langle 7, 11, 2 \rangle$$

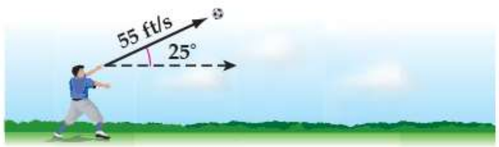
$$= 259 - 143 - 116 = 0 \checkmark$$

بما أن حاصل الضرب الداخلي في الحالتين يساوي صفرًا، فإن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ عمودي على كلٍّ من $\mathbf{u}, \mathbf{v}$

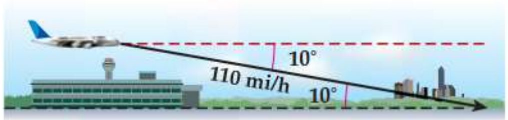
دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

52) كرة قدم: تلقَّى لاعب كرة قدم الكرة برأسه، فارتدَّت بسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 55 ft/s ، وبزاويةٍ قياسها °25 فوق الأفقي كما في الشكل أدناه. أوجد مقدار كلٍّ من المركبتين الأفقية، والرأسية للسرعة. (الدرس 1-3)



53) طيران: تهبط طائرة بسرعة مقدارها 110 mi/h ، وبزاوية قياسها °10 تحت الأفقي، أوجد الصورة الإحداثية للمتجه الذي يُمثّل سرعة الطائرة. (الدرس 2-3)



54) صناديق: يدفع عامل صندوقًا بقوةٍ ثابتةٍ مقدارها 90 N بزاوية °45 في الشكل أدناه. أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك الصندوق 8 m (مع إهمال قوة الاحتكاك). (الدرس 3-3)

55) أقمار اصطناعية: إذا مَثَّلت النقطتان: (28625, 32461, −38426)، (−31613, −29218, 43015) موقِعَي قمرين اصطناعيين، ومَثَّلَتِ النقطة (0, 0, 0) مركز الأرض، وعلمت أن الإحداثيات معطاة بالميل، وأن طول نصف قطر الأرض يساوي 3963 mi تقريبًا، فأجب عمَّا يأتي: (الدرس 4-3)

a) أوجد المسافة بين القمرين.

b) إذا وضع قمر ثالث في منتصف المسافة بين القمرين، فما إحداثيات موقعه؟

c) اشرح إمكانية وضع قمر ثالث في الإحداثيات التي أوجدتها في الفرع **b** .

56) استعمل الضرب القياسي الثلاثي لحساب حجم غرفةٍ أبعادها 3 m, 4 m, 5 m

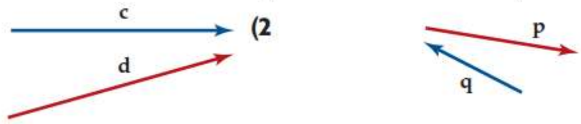
"إرشاد: اعتبر متوازي المستطيلات حالةً خاصةً من متوازي السطوح". (الدرس 5-3)

اختبار الوحدة

أوجد محصِّلة كل زوج من المتجهات الآتية باستعمال قاعدة المثلث، أو قاعدة متوازي الأضلاع، قرِّب المحصلة إلى أقرب جزءٍ من عشرةٍ من السنتمتر، ثم حدِّد اتجاهها بالنسبة للأفقي مستعملًا المسطرة، والمنقلة.

(1

(2

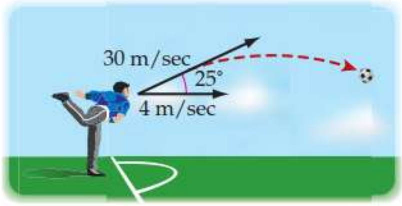


أوجد الصورة الإحداثية، وطول $\overline{AB}$ المعطاة نقطتا بدايته ونهايته في كلٍّ مما يأتي:

(3 $A(1, -3), B(-5, 1)$

(4 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B(-1, 7)$

(5 **كرة قدم:** ركض لاعب بسرعة 4 m/s ؛ للتصدي لكرة قادمة من الاتجاه المعاكس لحركته، فضربها برأسه بسرعة 30 m/s ، وبزاوية قياسها $25°$ مع الأفقي، فما محصّلة سرعة الكرة، واتجاه حركتها؟



