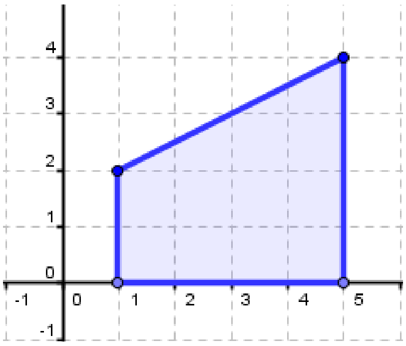
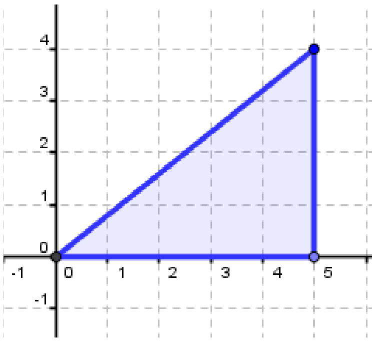
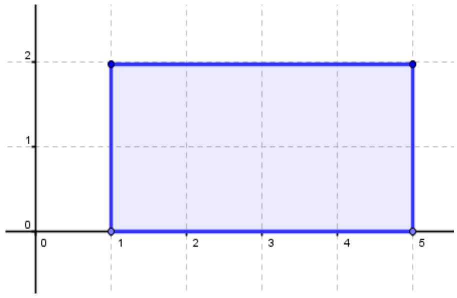
التكاملات المحدودة – طريقة التقريب بالمستطيلات

نشاط

1) أوجدي مساحات الأشكال التالية :

2) الدالة $y = 2x^2 + 5x + 1$ أوجدي

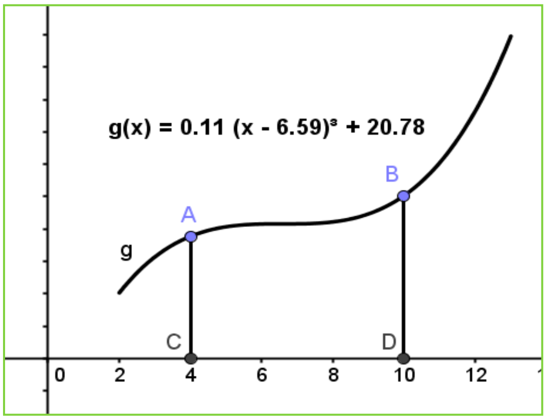
a) $f(1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

c) $f\left(\frac{3}{5}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) $g(x) = 0.11\,(x - 6.59)^3 + 20.78$

أوجدي طول كل من

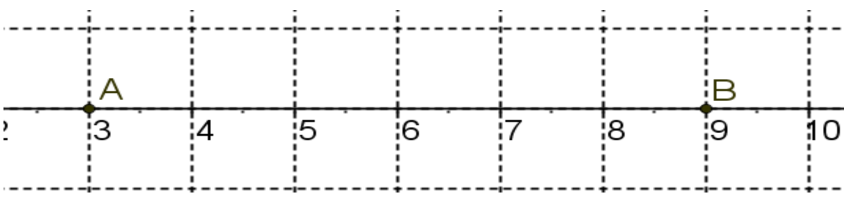


a) AC = ……………………………

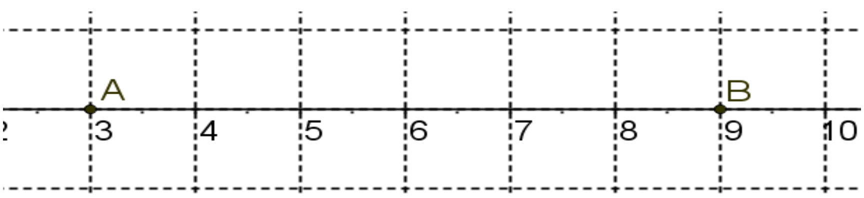
b) BD = …………………………...

4) قسمي المسافة التي أمامك إلى

أ) إلى 3 أجزاء متساوية .



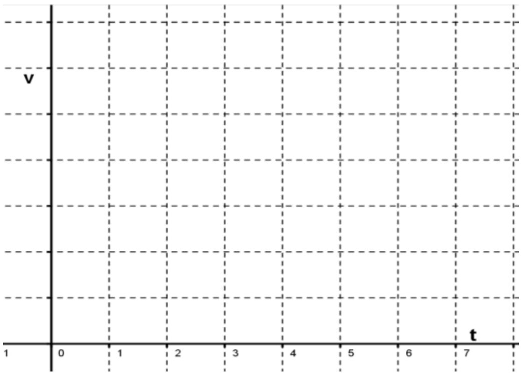
ب) إلى 12 جزء متساوي .



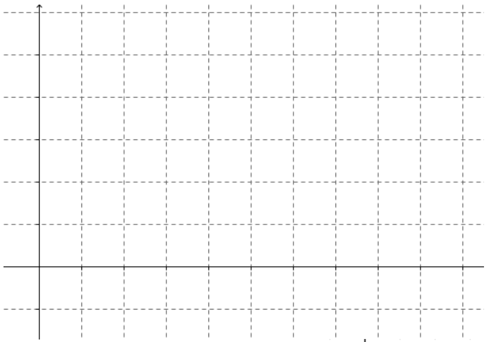
ورقة عمل :

1) تحرك شخص بسرعة ثابتة 3m/sec لمدة 5sec فما المسافة المقطوعة ؟

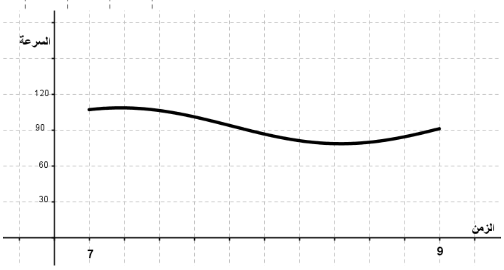
إذا مثل ذلك على المخطط البياني التالي : ماذا تلاحظين



يتحرك قطار بسرعة ثابتة 75mi/h من الساعة 7 صباحا إلى الساعة 9 صباحا .
اوجد المسافة الكلية التي يقطعها القطار . ثم ارسم بيانيا حركة القطار .
ووضح على الرسم ما توصلت له جبريا



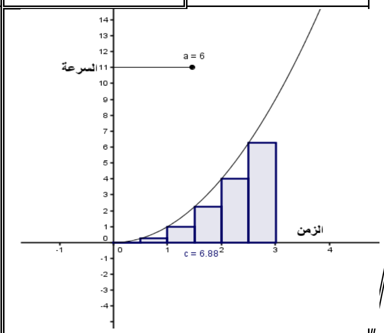
ولكن ماذا لو تحرك القطار بسرعة متجهة تتغير كدالة بالنسبة للزمن ؟

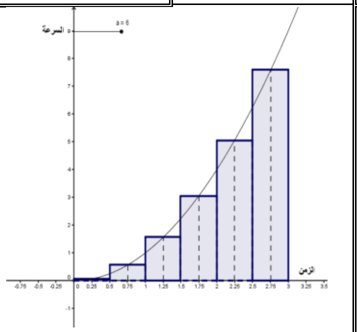


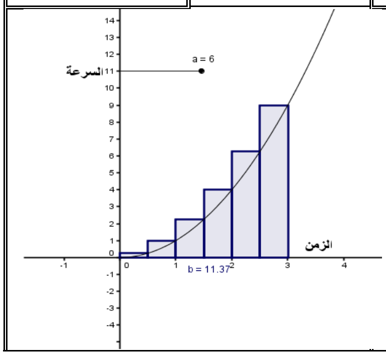
مثال :

يبدأ جسيم عند x=0 ويتحرك على محور السينات بسرعة متجهة $v(t) = t^2$ حيث الزمن $t \geq 0$ أين يكون الجسيم عند t=3 ؟

ن	التقريب اليساري			التقريب المنتصفي			التقريب اليميني		
	m_l	الإرتفاع= $(m_l)^2$	المساحة=	m_i	الإرتفاع= $(m_i)^2$	المساحة=	m_r	الإرتفاع= $(m_r)^2$	المساحة=
	مجموع المساحات			مجموع المساحات			مجموع المساحات		





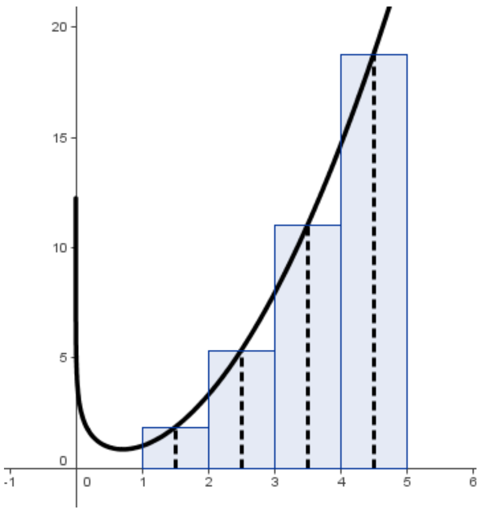


تمارين :

1) اعتبر المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=x^2+2x$ ومحور السينات على الفترة $1\le x\le 9$. أوجد التقريب المستطيلي الأيمن للمساحة باستخدام 4 مستطيلات منشأة على النقاط الطرفية اليمنى .

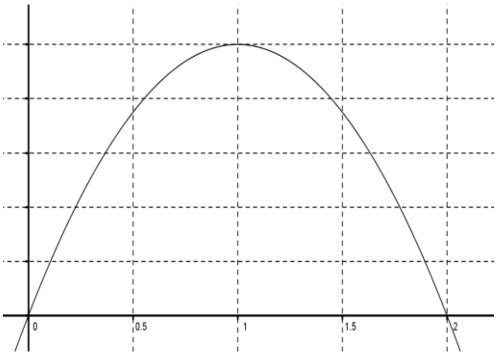
2) اعتبر المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $g(x)=2+3x$ ومحور السينات على الفترة $1\le x\le 9$. أوجد التقريب المستطيلي الأيسر للمساحة باستخدام 4 مستطيلات منشأة على النقاط الطرفية اليسرى .

3) اعتبر المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)=x^2-\ln x$ ومحور السينات على الفترة $1\le x\le 5$ أوجد التقريب المستطيلي الوسطى للمساحة الناتجة باستخدام 4 مستطيلات منشأة على نقاط المنتصف .

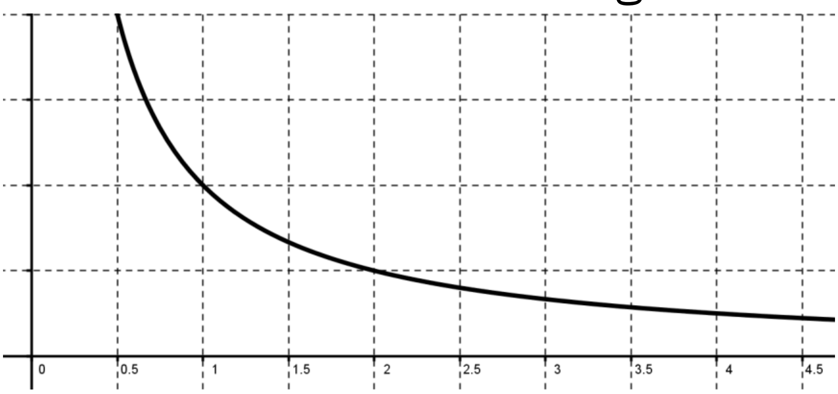


تعلم ذاتي: (التقريب المستطيلي) Rectangular Approximation Method (RAM)

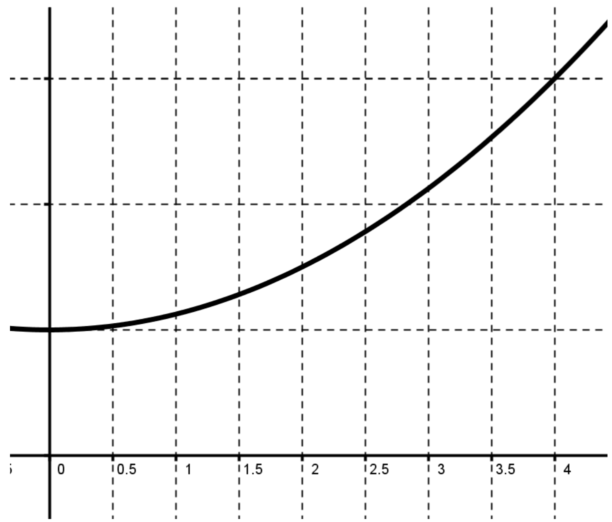
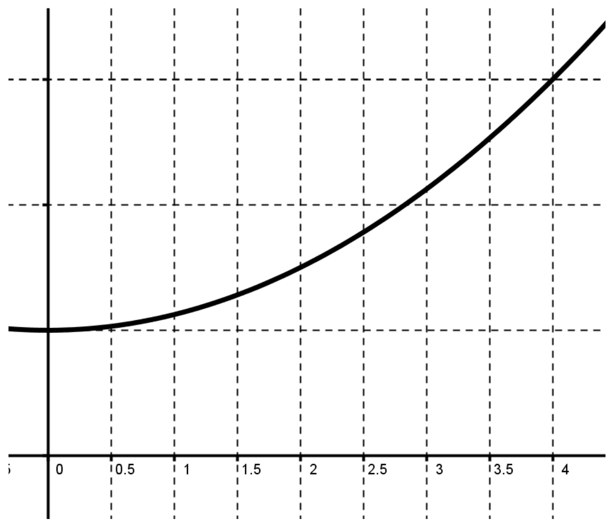
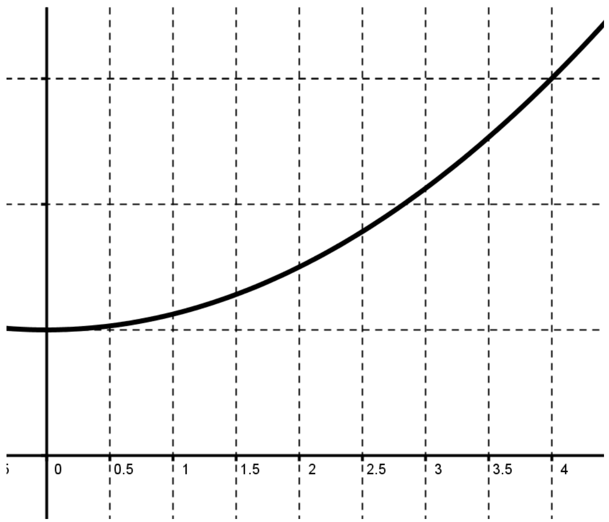
1) بالرجوع للمنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y=2x-x^2$ ومحور السينات في الفترة $0\le x\le 2$. جزئ الفترة [0,2] إلى فترات جزئية وبين المستطيلات الأربعة التي يستخدمها التقريب اليساري لايجاد قيمة تقريبية للمساحة تحت المنحنى



2) بالرجوع للمنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y=\frac{1}{x}$ ومحور السينات في الفترة $1\le x\le 4$. جزئ الفترة [1,4] إلى فترات جزئية وبين المستطيلات الستة التي يستخدمها التقريب اليميني لايجاد قيمة تقريبية للمساحة تحت المنحنى



3) بالرجوع للمنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $y=\frac{1}{8}t^2+1$ ومحور السينات في الفترة $0 \le x \le 4$. جزئ الفترة $[1,4]$ إلى فترات جزئية وبين المستطيلات الستة التي يمكن استخدامها التقريب بالمستطيلات تبعا للجدول التالي:

التقريب اليميني	التقريب المنتصفي	التقريب اليساري
		

التكاملات المحدودة ـ ريمان

Summation Notation

أوجدي قيمة كل مما يلي:-

1) $\sum_{n=1}^{4} n^2$

2) $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$

أكتب كلا مما يلي علي صورة $\sum$:-

3) 2+3+4+……+49+50

4) 2+4+6+8+…….+89+100

5) $3(1)^3 + 3(2)^3 + \ldots\ldots + 3(100)^3$

مجاميع ريمان :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \bullet \Delta x_k$ هذا المجموع يتوقف على التجزئ P واختيار الأعداد C_k هو مجموع ريمان للدالة f على الفترة [a,b] .

وعندما يصبح أطوال الفترات الجزئية تتجه نحو الصفر (تسمى معيار التجزئ ويرمز له بالرمز $\|P\|$) فإن التقريبات اليسارية والمنتصفية واليمينة تتقارب إلى قيمة مشتركة ومجاميع ريمان لدالة معينة على الفترة [a,b] تتقارب في نهاية إلى قيمة مشتركة .

تعريف : التكامل المحدود كنهاية لمجاميع ريمان :

f دالة معرفة على فترة مغلقة [a,b] لأي تجزئ P ، C_k عدد في الفترة الجزئية $[x_{k-1}, x_k]$ ، وإذا وجد عدد I بحيث $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I$ مهما كانت طريقة اختيار P ، الأعداد C_k . فيكون I التكامل المحدود للدالة f على الفترة [a,b] .

التكامل المحدود لدالة متصلة على الفترة [a , b] .

f دالة متصلة على الفترة [a , b] ، وكانت [a , b] مجزأة إلى n فترة جزئية بأطوال متساوية كل منها $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، C_k يتم اختياره وضعيا في الفترة الجزئية التي رتبتها k

فإن التكامل المحدود للدالة f على الفترة [a , b] هو $\lim_{n\to\infty} \sum_{k\to 1}^{n} f(c_k)\Delta x$

مصطلحات التكامل المحدود ورموزه :

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k\to 1}^{n} f(c_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$ وتقرأ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$ بالنسبة إلى x .

ورقة عمل الثاني عشر العلمي

عبر عن النهايات بصورة تكامل محدود :

1) $\lim\limits_{\|p\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} c^2{}_k \Delta x_k$ $[0,2]$ حيث P أي تجزيء للفترة

2) $\lim\limits_{\|p\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{4-c_k}\,\Delta x_k$ $[0,1]$ حيث P أي تجزيء للفترة

3) $\lim\limits_{\|p\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} \pi(9-\sin^2\frac{\pi c_k}{10})\Delta x_k$ $[0,10]$ حيث P أي تجزيء للفترة

4) $\lim\limits_{\|p\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} (f(c_k)+2c_k)\Delta x_k$ $[0,5]$ حيث P أي تجزيء للفترة

أمثلة :

1) الفترة [-1,3] جرى تجزيئها إلى n فترة جزئية متساوية ، m_k تعبر عن نقطة منتصف الفترة الجزئية التي رتبتها k عبر عن النهاية الأتية كتكامل $\lim\limits_{n\to\infty}\sum(3(m_k)^2-2m_k+5)\Delta x$

2) حيث P أي تجزئ للفترة [0,2] عبر عن النهاية بصورة تكامل محدود $\lim\limits_{\|p\|\to 0}\sum c_k^2\Delta x$

3) إذا جزأت الفترة [7 , 1]إلي فترات طول كلا منها $\frac{1}{2}$ فإن عدد الفترات الجزئية يساوي ....

تمارين :

1) إذا كانت $f(x)$:[-1 , 3] $\longrightarrow R$ والدالة $f(x)$ متصلة على [-1 , 3] ولتكن [-1,3] مجزأة إلى n فترة جزئية بأطوال متساوية كل منها $\Delta x=\frac{b-a}{n}$ وكانت $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x\right)=7$ فإن $\int_{-1}^{3} 2f(x)dx = ...$

$a)-\frac{7}{2}$

$b)14$

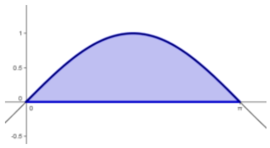
$c)7$

$d)-14$

Definite Integral and Area التكامل المحدود والمساحة

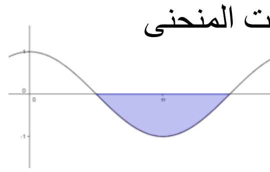
<u>تعريف</u> : إذا كانت $y = f(x)$ دالة غير سالبة وقابلة للتكامل على الفترة المغلقة [a , b] فإن المساحة تحت المنحنى هي

$$\int_a^b f(x)dx = A \,.$$



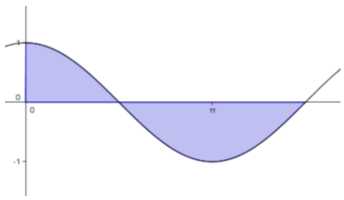
<u>تعريف</u> : إذا كانت $y = f(x)$ دالة غير موجبة فإن المساحة تحت المنحنى

هي $\int_a^b f(x)dx = -A$ عندما $(f(x) \le 0)$.



<u>تعميم</u>: دالة f دالة قابلة للتكامل لها قيم سالبة وقيم موجبة يكون $\int_a^b f(x)dx$ يساوي :

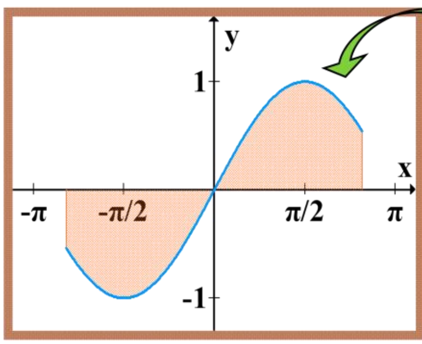
<u>(المساحة فوق المنحنى) – (المساحة تحت المنحنى)</u>



$$\int_{-k}^{k} \sin x \, dx = 0$$

لاحظ أن الدالة فردية

$$\sin(-x) = -\sin x$$

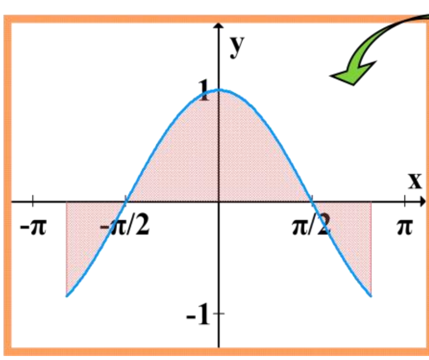


وبيـــان للدالة متناظر
بالنسبة لنقطة الأصل
مثل هذا التكامل لأي
دالة فردية = صفر

$$\int_{-k}^{k} \cos x \, dx = 2\int_{0}^{k} \cos x \, dx$$

لاحظ أن الدالة زوجية

$$\cos(-x) = \cos x$$



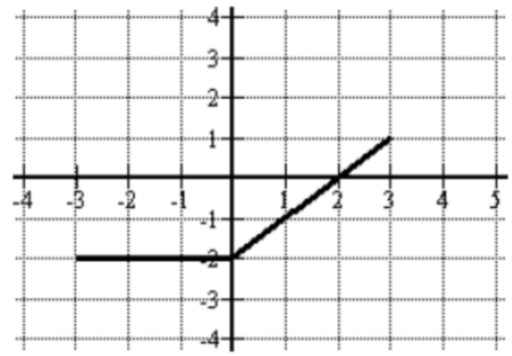
وبيـــان للدالة متناظر
بالنسبة للمحور الصادي
مثل هذا التكامل لأي
دالة زوجية هو

$$\int_{-k}^{k} f(x)dx = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$$

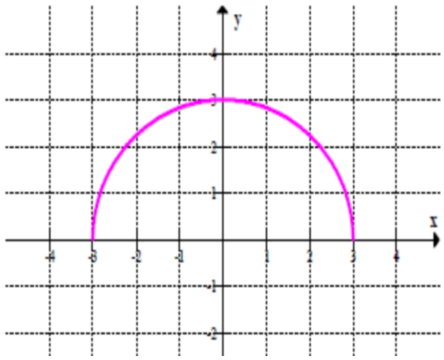
مساحات لحساب تكاملات

المجموعة الأولى : مستعينا بالرسم احسب التكاملات المحددة التالية .

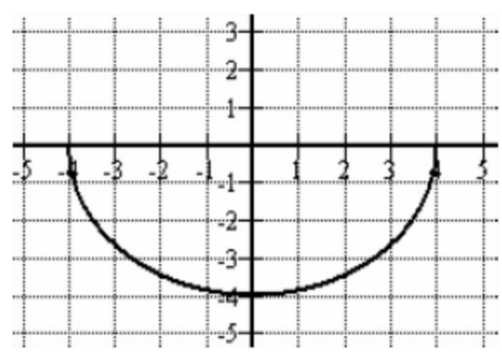
1) $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$



2) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^{2}}\,dx$



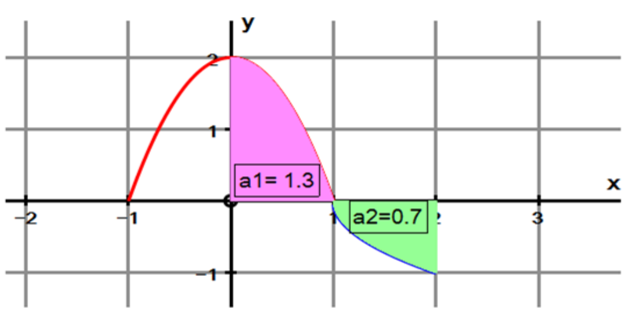
3) $\int_{-4}^{4} -\sqrt{16 - x^{2}}\,dx$



4) الشكل المجاور يمثل منحنى الدالة f على الفترة [-1,2]

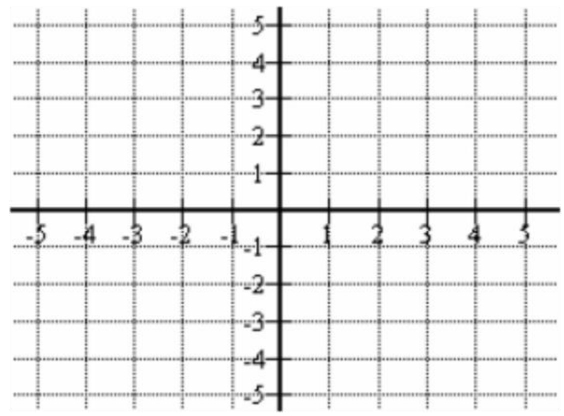
وكانت المساحة كما بالشكل

فإن : $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \cdots$ ....



المجموعة الثانية : ارسم بيانيا الدالة على الفترة المعطاه ثم أوجد تكامل الدالة على الفترة.

y = | x | ; [-1 , 3]



$1)\int_{0}^{2} \lvert x \rvert dx$	$2)\int_{-2}^{2} \lvert x \rvert dx$
$3)\int_{-1}^{3} (x+1)dx$	$4)\int_{0}^{3} (x+1)dx$
$5)\int_{0}^{1} (\lvert x \rvert -1)dx$	$6)\int_{0}^{1} (\lvert x \rvert -3)dx$

7) $\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,dx$	8) $\int_{-1}^{1} (1-\lvert x\rvert)\,dx$
9) $\int_{-1}^{1} (1+\sqrt{1-x^2})\,dx$	10) $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{5}} r\,dr$
11) $\int_{-2}^{1} \lvert x\rvert\,dx$	12) $\int_{-1}^{1} (2-\lvert x\rvert)\,dx$
13) $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,d\theta$	14) $\int_{0.5}^{1.5} (-2x+4)\,dx$

المجموعة الثالثة : أوجدي نقاط عدم الاتصال في فترة التكامل ، ثم استخدم المساحة لحساب التكامل ؟

$$1)\int_{-2}^{3}\frac{x}{|x|}dx$$

نقاط الانفصال	الرسم	المساحة	التكامل

$$2)\int_{-3}^{4}\frac{x^2-1}{x+1}dx$$

نقاط الانفصال	الرسم	المساحة	التكامل

$$3)\int_{-1}^{3}2[x]dx$$

نقاط الانفصال	الرسم	المساحة	التكامل

$$4)\int_{-5}^{6}\frac{9-x^2}{x-3}dx$$

المساحة والحقيقة لحساب تكامل
الإزاحة الأفقية والرأسية :

إذا كانت : $\int_a^b f(x)\,dx = k$ فإن

1) $\displaystyle\int_a^b (f(x)+c)dx = k + c(b-a)$

2) $\displaystyle\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx = k$

تمارين :

إذا كان : $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$ فأوجد

1) $\displaystyle\int_2^4 f\,(x-1)dx =$

2) $\displaystyle\int_0^2 f\,(x+1)dx =$

3) $\displaystyle\int_1^3 (f\,(x)+1)dx =$

4) $\displaystyle\int_5^3 (f\,(x-2)+2)dx =$

التمدد والإنكماش :

إذا كانت : $\int_a^b f(x)\,dx = k$ فإن

1) $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)dx = ck$

2) $\displaystyle\int_{ac}^{cb} f\left(\frac{x}{c}\right)dx = ck$

تمارين :

a) إذا كان : $\int_1^2 x^2\,dx = \frac{7}{3}$ فأوجد

1) $\displaystyle\int_2^4 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx =$

2) $\displaystyle\int_{0.5}^1 (2x)^2\,dx =$

b) إذا كان : $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{3}$ فأوجد

1) $\displaystyle\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)dx =$

2) $\displaystyle\int_0^{0.5} f(2x)dx =$

تمارين :

1) إذا كانت : $\int_0^3 f(x)\,dx = 5$ أوجدي قيمة كل مما يأتي

$a)\ \int_1^4 f(x-1)dx = \cdots$ … … … ….

$b)\ \int_{-1}^2 f(x+1)dx = \cdots$ … … … ….

$c)\ \int_0^3 (f(x)+1)dx = \cdots$ … … … ….

$d)\ \int_3^6 (\,f(x-3)+3)dx = \cdots$ … … … ….

$e)\ \int_0^9 f\left(\frac{x}{3}\right)dx = \cdots$ … … … ….

$f)\ \int_0^{\frac{3}{4}} f(4x)dx = \cdots$ … … … ….

$g)\ \int_0^3 5\,f(x)dx = \cdots$ … … … ….

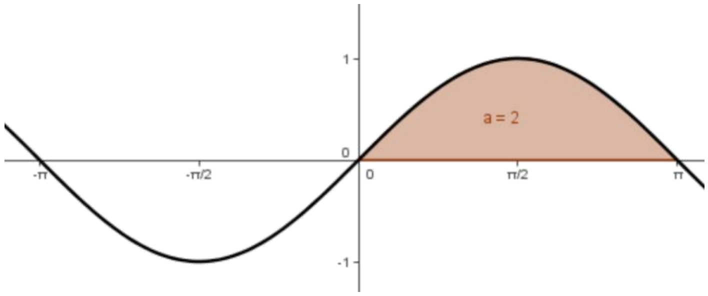
تمارين :

1) $\int_{-1}^1 x^n dx = 2\int_0^1 x^n dx \qquad \therefore n = \{\ldots\ldots\ldots\ldots..\}$

2) $\int_{-1}^1 x^n dx = 0 \qquad \therefore n = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\}$

3) $f(x)$ دالة فردية Odd Function ، $\int_{-2}^b f(x)dx = 0$ فإن مجموعة قيم $b=\{\ldots\ldots\ldots\}$ مع التفسير.

استكشاف 1



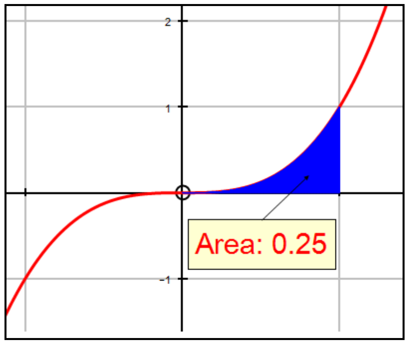
$$\int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

استخدم الرسم البياني ومعلوماتك عن المساحة والحقيقة لحساب تكامل كل مما يأتي :

$1) \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx = ...$	الرسم:	$2) \int_{0}^{2\pi} \sin x dx = ...$	الرسم:
$3) \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = ...$	الرسم:	$4) \int_{0}^{\pi} (2 + \sin x) dx = ...$	الرسم:
$5) \int_{0}^{\pi} 2 \sin x dx = ...$	الرسم:	$6) \int_{2}^{\pi+2} \sin(x-2) dx = ...$	الرسم:
$7) \int_{-\pi}^{\pi} \sin u du = ...$	الرسم:	$8) \int_{0}^{2\pi} \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx = ...$	الرسم:
$9) \int_{0}^{\pi} \cos x dx = ...$	الرسم:	$10) \int_{-k}^{k} \sin u du = ...$ حيث أن K هو أي عدد موجب	الرسم:

تمارين :

استخدم الرسم البياني ومعلوماتك عن المساحة والحقيقة لحساب التكامل $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}$



$1)\int_{-1}^{1} x^3 dx = ...$	الرسم:	$2)\int_{2}^{3} (x-2)^3 dx = ...$	الرسم:
$3)\int_{0}^{2} \left(\frac{x}{2}\right)^3 dx = ...$	الرسم:	$4)\int_{0}^{1} (x^3+3) dx = ...$	الرسم:
$5)\int_{-8}^{8} x^3 dx = ...$	الرسم:	$6)\int_{-1}^{1} \lvert x \rvert^3 dx = ...$	الرسم:
$7)\int_{0}^{1} (x^3-1) dx = ...$	الرسم:	$8)\int_{0}^{1} (1-x^3) dx = ...$	الرسم:

عبر عن كل مما يأتي برسم مناسب :

حيث A تعبر عن مساحة المنطقة المحصورة بين الدالة ومحور السينات :

1) $\int_a^b f(x)dx = A$	2) $\int_a^b f(x)dx = -A$	3) $\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$
4) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$	5) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$	
إذا كان $\int_a^b f(x)dx = A$ عبر باستخدام رسم مناسب عن التكامل التالي : 6) $\int_a^b (f(x)+c)dx = A + (c(b-a))$		

<u>التكاملات المحدودة : نظرية</u>

<u>نظرية1:</u> تكامل الثابت : إذا كانت $f(x) = c$ حيث c ثابت على الفترة [a , b] فإن: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c dx = c(b-a)$

تمارين : أوجدي قيمة التكامل .

1) $\int_{-2}^{1} 5dx =$ ....

2) $\int_{3}^{7} (-20)dx =$ ....

3) $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2} d\theta =$ ....

4) $\int_{0}^{3} (-160)dt =$ ....

5) $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5ds =$ ....

6) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}dr =$ ....

أسماء الطالبات :

-480	-80	2.57
$-\frac{3}{2}\pi$	4	$\frac{11}{4}$
15	$\sqrt{5}$	$\frac{3}{2}\pi$

خواص التكامل المحدود(من 1 : 5)

جدولُ (4.3) قواعد التكاملات المحدودة

(1) ترتيبُ التكامل:	$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	تعريف
(2) الصفرُ:	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	تعريف
(3) الثابتُ المضروبُ:	$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$	لأيّ عدد k
	$\int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$	$k=-1$
(4) المجموعُ أو الفرقُ:	$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$	
(5) الإضافةُ:	$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$	

بفرض أن $\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ ، أوجد كل تكامل

5) $\int_1^2 f(u)\,du = \ldots\ldots\ldots$

6) $\int_1^2 \sqrt{3}\, f(z)\,dz = \ldots\ldots\ldots\ldots$

7) $\int_2^1 f(t)\,dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✓ بفرض أن f, g دالتان متصلتان حيث :

$$\int_1^9 f(x)dx = -1 \quad , \quad \int_7^9 f(x)dx = 5 \quad , \quad \int_7^9 h(x)dx = 4$$

أوجد قيمة كل تكامل محدود

1) $\int_1^9 -2\, f(x)dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2) $\int_7^9 (f(x) + h(x))dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3) $\int_7^9 (2\,f(x) - 3\,h(x))dx = \ldots\ldots\ldots\ldots$

4) $\int_1^7 f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

✓ بفرض أن f متصلة حيث :

$$\int_0^3 f(z)dz = 3 \quad , \quad \int_0^4 f(z)dz = 7$$

أوجد كل تكامل :

11) $\int_3^4 f(z)dz = \ldots\ldots\ldots\ldots$

12) $\int_4^3 f(t)dt = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

بفرض أن $\int_{-3}^0 g(t)\,dt = \sqrt{2}$ ، أوجد كل تكامل

8) $\int_{-3}^0 \sqrt{3}\, g(u)\,du = \ldots\ldots\ldots\ldots$

9) $\int_{-3}^0 (-g(x))dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

10) $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,dr = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

أسماء الطالبات :

$-\sqrt{6}$	$5\sqrt{3}$	4	9
3	$-\sqrt{2}$	-2	-5
-6	-9	$\sqrt{6}$	-4
1	2	$3\sqrt{5}$	5

1) <u>القبعة البيضاء:</u> إذا كانت $\int_1^7 f(x)dx = -2$ أوجدي $\int_7^1 f(x)dx$

ثم أذكري الخاصية المستخدمة .

---

2) <u>القبعة الحمراء :</u>إذا كانت $2\int_1^7 \mathrm{f(x)dx} = -4$ ، $\int_{-1}^1 \mathrm{f(x)dx} = 5$

ماذا تتوقعين ناتج $\int_{-1}^7 \mathrm{f(x)dx} = \cdots$ ... ...

---

3) <u>القبعة السوداء :</u> إذا كانت $\int_{-1}^1 \mathrm{f(x)dx} = 5$ فإن قيمة $\int_0^1 \mathrm{f(x)dx} = \cdots$ ... .

---

4) <u>القبعة الصفراء :</u> إذا كانت $\int_{-1}^1 \mathrm{f(x)dx} = 5$ ، $\int_{-1}^1 h\mathrm{(x)dx} = -3$ فأوجدي قيمة

$$\int_{-1}^1 (3\mathrm{f(x)} + \mathrm{h(x)} - 2)\mathrm{dx}$$

---

5) <u>القبعة الزرقاء</u> :إذا كانت $\int_0^{-1} \mathrm{f(x)dx} = 2$ ، $\int_2^0 f\mathrm{(x)dx} = 3$ فأوجدي قيمة

$\int_{-1}^2 f\mathrm{(x)dx} = \cdots$ ... ...

---

6) <u>القبعة الخضراء :</u> إذا كانت $\int_2^3 f\mathrm{(x)dx} = 5$ ، $\int_2^0 f\mathrm{(x)dx} = 3$ وكانت $f\mathrm{(x)}$ دالة زوجية أوجدي قيمة

$\int_{-3}^3 (f\mathrm{(x)} + \mathrm{x})\mathrm{dx} = \cdots$ ... ...

أسماء الطالبات :

<u>الحل :</u>

1) <u>القبعة البيضاء:</u>	
2) <u>القبعة الحمراء</u>	
3) <u>القبعة السوداء :</u>	
4) <u>القبعة الصفراء</u>	
5) <u>القبعة الزرقاء</u>	
6) <u>القبعة الخضراء</u>	

ورقة عمل :

1) إذا كان $\int_{-1}^{2} \mathrm{g(x)\,dx} = -2$ ، $\int_{-1}^{2}(\mathrm{f(x) + 2g(x))dx} = 0$ فإن
$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \cdots$ ……………………..

2) إذا كان $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = 4$ ، $\int_{1}^{6} 2\,f(x)dx = 10$ فأوجد $\int_{6}^{5} f(x)\,dx = \cdots$ …………………………….

3) إذا كان $\int_{a}^{2} 4\,dx = 12$ فإن $a = \cdots$ ………………….

4) إذا كان $\int_{-2}^{2} k\,dx = 8$ فإن $k = \cdots$ ………………….

أوجدي قيمة التكامل .

1) $\int_{-2}^{1} 7dx = ...$

2) $\int_{-2.1}^{3.4} 0.25ds = ...$

3) إذا كان $\int_{-1}^{2} \mathrm{g(x)\ dx} = -3$ ، $\int_{-1}^{2} (3f(\mathrm{x}) + 5\mathrm{g(x)})\mathrm{dx} = 0$ فإن
$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \cdots$ ... ...

4) إذا كان $\int_{1}^{5} f(x)\,dx = 4$ ، $\int_{1}^{6} 5\,f(x)dx = 10$
فأوجد $\int_{6}^{5} f(x)\,dx = \cdots$ ... ...

5) إذا كان $\int_{a}^{2} 3\,dx = 12$ فإن $a = \cdots$ ... ...

6) إذا كان $\int_{-2}^{0} k\,dx = 8$ فإن $k = \cdots$ ... ...

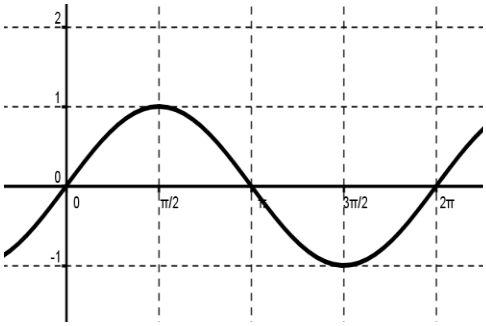
أسماء الطالبات :

21	5	1.357
$\frac{11}{4}$	4	1.375
-2	2	-5

تابع خواص التكامل المحدود :

سؤال:

أوجدي أكبر قيمة للدالة وأصغر قيمة للدالة



1) $f(x) = \sin(x)$ **في الفترة** $[0\ ,\ 2\pi]$

2) $f(x) = \sin(x)$ في الفترة $[0\ ,\ \pi]$

3) $f(x) = x$ في الفترة $[-2,3]$

4) $f(x) = x$ في الفترة $[1,5]$

4) الدالة $f(x)$ في الفترة المحددة :

a) $[-2,0]$

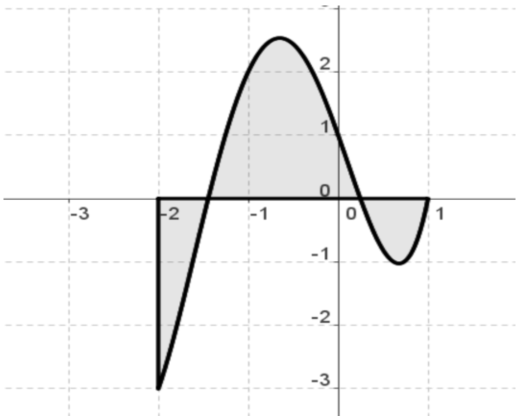
b) [-1,1]

c) [-2,1.2]

6) <u>متباينة الأكبر والأصغر :</u> إذا كان أكبر f وأصغر f هما القيمتان القصويتان للدالة f في الفترة [a , b] فإن :

$$\min\ f \bullet (b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max\ f \bullet (b-a)$$

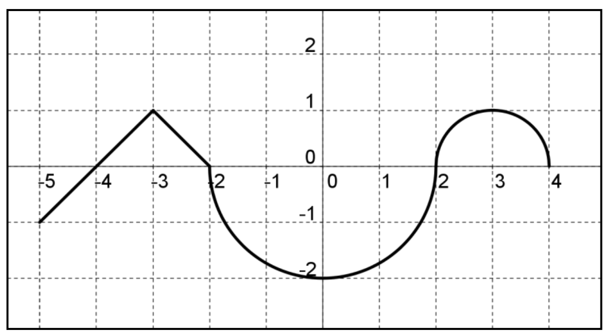
مثال : اثبتي أن $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ تقع بين 9- ، 7.6



أوجد لكل من التكاملات التالية $\min f$ ، $\max f$ دون حساب التكامل :

$1)\int_{-5}^{4} g(x)dx$

القبعة الحمراء



$$2)\int_{2}^{6} (2x-1)dx .... : 2 \le x \le 6$$

القبعة الصفراء

$$3)\int_{0}^{1} \sqrt{x+8}dx$$

القبعة الزرقاء

$$4)\int_{1}^{10} \frac{1}{x}dx$$

القبعة الخضراء

أسماء الطالبات :

<u>الحل :</u>

1) <u>القبعة الحمراء</u>	
2) <u>القبعة الصفراء</u>	
3) <u>القبعة الزرقاء</u>	
4) <u>القبعة الخضراء</u>	

أوجد لكل من التكاملات التالية $\min f$ ،$\max f$ دون حساب التكامل :

$$1)\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$2)\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin x}\,dx$$

$$3)\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,dx$$

4) اثبت أن قيمة $\int_0^1 \sin(x^2)\,dx$ لا يمكن أن تساوي 2 .

7) السيادة : $f(x) \geq g(x)$ على الفترة [a,b] $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \Leftarrow$

، $f(x) \geq 0$ على الفترة [a , b] $\int_a^b f(x)dx \geq 0 \Leftarrow$

تمارين :

1) دون حساب التكامل بين لماذا ؟

a) $\int_0^1 x^2\,dx < \int_0^1 x\,dx$

b) $\int_1^2 x^2\,dx > \int_1^2 x\,dx$

2) استخدم المتباينة $\sin x \leq f(x)$ والتي تحقق لـ $x \geq 0$ لإيجاد الحد الأعلى لقيمة $\int_0^1 \sin x\,dx$ حيث $\int_0^1 f(x)\ dx = \frac{1}{2}$

3) إذا كان $g(x) \geq \frac{1}{\cos x}$ تتحقق على الفترة $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ استخدمها لإيجاد الحد الأدنى للقيمة $\int_0^1 \frac{1}{\cos x}\ dx$ حيث $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{7}{6}$

القيمة المتوسطة للدالة (f)

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على [a,b] فإن القيمة المتوسطة على [a,b] هي :

$$av(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad av : average$$

مثال : أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 4 - x$ على الفترة [0, 3] .

الحل :

نظرية القيمة المتوسطة في التكامل المحدود

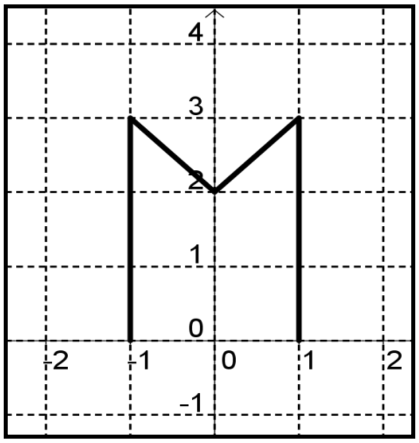
إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة على [a,b] فإن يوجد عدد مثل c ينتمي إلى الفترة [a,b] بحيث يكون

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

1) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 2x+1$ على $[-1,1]$. عند أي نقاط الفترة تأخذ الدالة هذه القيمة

تدريبات:

1) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)=|x|+2$ في الفترة $[-1,1]$ من دون إجراء عملية التكامل باللجوء لهندسة المنطقة بين المنحنى و محور السينات



2) إذا كانت $\int_0^{\pi} \sin t\,dt = 2$ أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(t)=\cos t$ على $[0,\pi]$.

عند أي نقاط الفترة تأخذ الدالة هذه القيمة

3) إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة على [2 , 1-] و كانت القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ هي 4 فأوجد

$b)\int_{2}^{-1}(3f(x)-2)\,dx=$	$a)\int_{-1}^{2}f(x)\,dx=$

4) إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و كان $\int_{1}^{2}f(x)\,dx=4$. بين أن $f(x)=4$ على الأقل مرة واحدة على $[1,2]$

5) إذا كان : $\int_{9}^{6} f(x)\,dx = 3 = \int_{2}^{6} 2f(x)\,dx \quad , \quad \int_{0}^{2} f(x)\,dx = 15$

a) احسب القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[0\,,\,9]$

b) ما هو البعد الآخر لمستطيل أحد بُعدية $av(f)$ و مساحته مساوية لقيمة $\int_{0}^{9} f(x)\,dx$

6) عند مراقبة درجات الحرارة بعد منتصف الليل في إحدى المدن، تبين أنه يمكن نمذجتها بالقانون $T(x)=2-\frac{1}{7}(x-13)^2$ حيث x هو الوقت بعد منتصف الليل و $T(x)$ درجات الحرارة .

a) ما متوسط درجات الحرارة بين الساعة 2 صباحاً و 2 بعد الظهر

b) في أي وقت تحدث هذه الحرارة

7) لصنع الكعك و تخزينه يلزم وضع الكعك في الهواء المكيف في المخزن ثم شحنة و توريده للمحلات كل 14 يوماً . حاول صاحب المصنع حفظ 600 نوع لتلبية الطلبات و الاتفاقات المهمة المبرمة معه . و نموذج قائمة السلع كل 14 يوماً تعطى بالدالة $I(t)=600+600t$ ، $0\le t\le 14$ ، والتكلفة التي تلزم لكل نوع هي 4 دراهم . أوجد المتوسط اليومي لقائمة السلع و المتوسط اليومي للتكلفة التي تلزم .

8) متوسط سرعة سيارة هو $30\,mph$ على مضمار طوله $150\,mi$. و في العودة على الطريق نفسه الذي طوله $150\,mi$ كانت السرعة $50\,mph$. حسب قائد السيارة متوسط السرعة في الفترتين $40\,mph$ في الرحلة ذهاباً و إياباً .

a) ما المسافة الكلية التي قطعتها السيارة

b) ما الزمن الكلي الذي استغرقته الرحلة ذهاباً و إياباً .

c) ما السرعة المتوسطة خلال الرحلة ذهاباً و إياباً

d) اشرح الخطأ الذي وقع فيه قائد سيارة السباق في حسابه للسرعة المتوسطة

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل :الجزء 1 :

الربط بين التفاضل والتكامل :

$$1)\ \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

$$2)\ \frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)dt = f(u(x))\times u'(x)$$

$$3)\ \frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{v(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{u(x)} f(t)dt\right)$$

$$= f(u)\times u' - f(v)\times v'$$

أولا : أوجد $\frac{dy}{dx}$

$1)\ y=\int_x^1 \frac{1}{t}dt \ldots x>0$	$4)\ y=\int_0^x \sqrt{1+t^2}dt$
$2)\ y=\int_0^{2x}\cos t dt$	$5)\ y=\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^2)dt$
$3)\ y=\int_{\sin x}^{\cos x} t^2 dt$	$6)\ y=\int_{x^2}^{x^3}\cos(2t)dt$

ثانيا:

إذا كان $g(x), f(x)$ دوال متصلة وقابلة للإشتقاق على كل الاعداد الحقيقية وكان

x	$f(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	6	2	5
3	16	4	2
4	-1	6	7

حيث : $L(x) = \int_1^{g(x)} f(t)dt$

1) أوجد : $L'(x)$

2) أوجد : $L'(3)$

ثالثا :

: إذا كانت $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}dt$ حيث $x > 0$

1) أوجد: $F'(x)$

2) حدد نوع الدالة $F(x)$

رابعا:

1) أوجد : $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^3} \sqrt{t+1}dt$

2) إذا كانت : $y = xe^x$

أ) أوجد : $\frac{dy}{dx}$

ب)أوجد : $\frac{d^2y}{dx^2}$

3) إذا كان $F(x) = \int_3^x \sqrt{4t^2-1}\ dt$ احسب كلاً من : $F^{/}(3)$, $F(3)$

خامسا:

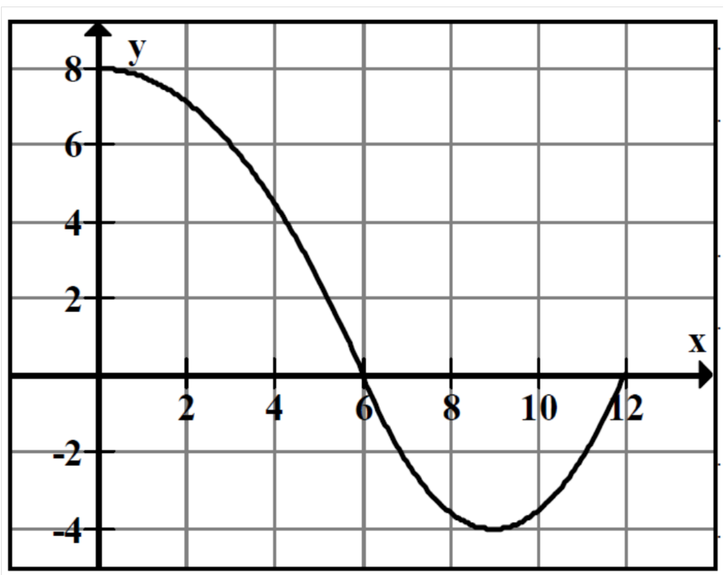
1) أوجد قيمة : $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\sec t\tan t\,dt$

2) أوجد: $\frac{dy}{dx}$ حيث : $y=\int_{3x}^{\ln x}\sin t\,dt\ldots, x>0$

3) اكتب معادلة المماس للدالة $f(x)=\int_{1}^{x^2}\sqrt{3+t}\,dt$ عند $x=1$

سادسا :

1) بفرض أن $H(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$ ، حيث $f(x)$ دالة متصلة على الفترة [0,12] والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من:



a) $H(0)$

b) على أي فترة تكون H متزايدة ؟ اشرح.

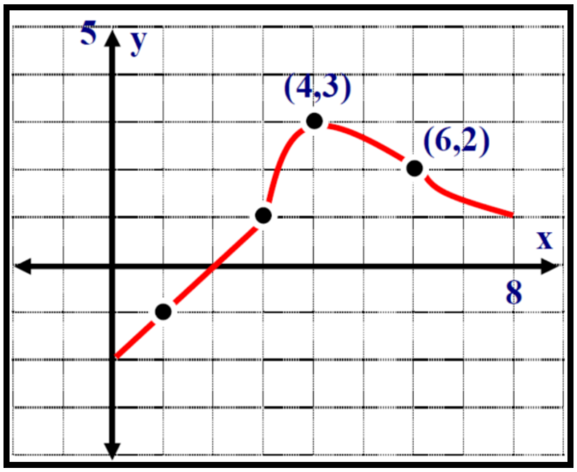
c) على أي فترة يكون منحنى H مقعرا لاعلى ؟ اشرح.

d) هل $H(12)$ موجبة أم سالبة ؟ اشرح.

e) أين تحصل H على قيمتها العظمى ؟ اشرح.

f) أين تحصل H على قيمتها الصغرى ؟ اشرح.

2) يتحرك جسيم على محور السينات حيث إن موقعه في الزمن t ثانية هو : $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ حيث f هي دالة رسمها البياني موضح في الصورة



أ) ما موقع الجسيم عند $t=0$؟

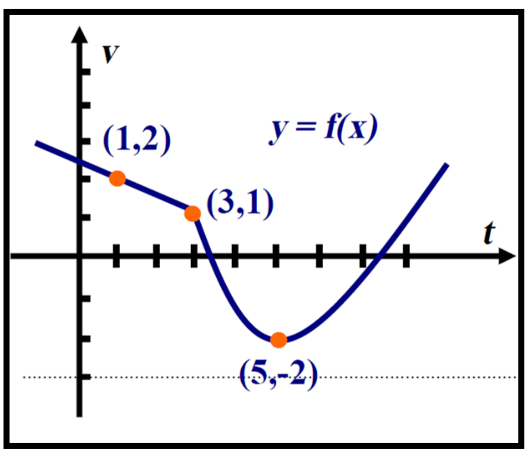
ب) ما موقع الجسيم عند $t=3$؟

ت) ما السرعة المتجهة للجسيم عند $t=4$؟

ث) متى تساوي العجلة للجسيم صفرا تقريبا ؟

ج) في أي زمن من الثواني السبع سيكون للموقع S قيمة صغرى ؟

3) يتحرك جسيم على محور احداثي حيث إن موقعه في الزمن t ثانية هو : $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ حيث f هي الدالة المبية بالشكل المجاور.



أ) ما موقع الجسيم عند $t=0$؟

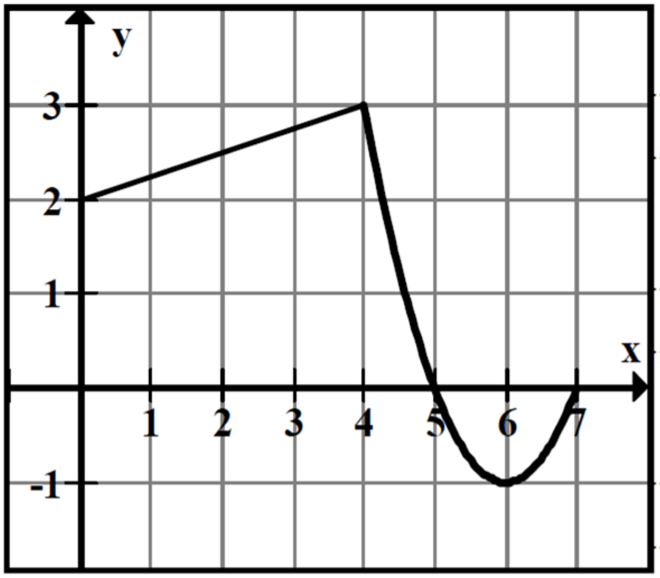
ب) ما موقع الجسيم عند $t=3$؟فسر

ت) ما السرعة المتجهة للجسيم عند $t=5$؟ اشرح الاجابة

ث) متى تساوي عجلة الجسيم تساوي صفرا ؟ ولماذا؟

ج) ما الزمن خلال السبعة ثواني الأولى الذي تأخذ فيه S أكبر قيمة ؟فسر.

4) f دالة متصلة والرسم البياني لها موضح في الشكل . دالة الموضع عند الزمن t ثانية لجسيم يتحرك على احداثيات هو $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ استخدم الرسم البياني للاجابة عن الأسئلة التالية .



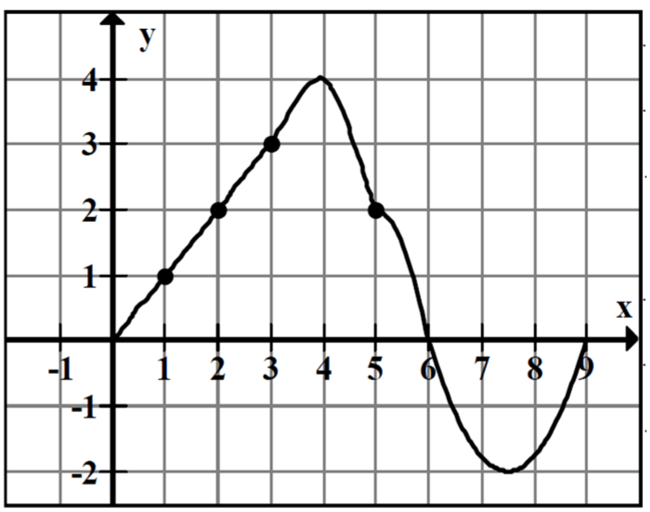
أ) هل عجلة الجسيم عند $t=5$ سالبة أم موجبة؟ اشرح؟

ب) ما موقع الجسيم عند $t=2$؟

ت) متى يتحرك الجسيم نحو نقطة الأصل؟ اشرح؟

ث) على أي جهة من نقطة الأصل يكون موقع الجسيم عند $t=7$؟ اشرح؟

5) f دالة قابلة للاشتقاق والرسم البياني لها موضح لها موضح في الشكل دالة الموضع عند الزمن t ثانية لجسيم يتحرك على محور احداثيات هو $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ استخدم الرسم البياني للاجابة عن الأسئلة التالية . أعط أسبابا لإجابتك.



أ) ما السرعة عند $t=5$؟

ب) هل عجلة الجسيم عند $t=5$ موجبة أم سالبة ؟

ت) ما موقع الجسيم عند $t=3$؟

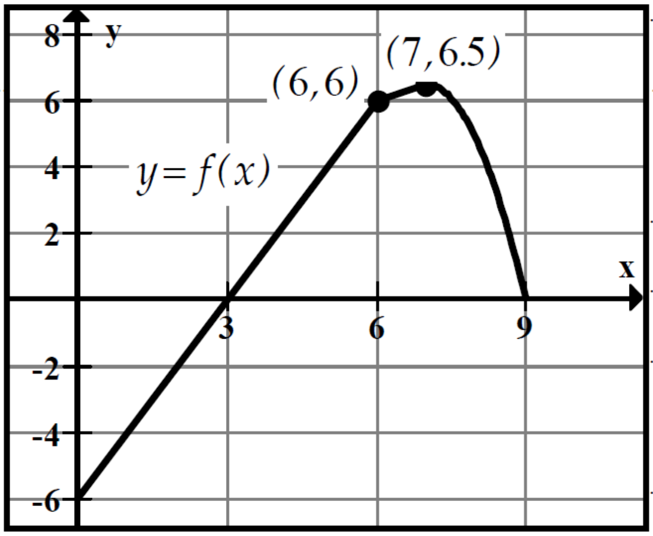
ث) عند أي زمن خلال الـ 9sec الأولى تكون S لها أكبر قيمة؟

ج) بالتقريب متى تكون العجلة مساوية للصفر؟

ح) متى يتحرك الجسيم نحو نقطة الأصل ؟ بعيدا عن نقطة الأصل؟

خ) على أي جانب من نقطة الأصل يكون موقع الجسيم عند $t=9$؟

6) f دالة قابلة للاشتقاق والرسم البياني لها موضح لها موضح في الشكل دالة الموضع عند الزمن t ثانية لجسيم يتحرك على محور احداثيات هو $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ استخدم الرسم البياني للاجابة عن الاأسئلة التالية . أعط أسبابا لإجابتك.



أ) ما السرعة عند $t=3$؟

ب) هل عجلة الجسيم عند $t=3$ موجبة أم سالبة ؟

ت) ما موقع الجسيم عند $t=3$؟

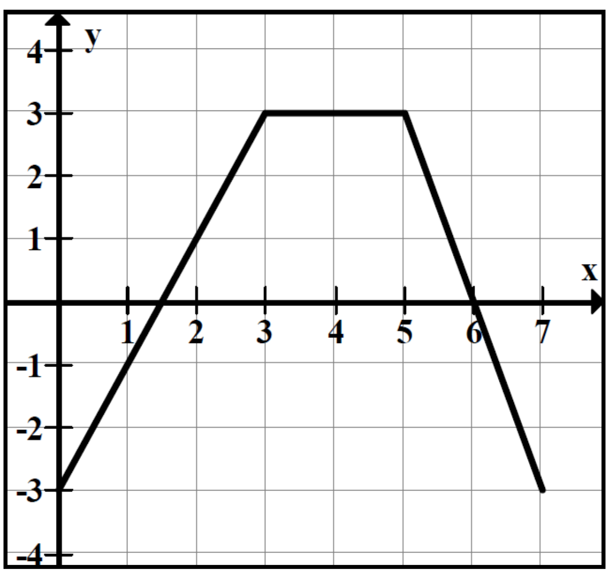
ث) متى يمر الجسيم بنقطة الأصل؟

ج) بالتقريب متى تكون العجلة مساوية للصفر؟

ح) متى يتحرك الجسيم نحو نقطة الأصل ؟ بعيدا عن نقطة الأصل؟

خ) على أي جانب من نقطة الأصل يكون موقع الجسيم عند $t=9$؟

7) $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ حيث f دالة متصلة على مجالها [0,7] والمبين بالشكل اعتمد على ذلك للاجابة عما يلي



أ) أوجد $F(3)$

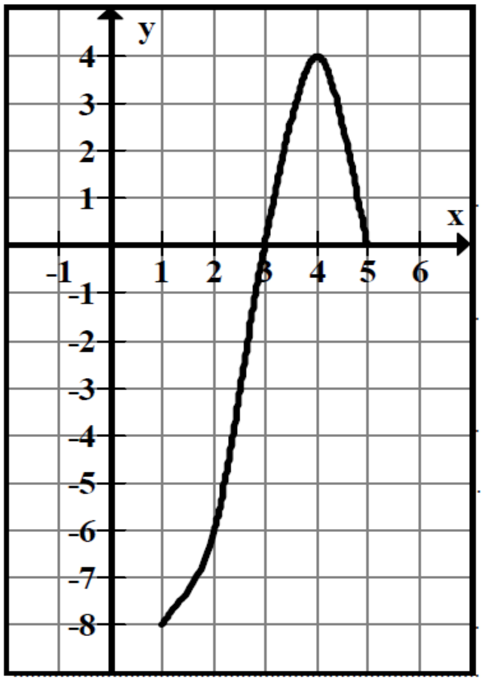
ب) هل $F(7)$ موجبة أم سالبة؟ برراجابتك؟

ت) في أي الفترات الجزئية تكون F متزايدة . فسر اجابتك

ث) أوجد $F'(5)$

ج) على أي فترة جزئية تكون F مقعرة نحو الأعلى؟

8) بفرض أن $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ حيث f دالة متصلة على مجالها [0,5] والمبين بالشكل اعتمد على ذلك للاجابة عما يلي



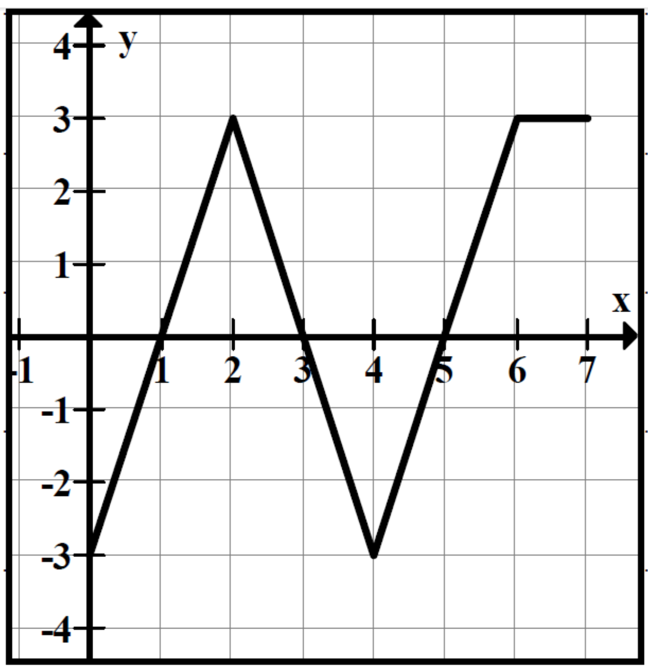
أ) أوجد $F'(3)$

ب) قيمة x التي تكون عندها $F(3)=0$

ح) هل $F(3)$ موجبة أم سالبة؟ برراجابتك؟

ت) بين أن قيمة $\int_1^5 f(x)dx$ تقع بين 16 ، -32

9) يتحرك جسيم على محور احداثي حيث إن موقعه في الزمن t ثانية هو : $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ حيث f هي الدالة المبية بالشكل المجاور.



أ) ما موقع الجسيم عند $t=0$؟

ب) ما موقع الجسيم عند $t=3$؟

ت) ما موقع الجسيم عند $t=6$؟

ث) ما المسافة المقطوعة خلال الثاني السبع

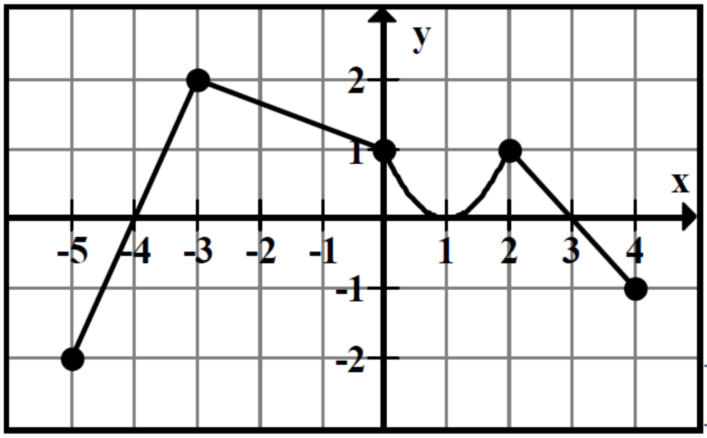
ج) عند $t=5$ هل الجسيم على يمين أو يسار نقطة الأصل؟

ح) ما إشارة العجلة عند $t=1$

خ) ما قيمة العجلة عند $\frac{1}{2}t=6$

د) كم مرة يمر الجسيم بنقطة الأصل بعد الانطلاق لاول مرة

10) الشكل المجاور يمثل بيان الدالة $f(x)$ في الفترة [-5,4] وهو مؤلف من ثلاث قطع مستقيمة ونصف دائرة وإذا كانت $g(x)=\int_{-5}^{x} f(t)dt$.

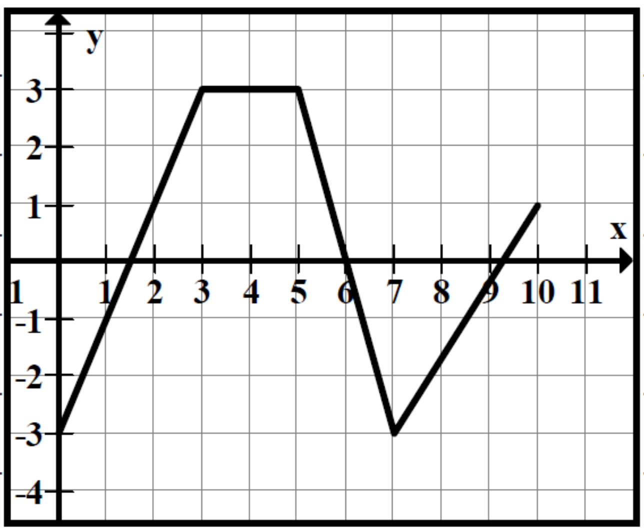


أ) أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ في الفترة [-3,0]

ب) أوجد $g'(0)$ ، $g(0)$

ت) أوجد قيمة x التي تبلغ عندها $g(x)$ قيمتها العظمى . ولماذا؟

11) بفرض أن $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$ ، حيث $f(x)$ دالة متصلة والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من:



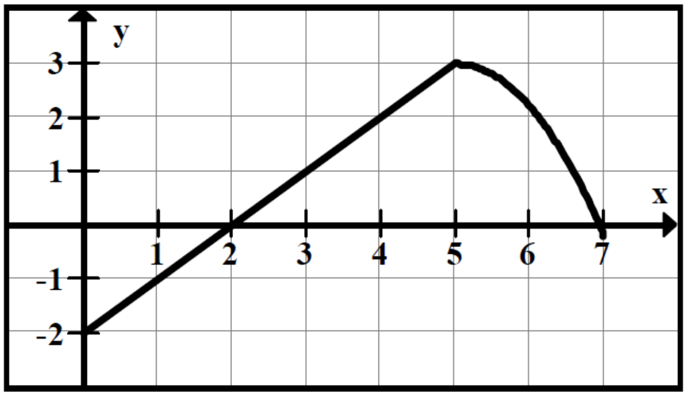
a) قيمة : $F(10)$ ، $F(7)$ ، $F(5)$ ، $F(3)$ ، $F(0)$

b) فترات تزايد الدالة $F(x)$

c) عند أي نقطة تبلغ $F(x)$ قيمتها العظمى وعند أي نقطة تبلغ $F(x)$ قيمتها الصغرى

d) ارسم منحنى $F(x)$.

12) إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق و الرسم البياني لها موضح كما بالشكل المقابل يمثل دالة الموضع عند الزمن t ثانية في الفترة [0,7] لجسيم يتحرك على محور إحداثيات هو $S(x)=\int_0^t f(x)dx$ استخدم الرسم البياني للإجابة عن الأسئلة التالية مع ذكر السبب .



أ) ما موقع الجسيم عند $t=4$؟

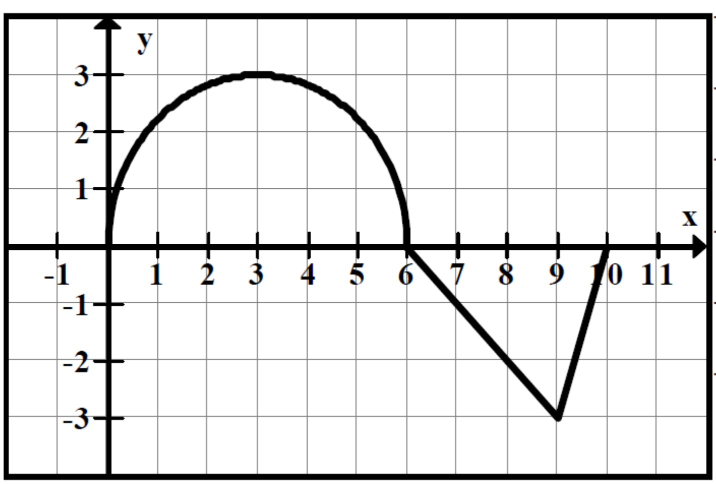
ب) ما عجلة الجسيم عند $t=2$؟

ت) متى يمر الجسيم بنقطة الأصل.

ث) ما موقع الجسيم عند $t=9$؟

ج) عتى يتحرك الجسيم نحو نقطة الأصل ؟ بعيدا عن نقطة الأصل؟

13) بفرض أن $g(x)=\int_0^x f(t)dt-\frac{9}{4}\pi$ ، حيث $f(x)$ في الفترة [0,10] والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من:



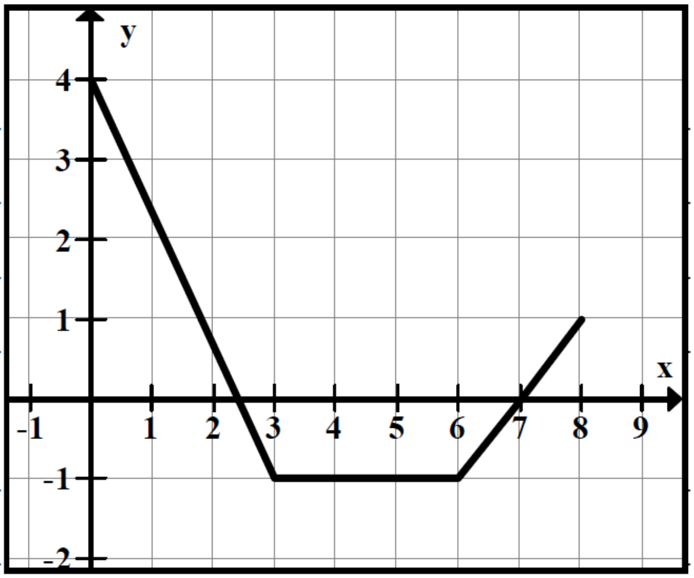
a) قيمة : $g(0)$ ، $g(10)$

b) ما هي أكبر قيمة الدالة $g(x)$ ؟

c) هل الدالة $g(x)$ تمر بنقطة الأصل ؟ فسر

d) إذا كانت $g(x)=0$ فإن $x=$ ....

14) f دالة الرسم البياني لها موضح لها موضح في الشكل دالة الموضع لجسيم يتحرك على محور احداثيات هو $S(t)=\int_0^t f(x)dx$ استخدم الرسم البياني للاجابة عن الاأسئلة التالية . أعط أسبابا لإجابتك.



أ) ما السرعة عند $t=3$ ؟

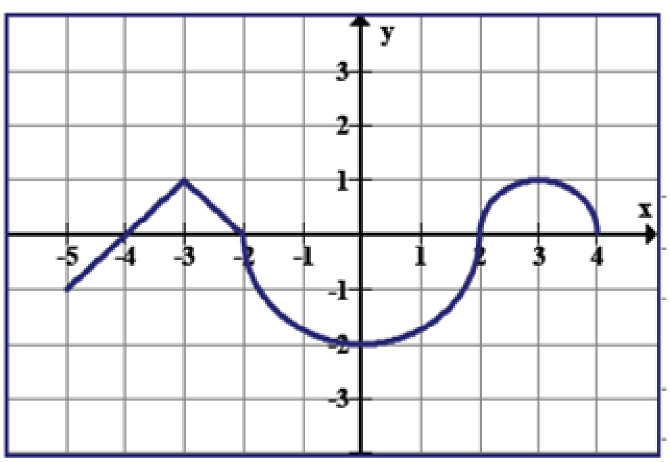
ب) ما موقع الجسيم عند $t=6$ ؟ اشرح

ت) متى يتحرك الجسيم نحو نقطة الأصل؟ ومتى يتحرك بعيدا عن نقطة الأصل ؟ اشرح

ث) على أي جانب من نقطة الأصل يكون موقع الجسيم عندما $t=8$ ؟وضح؟

ج) أوجد عجلة الجسيم عند $t=5$ ؟ فسر

15) إذا كانت $g(x)$ المتصلة في الفترة [-5,4] والمؤلف من قطعتين مستقيمتين ونصفي دائراتين هو $H(x)=\int_{-5}^{x} g(t)dt$ ؟ استخدم الرسم البياني للإجابة عن الأسئلة التالية مع ذكر السبب .



أ) $H'(-3)$

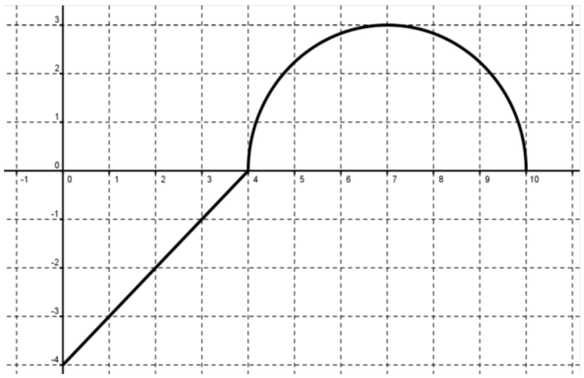
ب) $H(-3)$

ت) $\int_{-3}^{3} g(x)dx$

ث) باستخدام خواص التكامل المحدد اثبت أن :

$$-18 \le \int_{-5}^{4} g(x)dx \le 9$$

16) بفرض أن $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 8$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة [0,10] والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من .



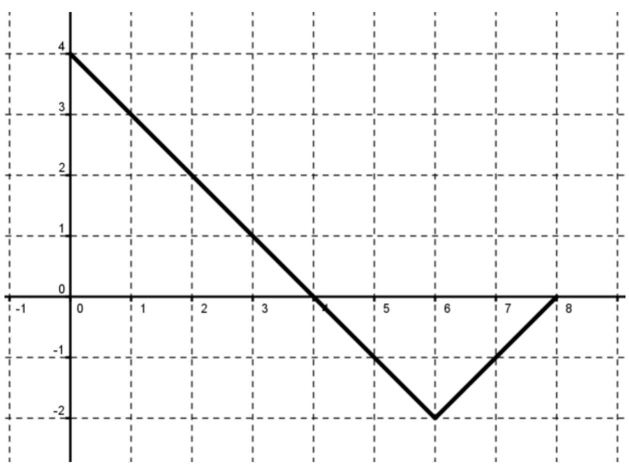
a) $g(7)\ ,g(4)\ ,g(0)$

b) هل منحنى $g(x)$ يمر بنقطة الأصل .

c) عند أي قيمة لـ x تكون g اكبر ما يمكن وأصغر ما يمكن مع التعليل

d) احسب $\int_0^{10} f(x)\,dx$ ، $g(10)$. هل النتيجتين متساويتان؟ فسر.

17) دالة الموضع s لجسم يتحرك على محور احداثيات عند الزمن t (بالثواني) يعطى بالعلاقة التالية $s(t) = \int_0^t v(t)\,dt - 6$ والرسم البياني للدالة v كما هو موضح بالرسم . اجب عن الأسئلة التالية .



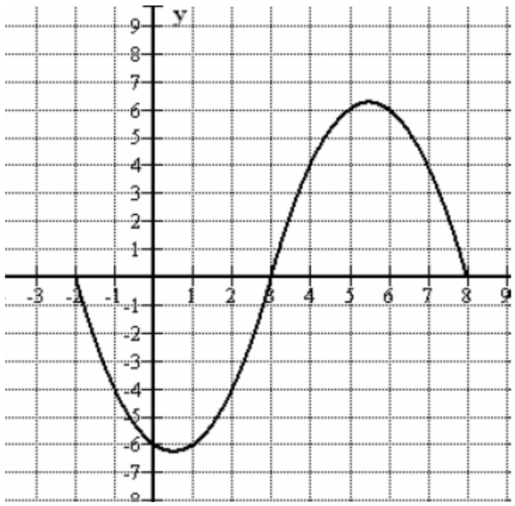
a) ما موقع الجسيم عند $t = 8$ ، $= 2$.

b) احسب المسافة التي تحركها الجسيم خلال الثواني الثمانية الأولى.

c) متى يمر الجسيم بنقطة الأصل .

d) حدد الفترات التي يتحرك فيها الجسيم نحو نقطة الأصل ، والفترات التي يتحرك بعيدا عن نقطة الأصل.

18) بفرض أن $g(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt - 1$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة [-2,8] والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من .



a) $g(-2)$, $g(8)$

b) عين اكبر قيمة للدالة $g(x)$.

c) عند أي قيمة لـ x تكون g اكبر ما يمكن وأصغر ما يمكن

Fundamental Theorem of Calculus النظرية الأساسية للتفاضل و التكامل

اذا كانت f دالة متصلة علي [a,b] و الدالة F معرفة كما يلي $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ فإن $\frac{dF}{dx} = f(x)$

تمارين: أوجد $\frac{dy}{dx}$ في كل مما يأتي :-

1) $y = \int_\pi^x \sin t \, dt$

2) $y = \int_0^{x^2} \cos t \, dt$

3) $y = \int_x^1 \sqrt{t} \, dt$

4) $y = \int_x^{2x} \frac{t}{1+t} \, dt$

5) Prove that $f(x)$ is a constant function where

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

6) $\int_1^x f(y)dy = x\sin\pi x$ find $f(2)$

❖ أوجد $\frac{dy}{dx}$ فيما يأتي :

1) $y = \int_0^{2x} \sqrt{1+t^3} dt$

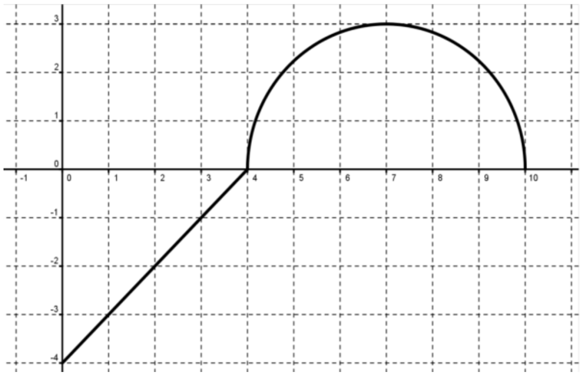
2) $y = \int_x^1 \frac{1}{t} dt \quad , x > 0$

3) $y = \int_{\sin x}^{\cos x} t^2 \, dt$

4) $y = \int_x^5 3t \sin t \, dt$

5) $y = \int_{2x}^{x^2} \frac{1}{5+e^t} \, dt$

❖ إذا كان $F(x) = \int_3^x \sqrt{4t^2 - 1} \, dt$ احسب كلاً من : $F'(3)$, $F(3)$



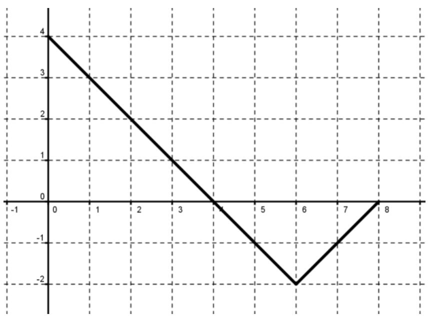
7) بفرض أن $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt + 8$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة [0,10] والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من .

a) $g(7)\,, g(4)\,, g(0)$

b) هل منحنى $g(x)$ يمر بنقطة الأصل .

c) عند أي قيمة لـ x تكون g اكبر ما يمكن وأصغر ما يمكن مع التعليل

d) احسب $\int_0^{10} f(x)\,dx$ ، $g(10)$. هل النتيجتين متساويتان؟ فسر.



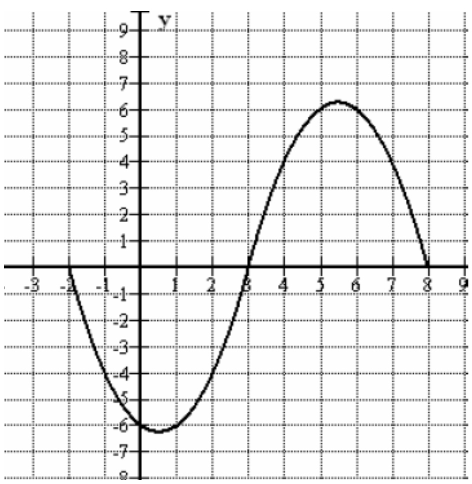
8) دالة الموضع s لجسم يتحرك على محور احداثيات عند الزمن t (بالثواني) يعطى بالعلاقة التالية $s(t) = \int_0^t v(t)\,dt - 6$ والرسم البياني للدالة v كما هو موضح بالرسم . اجب عن الأسئلة التالية .

a) ما موقع الجسيم عند $t = 8$ ، $= 2$.

b) احسب المسافة التي تحركها الجسيم خلال الثواني الثمانية الأولى.

c) متى يمر الجسيم بنقطة الأصل .

d) حدد الفترات التي يتحرك فيها الجسيم نحو نقطة الأصل ، والفترات التي يتحرك بعيدا عن نقطة الأصل.



9) بفرض أن $g(x) = \int_{-2}^x f(t)\,dt - 1$ ، حيث f دالة متصلة على الفترة [-2,8] والمبين رسمها كما يلي . أوجد كلا من .

a) $g(-2)\,, g(8)$

b) عين اكبر قيمة للدالة $g(x)$.

c) عند أي قيمة لـ x تكون g اكبر ما يمكن وأصغر ما يمكن

10) Find the value of k if :- $f(x) = sec\ x\ \ tan\ x$

$$\int_0^x f(t)dt + k = \int_x^\pi f(t)dt$$

11) Find k if $f(x) = cos\ x\ csc\ x$, $\int_{\frac{\pi}{4}}^x f(t)dy + k = \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t)dt$

12) Find $y = f(x)$ where $\frac{dy}{dx} = tan\ x$ and $f(3) = 5$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل :الجزء 2 :

إذا كانت f متصلة عند كل نقطة من الفترة [a,b] . وإذا F هي أي مشتقة عكسية للدالة f على الفترة [a,b] . عندئذ $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

- ✓ احسب التكامل :

أوجدي قيمة التكامل لكل مما يأتي :

$1)\int \cot x dx =$

$2)\int 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx =$ ....

$3)\int \frac{1}{1-\sin x}dx =$ ....

تمارين : أوجدي قيمة كل مما يأتي :

$1)\int_0^2 5x dx =$ ....

$2)\int_0^2 (2t-3)dt =$ ....

$3)\int_2^1 (1+\frac{z}{2})dz =$ ....

$4)\int_0^3 \frac{3}{x+1}dx =$ ....

تدريبات : أوجد قيمة التكامل :

1) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}dx =$	
2) $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5dx =$	
3) $\int_{0}^{3} (-160)dx =$	
4) $\int_{2}^{5} 4xdx =$	
5) $\int_{0}^{3} (2t-3)dt =$	
6) $\int_{2}^{1} (1+\frac{z}{2})dz =$	
7) $\int_{-1}^{1} (\mathrm{r}+1)^2 dr =$	
8) $\int_{0}^{1} (\mathrm{x}^2+\sqrt{x})dx =$	
9) $\int_{3}^{5} \frac{x}{8} dx =$	

10) $\int_0^3 \frac{3dx}{x+1}\,dx =$	
11) $\int_1^2 \frac{4}{x^2}\,dx =$	
12) $\int_{1/2}^3 (2 - \frac{1}{x})dx =$	
13 $\int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}} =$	
14 $\int_3^5 e^x dx =$	
15) $3 + 2\int_0^{\pi/3} \tan x dx =$	
16) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc x \cot x dx =$	
17) $\int_0^{\pi/4} \cos x dx =$	

18) أوجد k التي تجعل $\int_a^x f(t)\,dt + k = \int_b^x f(t)\,dt$

$$f(x) = \sin^2 x \quad ; \; a = 0 \quad ; \; b = 2$$

....

....

....

....

....

19) أوجـــــــــد k التي تجعل $\int_a^x f(t)\,dt + k = \int_b^x f(t)\,dt$

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \quad ; a = -1 \quad , \quad b = 2$$

....

....

....