أوجد متجه وحدة باتجاه **u** في كلٍّ مما يأتي:

(6 $\mathbf{u} = \langle -1, 4\rangle$

(7 $\mathbf{u} = \langle 6, -3\rangle$

أوجد الضرب الداخلي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن ما إذا كانا متعامدين أم لا:

(8 $\mathbf{u} = \langle 2, -5\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$

(9 $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \mathbf{v} = \langle 6, 8\rangle$

(10 $\mathbf{u} = 10\mathbf{i} - 3\mathbf{j}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

(11 **اختيار من متعدد:** إذا علمت أن: $\mathbf{u} = \langle 1, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 2\rangle$ ، فأيٌّ مما يأتي يُمثّل ناتج جمع متجهين متعامدين أحدهما مسقط **u** على **v** ؟

A $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{18}{5}\right\rangle$

B $\mathbf{u} = \left\langle \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{3}{5}, \frac{12}{5}\right\rangle$

C $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right\rangle$

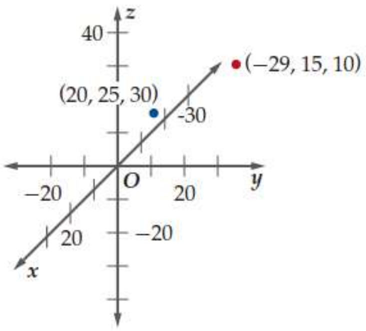
D $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right\rangle + \left\langle \frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right\rangle$

إذا كان: $\mathbf{a} = \langle 2, 4, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, -7, 1\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 8, 5, -9\rangle$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

(12 $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$

(13 $\mathbf{b} - 6\mathbf{a} + 2\mathbf{c}$

(14 **بالونات الهواء الساخن:** أُطلق 12 بالونًا تحوي هواءً ساخنًا في أحد المهرجانات، وبعد عدة دقائق من الإطلاق، كانت إحداثيات البالونين الأول والثاني هي: $(20, 25, 30)$, $(-29, 15, 10)$ كما في الشكل أدناه ، علمًا بأن الإحداثيات معطاة بالأقدام.



a) أوجد المسافة بين البالونين الأول والثاني في تلك اللحظة.

b) إذا كان البالون الثالث عند نقطة منتصف المسافة بين البالونين الأول والثاني، فأوجد إحداثياته.

أوجد الزاوية θ بين المتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي:

(15 $\mathbf{u} = \langle -2, 4, 6\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, 7, 12\rangle$

(16 $\mathbf{u} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 11\mathbf{k}, \mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

أوجد الضرب الاتجاهي للمتجهين **u, v** في كلٍّ مما يأتي، ثم بيّن أن $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ يعامد كلًّا من **u, v** :

(17 $\mathbf{u} = \langle 1, 7, 3\rangle, \mathbf{v} = \langle 9, 4, 11\rangle$

(18 $\mathbf{u} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2=4p(x-h)$ أو $(x-h)^2=4p(y-k)$	الدائرة	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ أو $x^2+y^2=r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta=\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\csc\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cot\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$		$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الهندسة الإحداثية

المسافة	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	نقطة المنتصف	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
الميل	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, x_2\neq x_1$		

كثيرات الحدود

القانون العام	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, a\neq 0$	مربع الفرق	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
مربع المجموع	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	الفرق بين مربعين	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

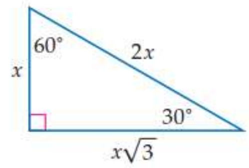
الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

$30°-60°-90°$

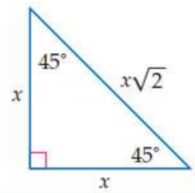
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\tan 60° = \sqrt{3}$



$45°-45°-90°$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\tan 45° = 1$

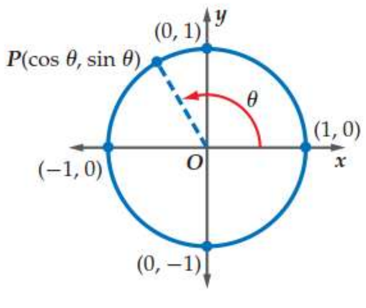


دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x,y)$،

فإن $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$. أي أن: $P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x,y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل