مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التّعليم أوّلاً

Level 3 Mathematics 2016-17

المستوى 3 – الرياضيات 2016-2017

Scope and Sequence

النطاق والتسلسل

Strand المجالات	عنوان الوحدة	عدد مخرجات التعلم	عدد الحصص الموصى به	الفصل الدراسي 1	الفصل الدراسي 2	الفصل الدراسي 3
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA1 الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل	4	16	✓		
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA2 الدوال الأسية واللوغاريتمية	2	8	✓		
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA3 النهايات والاتصال	4	16	✓		
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA4 التفاضل	8	32	✓		
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA5 تطبيقات التفاضل	8	32	✓		
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA6 المتطابقات والمعادلات المثلثية		16		✓	
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA7 أنظمة المعادلات والمصفوفات		8		✓	
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3.PA8 القطوع المخروطية والمعادلات البارامترية				✓	
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3. PA9 المتجهات				✓	
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3. PA10 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة					✓
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3. PA11 التكامل					✓
الأنماط، والجبر، والدوال	ML3. PA12 تطبيقات التكامل					✓
	الإجمالي					

Subject: Mathematics المادة: الرياضيات	Level: Level 3 المستوى: المستوى 3	Code: ML3.PA1 الرمز: ML3.PA1
Strand: Patterns, Algebra & Functions المحور: الأنماط والجبر والدوال	Unit: Functions from a Calculus Perspective *الوحدة: الدوال من منظور حساب التفاضل والتكامل*	

المؤشر

بنهاية هذا الصف، سوف يكون الطلبة قادرين على:

- رسم تحويلات الدوال بيانيًا وتحليلها، وإيجاد تركيبات الدوال، وتحديد الدوال العكسية

المنهج التربوي

طوال هذه الوحدة، سوف يقضي الطلبة معظم وقتهم في التعلم من خلال:

- فهم الموضوعات التي سيتم استخدامها وتطبيقها في وحدات لاحقة
- مراجعة أعمال الصفوف السابقة، وتوسيع نطاق المعرفة لتشمل مواقف جديدة

المخرجات التعليمية

يتعلم الطالب أن:

	Mastered (Learning Outcome) المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	Developing المستوى المتقدم	Emerging المستوى المبتدئ	Assessment Criteria معايير التقويم
ML3.PA1.1	يصف المجموعات الجزئية من الأعداد الحقيقية، ويتعرف على العلاقات والدوال، **ويجد قيمة دالة عند نقطة ويجد مجال الدوال**	يصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، ويحدد العلاقات التي تمثل دوال، **ويوجد قيم الدوال**	**يصف المجموعات الجزئية** من مجموعة الأعداد الحقيقية، **ويحدد** العلاقات التي تمثل **دوال**	▪ يصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية – باستخدام رموز (تدوين) المجموعات والفترات ▪ يحدد العلاقات التي تمثل دوال ▪ يجد قيم الدوال ▪ يجد المجالات جبريًا ▪ يجد قيم الدوال متعددة التعريف

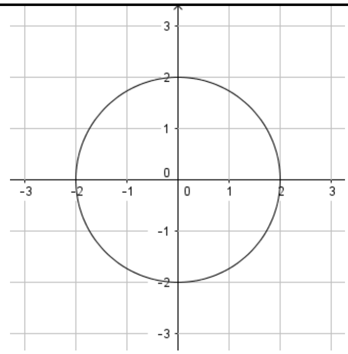
ملاحظات توضيحية:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بوصف المجموعات الجزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية، وتحديد العلاقات التي تمثل دوال، على سبيل المثال:

مثال 1. صف مجموعة الأعداد باستخدام تدوين بناء المجموعات: $x > 3$	*مثال 2.* صف مجموعة الأعداد باستخدام رموز الفترات $-5 \leq x < 11$
مثال 3: حدد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة	*مثال 4:* حدد ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة

	1	3	7	15
	2	3–	0	8

كل قيمة لـ x يقابلها قيمة واحدة فقط لـ y. ولذا، فإن العلاقة الممثلة بالجدول عبارة عن دالة.



باستخدام اختبار الخط العمودي، فإن الخط يتقاطع مع الرسم البياني أكثر من مرة في معظم النقاط على الرسم البياني. ولذا، فإن العلاقة لا تمثل دالة.

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد قيم الدوال، على سبيل المثال:

مثال 3: إذا كان $f(x) = x^2 - 2x$، أوجد $f(-3)$	*مثال 4:* إذا كان $g(x) = 12 - 5x - x^2$، أوجد $g(3n + 6)$

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بإيجاد قيم الدوال وذكر مجالاتها، على سبيل المثال:

مثال 5: اذكر مجال الدالة التالية: سيكون المجال كافة الأعداد الحقيقية باستثناء عندما تكون الدالة غير معرفة. ويحدث ذلك عندما يساوي المقام صفرًا. المجال: $\{x \mid x \neq -5, x \neq -2, x \in \mathbb{R}\}$	*مثال 6:* تقوم مدرسة ببيع قمصان لجمع التبرعات. وتحصل شركة بيع القمصان بالجملة من المدرسة على 10 دراهم إماراتية عن كل قميص بالنسبة لأول 75 قميصًا. وبعد الـ 75 قميصًا الأولى التي تشتريها المدرسة وحتى الـ150 قميصًا، ستقوم الشركة بخفض السعر إلى 7,50 درهم إماراتي لكل قميص. وبعد أن تشتري المدرسة 150 قميصًا، سوف ينخفض السعر إلى 5 درهم إماراتي لكل قميص. تمثل الدالة أدناه إجمالي التكلفة $C(x)$، حيث x هي عدد القمصان المشتراه.

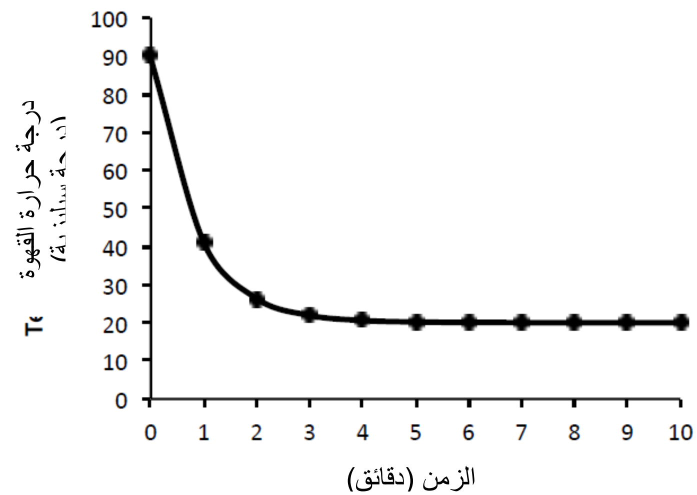
	أ) أوجد إجمالي تكلفة شراء 62 قميصًا. ب) أوجد إجمالي تكلفة شراء 205 قميصًا. أ) لأن 62 بين 1 و75، نحتاج إلى استخدام $C(x) = 10x$ لإيجاد التكلفة سوف يتكلف طلب 62 قميصًا مبلغ 620 درهم إماراتي. ب) لأن 205 أكثر من 150، نحتاج إلى استخدام $C(x) = 5x + 562.5$ لإيجاد التكلفة. ت) سوف يتكلف طلب 205 قميصًا مبلغ 1587,50 درهم إماراتي.

ML3.PA1.2	يقدر قيم الدوال، ويجد المجال و المدى والمقطع الصادي و المقطع السيني جبريا و بيانيا و يختبر التناظر.	يقدر قيم الدوال، ويجد المجال و المدى والمقطع الصادي و المقطع السيني جبريا و بيانيا	يقدّر **قيم الدوال، ويوجد المجال والمدى** بيانيًا وجبريًا	▪ يحلل الدوال بيانيًا وجبريًا، بما في ذلك: - يقدر قيم الدوال - يجد المجال والمدى - يجد نقاط التقاطع y - يجد الأصفار - يكشف عن التماثل - يحدد الدوال الزوجية والفردية

ملاحظات توضيحية:

▪ في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بتقدير قيم الدوال، وإيجاد المجال والمدى بيانيًا وجبريًا على حد سواء، على سبيل المثال:

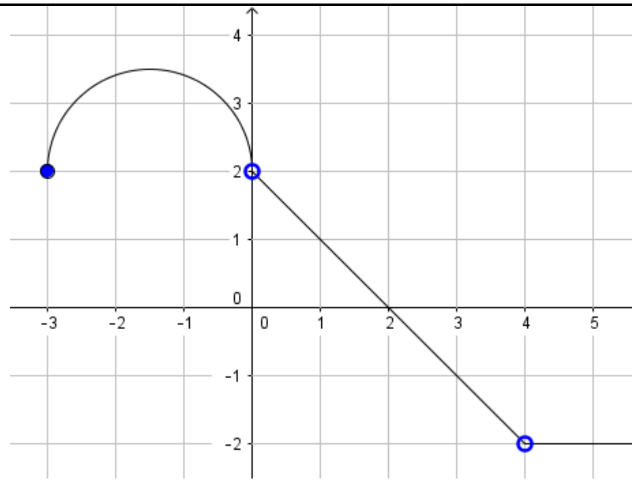
مثال 1. يتم تبريد كوب من القهوة. يتم تمثيل درجة حرارة $f(x)$ القهوة أثناء تبريدها، حيث x هو الوقت المستغرق بالدقائق، من خلال:	*مثال 2.* استخدم الرسم البياني لـ $f(x)$ لإيجاد المجال والمدى



أ) استخدم الرسم البياني لتقدير درجة حرارة القهوة عند 3 دقائق
ب) اثبت تقديرك جبريًا

أ) من الرسم البياني، درجة الحرارة عند $x = 3$ أعلى بقليل من 20 درجة مئوية.
ب) الإثبات جبريًا:

درجة الحرارة عند 3 دقائق هي 21,89 درجة مئوية.



يبدأ المجال عند -3 ويتضمن -3. وتوضح الدائرة عند 0 أن 0 ليس جزءًا من المجال. وتوضح الدائرة عند 4 أن 4 ليست جزءًا من المجال. ويستمر الرسم البياني دون حد في الجانب الأيمن.

المجال: $[-3, 0) \cup (0, 4) \cup (4, \infty)$

يمكن كتابة ذلك أيضًا باستخدام تدوين بناء المجموعات:

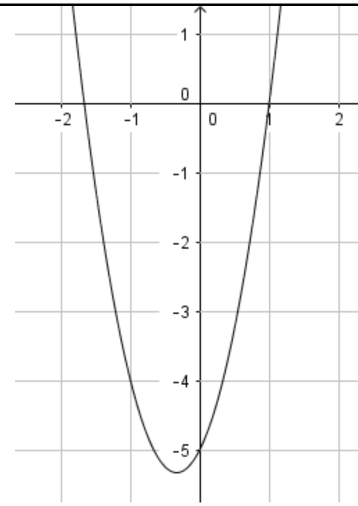
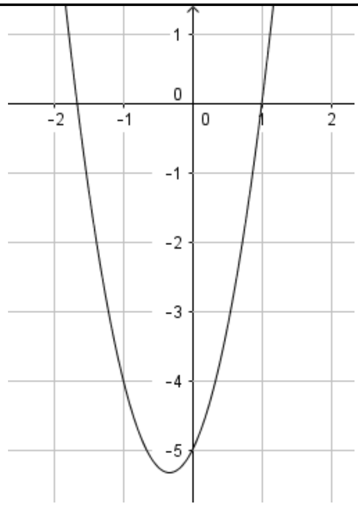
يبدأ المدى عند -2 ويتضمن -2. وله قيمة عند 2. وينتهي المدى عند 3,5.

المدى: $[-2, 3.5]$

يمكن كتابة ذلك أيضًا باستخدام تدوين بناء المجموعات:

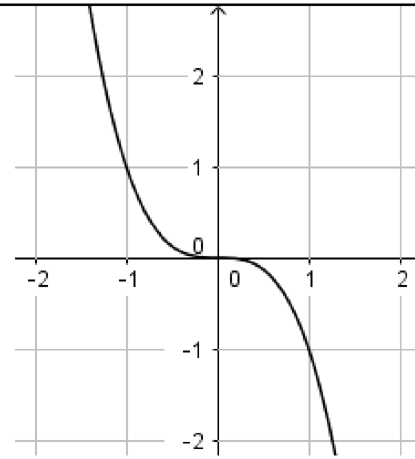
- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بتقدير نقاط تقاطع y والأصفار من الرسوم البيانية، وإثبات التقديرات باستخدام الجبر، على سبيل المثال:

مثال 3:	مثال 4:
قم بتقدير نقطة تقاطع y من الرسم البياني، ثم اثبت ذلك جبريًا	قم بتقدير الأصفار باستخدام الرسم البياني، ثم اثبت ذلك جبريًا

 يظهر من خلال الرسم البياني أن $f(x)$ تتقاطع مع المحور y عند -5.	 يظهر من الرسم البياني أن $f(x)$ تتقاطع مع المحور x عند $-1\frac{2}{3}$ و1.

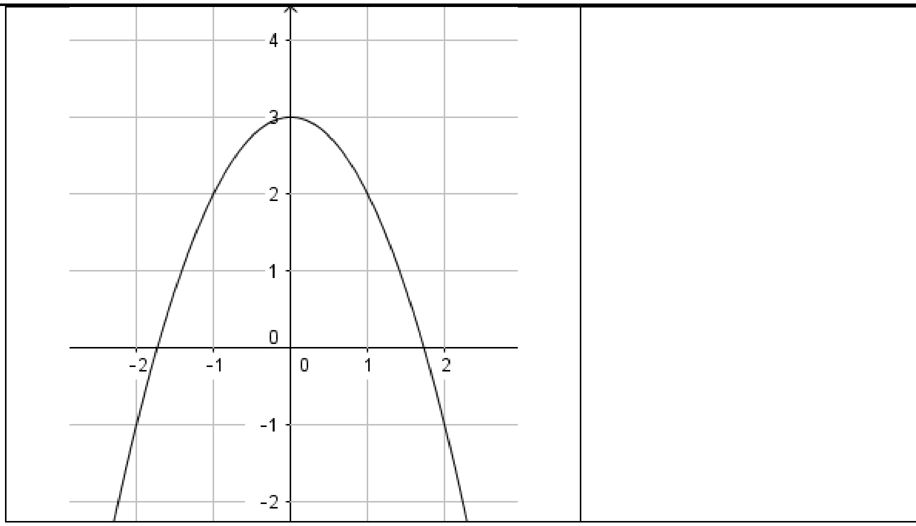
- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بالكشف عن التماثل، ويتضمن ذلك تحديد الدوال الزوجية والفردية، على سبيل المثال:

مثال 5. في الدالة التالية، اكشف عن التماثل فيما يتعلق بالمحور x، والمحور y، ونقطة الأصل. واثبت ذلك بيانيًا وجبريًا.	*مثال* 6. في الدالة التالية، اكشف عن التماثل وحدد ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أو لا شيء مما سبق.



بيانيًا:
الرسم البياني متماثل فيما يتعلق بنقطة الأصل لأن كل نقطة (x, y) على الرسم البياني يقابلها نقطة $(-, -y)$ أيضًا على الرسم.

جبريًا:
نظرًا لأن $-y = -(-x)^3$ تساوي $y = -x^3$، فإن الرسم البياني متماثل فيما يتعلق بنقطة الأصل.



بيانيًا:
الرسم البياني متماثل فيما يتعلق بالمحور y لأن كل نقطة (x, y) على الرسم البياني يقابلها نقطة $(-, y)$ أيضًا على الرسم.

جبريًا:
نظرًا لأن $f(-x) = -(-)^2 + 3$ تساوي $f(x) = -x^2 + 3$، فإن الرسم البياني متماثل فيما يتعلق بالمحور y.

الدالة زوجية لأن $f(-x) = f(x)$، ومتماثلة فيما يتعلق بالمحور y.

ML3.PA1.3	يصف خصائص ويرسم التحويلات الهندسية المركبة لدوال متنوعة بالإضافة إلى الدوال المتفرعة و دوال المطلق.	**يصف التحويلات المركبة** لمجموعة متنوعة من الدوال **ويرسمها بيانيًا**	**يرسم الإزاحات والانعكاسات والامتدادت** لمجموعة متنوعة من الدوال **بيانيًا**	▪ يصف خصائص الدالة الأصلية (ثابتة، متطابقة، تربيعية، تكعيبية، جذر تربيعي، معكوسة، قيمة مطلقة، أكبر عدد صحيح) ▪ يرسم الإزاحات والانعكاسات والامتدادت بيانيًا ▪ يكتب معادلات للتحويلات ▪ يصف التحويلات ورسمها بيانيًا ▪ يرسم الدوال المتفرعة والقيمة المطلقة للدوال بيانيًا، على سبيل المثال: $g(x) = \|f(x)\|$

ملاحظات توضيحية:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة برسم الإزاحات والانعكاسات والامتدادت بيانيًا لمجموعة متنوعة من الدوال تتضمن الدوال الثابتة والمتطابقة والتربيعية والتكعيبية ودوال الجذر التربيعي والدوال المعكوسة ودوال القيمة المطلقة ودوال أكبر عدد صحيح، على سبيل المثال:

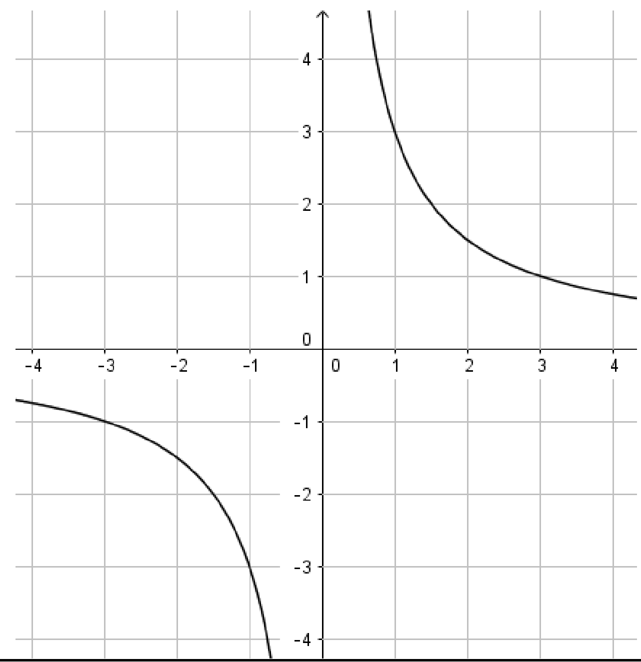
مثال 1.

استخدم الرسم البياني لـ $y = \frac{3}{x}$ لرسم الدوال التالية بيانيًا:

أ) $y = \frac{3}{x-2}$

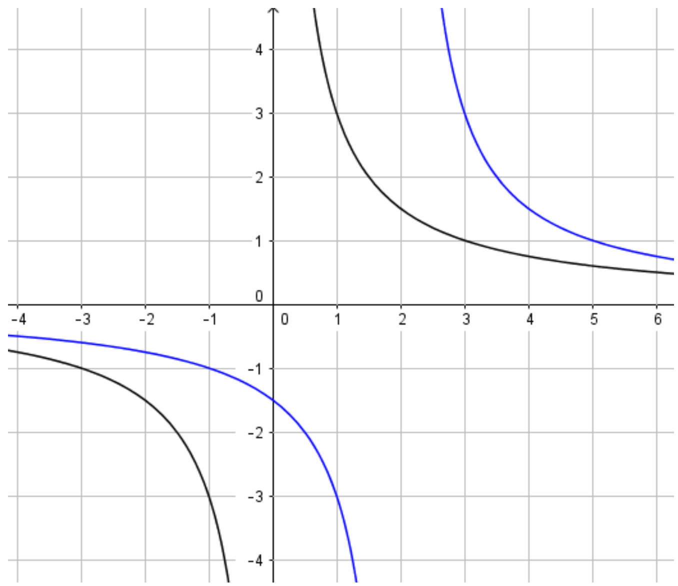
ب) $y = -\frac{3}{x}$

الرسم البياني لـــ $y = \frac{3}{x}$

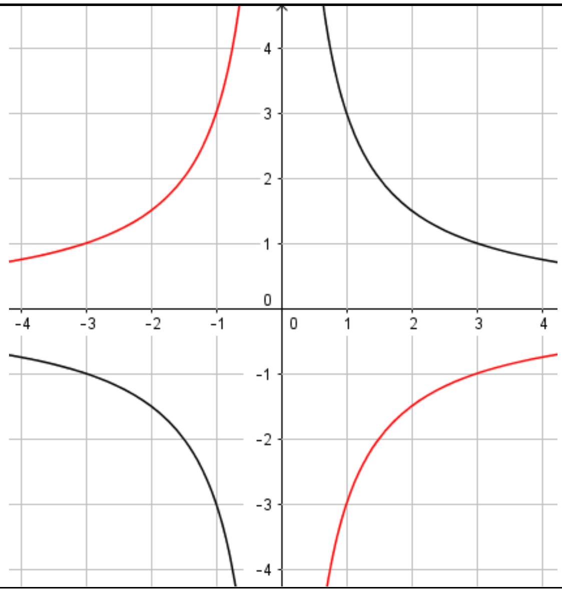


الحل:

أ) الرسم البياني مزاح بمقدار وحدتين إلى اليمين

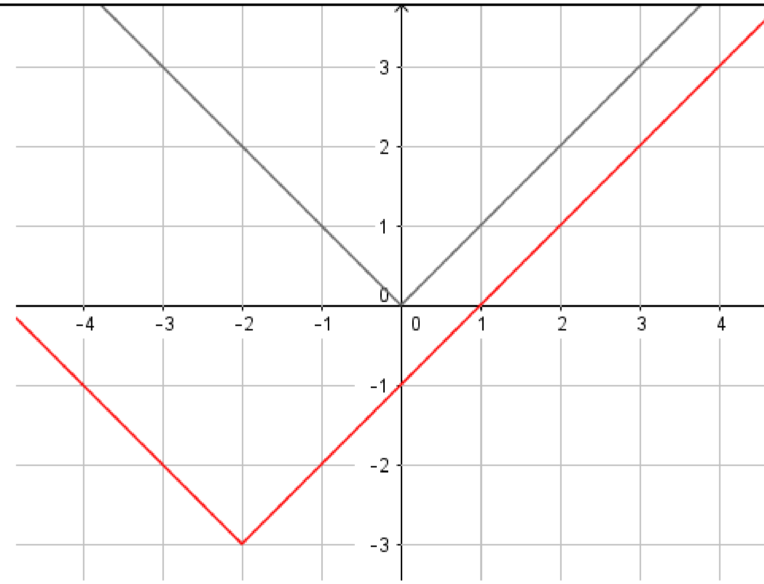
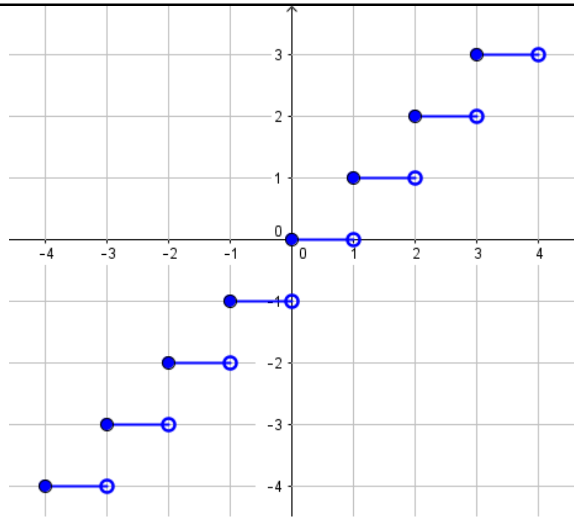
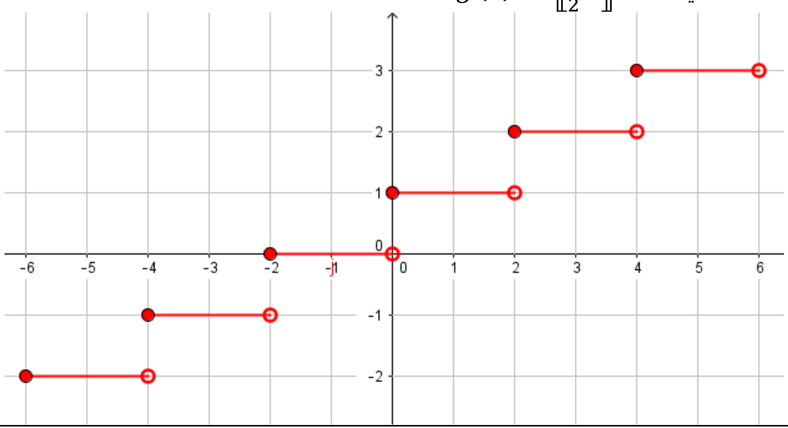


ب) الرسم البياني منعكس في المحور x

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بوصف التحويلات المركبة للدوال ورسمها بيانيًا، على سبيل المثال:

مثال 3: حدد الدالة الأصلية لـ $g(x) = \lvert x+2\rvert - 3$، وصف التحويلات. ثم ارسم الدالة بيانيًا. الدالة الأصلية هي $f(x) = \lvert x\rvert$. تم إزاحة الرسم البياني بمقدار وحدتين إلى اليسار و3 وحدات إلى الأسفل.	*مثال 4:* حدد الدالة الأصلية لـ $g(x) = \left[\!\left[\frac{1}{2}x\right]\!\right] + 1$، وصف التحويلات. ثم ارسم الدالة بيانيًا. الدالة الأصلية هي $f(x) = [\![x]\!]$ (دالة أكبر عدد صحيح أو دالة الجزء الصحيح). الرسم البياني ممتد أفقيًا ومزاح بمقدار وحدة واحدة للأعلى. الدالة الأصلية هي $f(x) = [\![x]\!]$

	 الدالة المتحولة هي $g(x) = \left[\!\left[\frac{1}{2}x\right]\!\right] + 1$ 

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بوصف خصائص الدوال الأصلية، ورسم الدوال متعددة التعريف وتحويلات الدوال التي تتضمن قيمة مطلقة بيانيًا، على سبيل المثال:

مثال 5. صف خصائص الرسم البياني للدالة الأصلية المجال هو جميع الأعداد الحقيقية والمدى هو $[0, \infty)$.	*مثال 6.* ارسم ما يلي بيانيًا:

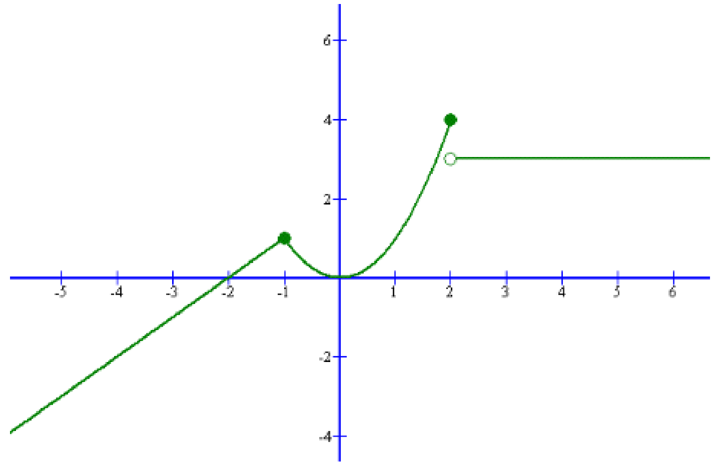
يوجد نقطة تقاطع واحدة بالرسم البياني عند (٥، ٥).

الرسم البياني متماثل فيما يتعلق بالمحور y. ولذلك، فإنها دالة زوجية.

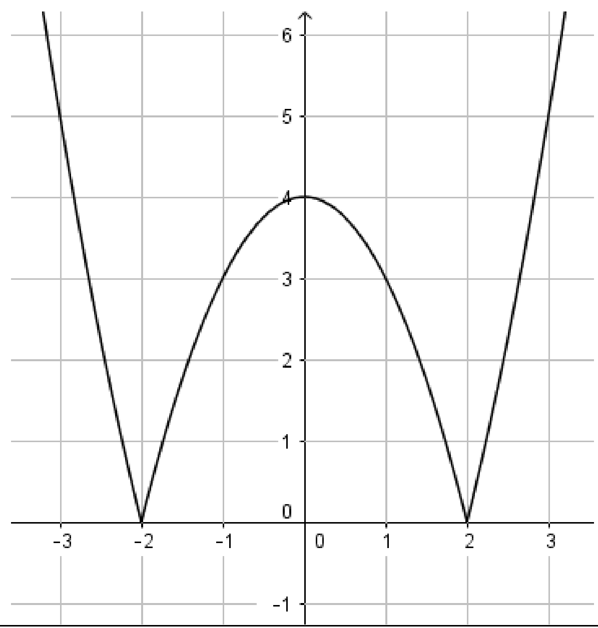
الرسم البياني مستمر لجميع القيم في مجاله.

السلوك النهائي: $f(x) \to +\infty$ as $x \to -\infty$
$f(x) \to +\infty$ as $x \to +\infty$

يتناقص الرسم البياني في الفترة $(-\infty, 0)$، ويتزايد في الفترة $(0, \infty)$.



مثال 7.
ارسم $f(x) = |x^2 - 4|$ بيانيًا.



ML3.PA1.4	يجري العمليات على الدوال، ويركّب دالتين، **مع وصف مجال هذه الدوال**	يجري العمليات على الدوال، **ويركّب دالتين**	**يجري العمليات** على الدوال	▪ يجري العمليات على الدوال (مجموع، فرق، حاصل ضرب، خارج قسمة) ▪ يركب دالتين ▪ يجد دالة مركبة ذات مجال مقيد ▪ يفكك دالة مركبة

ملاحظات توضيحية:

▪ في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإجراء العمليات على الدوال، على سبيل المثال:

مثال 1. إذا كان $f(x) = 3x + 2$ و $g(x) = 4 - 5x$ ، أوجد ما يلي واذكر المجال: أ) $(f+g)(x)$ ب) $(f-g)(x)$ ج) $(f \cdot g)(x)$ د) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	*الحل:* أ) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ = = المجال: جميع الأعداد الحقيقية ب) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ = = المجال: جميع الأعداد الحقيقية ج) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ = = = المجال: جميع الأعداد الحقيقية د) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ = المجال: $\left(-\infty, \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$

▪ في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بتركيب دالتين، على سبيل المثال:

مثال 2. إذا كان $f(x) = 6x + 5$ و $g(x) = x^2 - 3x$ ، أوجد ما يلي: أ) $[f \circ g](x)$ ب) $[g \circ f](x)$	*الحل:* أ) $[f \circ g](x) = f[g(x)]$ = =

ج) $[g \circ f](-3)$	= ب) $[g \circ f](x) = g[f(x)]$ = = = = ج) $[g \circ f](-3) = 36(-3)^2 + 42(-3) + 10$ =

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بتركيب الدوال التي يكون لها مجال مقيد، على سبيل المثال:

مثال 3: إذا كان $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x - 2$ ، أوجد ما يلي واذكر المجال: أ) $[f \circ g](x)$ ب) $[g \circ f](x)$	*الحل:* *أ)* $[f \circ g](x) = f[g(x)]$ = = يجب ألا يكون مجال $f(x)$ سالبًا. ولذلك، $x \geq 0$. مجال $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية. مجال $[f \circ](x)$ هو $x \geq 2$. *ب)* $[g \circ f](x) = g[f(x)]$ = = يجب ألا يكون مجال $f(x)$ سالبًا. ولذلك، $x \geq 0$. مجال $g(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية. مجال $[g \circ](x)$ هو $x \geq 0$.

ML3.PA2 Exponential and Logarithmic Functions

الدوال الأسية واللوغاريتمية **ML3.PA2**

Subject: Mathematics المادة: الرياضيات	Level: Level 3 المستوى: مستوى 3	Code: ML3.PA2 الرمز: ML3.PA2
Strand: Patterns, Algebra & Functions المحور: الأنماط والجبر والدوال	*Unit: Exponential and Logarithmic Functions* *الوحدة: الدوال الأسية واللوغاريتمية*	

المؤشر

بنهاية هذا الصف، سوف يكون الطلبة قادرين على:

- رسم الدوال الأسية واللوغاريتمية الطبيعية بيانيًا وتحليلها وحل معادلاتها

المنهج التربوي

طوال هذه الوحدة، سوف يقضي الطلبة معظم وقتهم في التعلم من خلال:

- توسيع نطاق المعرفة السابقة بالدوال الأسية واللوغاريتمية ليشمل سياق الأساس الطبيعي

المخرجات التعليمية

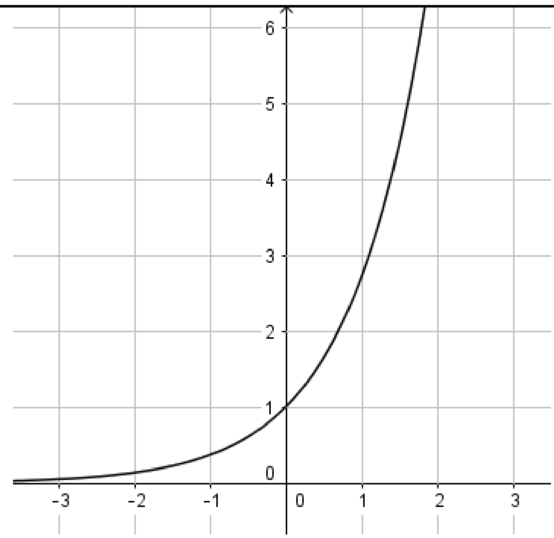
يتعلم الطالب أن:

	Mastered (Learning Outcome) المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	Developing المستوى المتقدم	Emerging المستوى المبتدئ	Assessment Criteria معايير التقويم
ML3.PA2.1	يرسم بيان الدالة الأسية ودالة اللوغاريتم الطبيعي مع تحويلاتها الهندسية $y = e^x$ و $\boldsymbol{y = \ln x}$ ، ويحللها	يرسم تحويلات $y = e^x$ بيانيًا، ويحللها	**يرسم** $y = e^x$ **بيانيًا، ويحللها**	▪ يرسم $y = e^x$ بيانيًا ▪ يرسم تحويلات $y = e^x$ بيانيًا ▪ يرسم $y = \ln x$ ومعكوس $y = e^x$ بيانيًا ▪ يرسم تحويلات $y = \ln x$ بيانيًا

ملاحظات توضيحية:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة برسم $y = e^x$ بيانيًا وتحليلها، على سبيل المثال:

مثال 1. خطط الرسم البياني لـ $y = e^x$، وحلله	*الحل:*



المجال: $(-\infty, \infty)$

المدى: $(0, \infty)$

نقطة التقاطع y: $(0, 1)$

خط التقارب: x-axis $(y = 0)$

السلوك النهائي: $\lim_{x\to-\infty}(x) = 0$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

متزايد: $(-\infty, \infty)$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة برسم تحويلات $y = e^x$ بيانيًا وتحليلها، على سبيل المثال:

مثال 2.

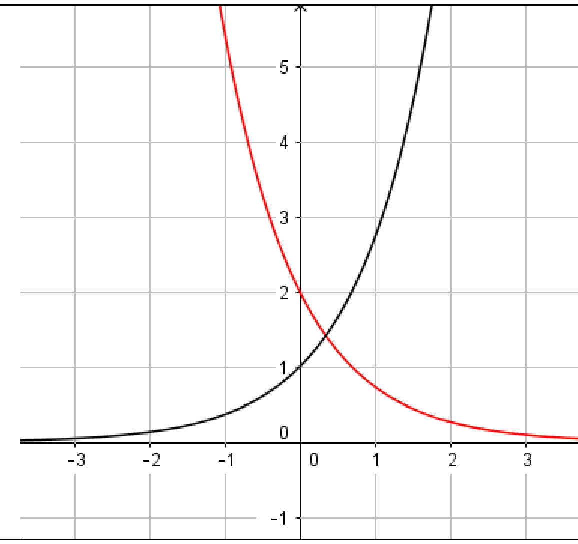
صف التحويل وخطط الرسم البياني لـ $y = 2e^{-x}$

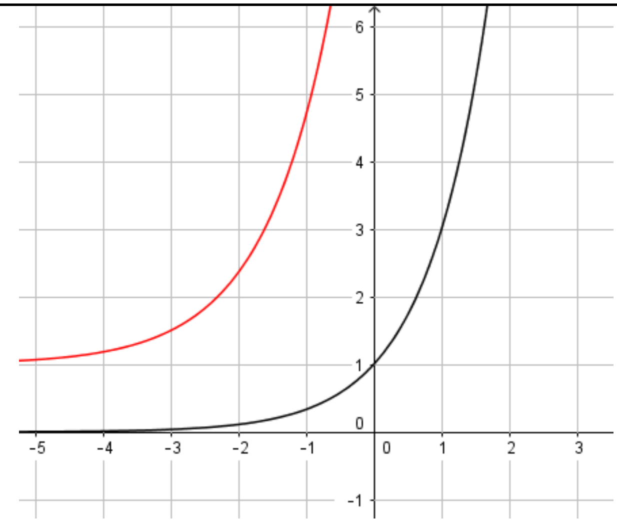
الرسم البياني عبارة عن تحويل للرسم البياني لـ $y = e^x$ في شكل انعكاس في المحور y، والرسم ممتد رأسيًا.

مثال 3.

صف التحويل وخطط الرسم البياني لـ $y = \frac{1}{2}e^{x+3} + 1$

الرسم البياني مزاح بمقدار 3 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى الأعلى، والرسم مضغوط رأسيًا.

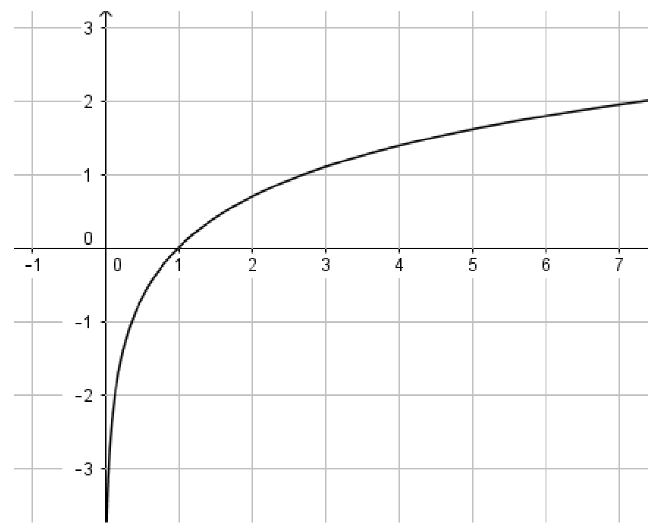




- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة برسم تحويلات $y = \ln x$ بيانيًا وتحليلها، على سبيل المثال:

مثال 4:

خطط الرسم البياني لـ $y = \ln x$، وحلله

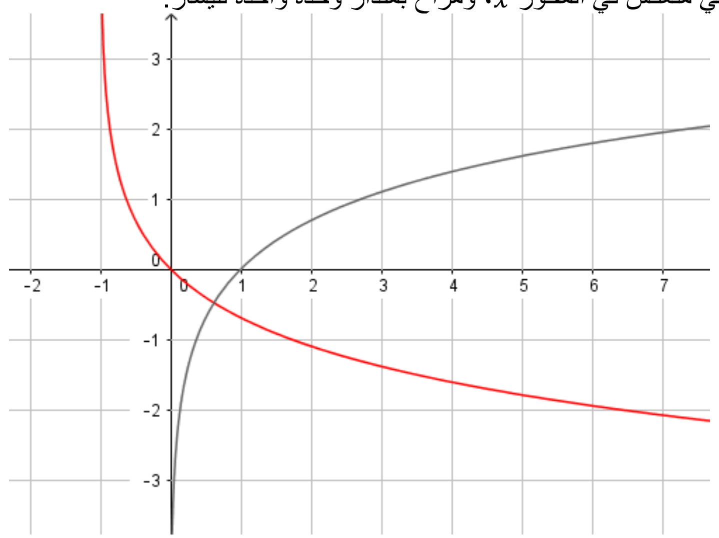


المجال: $(0, \infty)$

مثال 5.

صف التحويل، وخطط الرسم البياني لـ $y = -\ln(x + 1)$

الرسم البياني منعكس في المحور x، ومزاح بمقدار وحدة واحدة لليسار.



المدى: $(-\infty, \infty)$ نقطة التقاطع x: $(1, 0)$ خط التقارب: المحور y $(x = 0)$	

$ML3.PA2.2$	يحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية، ويحل المسائل باستخدام نماذج النمو الأسي	يحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية	يحل **المعادلات الأسية البسيطة**	▪ يحل المعادلات الأسية باستخدام خاصية التباين ▪ يحل المعادلات الأسية باستخراج اللوغاريتمات من كلا الجانبين ▪ يحل المعادلات الأسية في الصيغة التربيعية ويتحقق من وجود حلول بديلة ▪ يحل المعادلات اللوغاريتمية ويتحقق من وجود حلول بديلة ▪ يستخدم نماذج النمو الأسي

ملاحظات توضيحية:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بحل المعادلات الأسية البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد حل $3^{2x-1} = 27$	*مثال 2.* أوجد حل $10^{x+5} - 8 = 60$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بحل المعادلات الأسية واللوغاريتمية، على سبيل المثال:

مثال 3. أوجد حل $e^{2x} + e^x - 12 = 0$ نفترض أن $u = e^x$	*مثال 4.* أوجد حل $2 + 3\log 3x = 5$	*مثال 5.* أوجد حل $\ln(x-3) + \ln(x-2) = \ln(2x+24)$

عوض مرة أخرى بـ $u = e^x$ اختبر الحل:		اختبر الحل عندما $x = 9$: وهو صحيح. لذلك، $x = 9$ يعتبر حلاً. اختبر الحل عندما $x = -2$: لا يمكن إيجاد لوغاريتم لقيمة سالبة، لذلك $x = -2$ ليس حلاً.

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بحل المسائل باستخدام نماذج النمو الأسي، على سبيل المثال:

مثال 6. قبل شهرين، امتلك متجر لبيع الحيوانات الأليفة 3 فئران. الآن لديه 18 فأرًا. أ) اكتب معادلة أسية لتمثيل هذه الحالة. ب) كم عدد الفئران التي سوف يمتلكها المتجر بعد شهرين آخرين؟ ج) كم عدد الفئران التي سوف يمتلكها المتجر بعد سنة واحدة من الآن؟	*الحل:* *أ)* بما أن $N_0 = 3$ عندما $t = 2, N(2) = 18$ أ) بعد شهرين آخرين، $t = 4$ بعد شهرين آخرين، سيكون هناك 108 فأرًا. ب) بعد سنة واحدة، $t = 14$

بعد عام واحد، سيكون هناك 840046 فأرًا.	

ML3.PA3 Limits and Continuity

ML3.PA3 ***النهايات والاتصال***

Subject: Mathematics المادة: الرياضيات	Level: Level 3 المستوى: المستوى 3	Code: ML3.PA3 الرمز: ML3.PA3
Strand: Patterns, Algebra & Functions المحور: الأنماط والجبر والدوال	*Unit: Limits and Continuity* *الوحدة: النهايات والاتصال*	

المؤشر

بنهاية هذا الصف، سوف يكون الطلبة قادرين على:

- إيجاد قيم نهايات مجموعة متنوعة من الدوال وتحديد اتصالها عند نقطة

المنهج التربوي

طوال هذه الوحدة، سوف يقضي الطلبة معظم وقتهم في التعلم من خلال:

- إيجاد قيم النهايات من خلال فحص التمثيلات البيانية والجبرية
- تحديد نقاط انقطاع الدالة ونوعها من خلال فحص التمثيلات البيانية والجبرية
- استيعاب المفاهيم تحضيرًا لتناول موضوعات حساب التفاضل والتكامل

المخرجات التعليمية

يتعلم الطالب أن:

	Mastered (Learning Outcome) المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	Developing المستوى المتقدم	Emerging المستوى المبتدئ	Assessment Criteria معايير التقويم
ML3.PA3.1	يجد نهاية دالة بالتعويض المباشر أو من البيان أو باستخدام خواص النهايات	يستخدم التعويض المباشر، أو قراءة الرسوم البيانية، **أو المعالجة الجبرية** لإيجاد نهاية دالة	يستخدم التعويض المباشر، أو قراءة الرسوم البيانية لإيجاد قيم النهايات البسيطة	▪ يستخدم التعويض المباشر لإيجاد قيم النهايات ▪ يقرأ الرسم البياني لإيجاد قيم النهايات ▪ يستخدم المعالجة الجبرية لإيجاد قيم النهايات ▪ يطبق الخصائص والأساليب الخاصة بالنهايات لإيجاد قيمها

ملاحظات توضيحية:

- **تعريف:** نقول أن نهاية $f(x)$ هي L حيث تقترب x من a، ونكتب ذلك كما يلي:
- شريطة أن نجعل $f(x)$ قريبة من L مثلما نريد لجميع x أن تكون قريبة من a بشكل كاف، من كلا الجانبين، دون أن تتساوى x مع a.
- **النهاية اليمنى**

  نقول أن $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$
- شريطة أن نجعل $f(x)$ قريبة من L مثلما نريد لجميع x أن تكون قريبة من a بشكل كاف و $x >$ ، دون أن تتساوى x مع a.
- **النهاية اليسرى**

  نقول أن $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$
- شريطة أن نجعل $f(x)$ قريبة من L مثلما نريد لجميع x أن تكون قريبة من a بشكل كاف و $x <$ ، دون أن تتساوى x مع a.
- **الحقيقة**

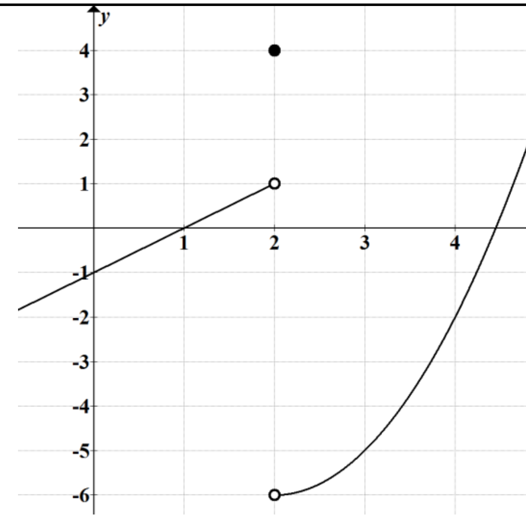
  بمعلومية الدالة $f(x)$، إذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x) = L = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$

فإنه سوف توجد نهاية طبيعية و$\lim_{x\to a} f(x) = L$
وبالمثل، إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = L$
فإن $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$

- **النظرية:**
لأي ثابت c وأي عدد حقيقي، $\boldsymbol{\lim_{x\to a} c =}$.
لأي عدد حقيقي a، $\boldsymbol{\lim_{x\to a} x =}$.
- **النظرية:**
نفترض وجدود كل من $\lim_{x\to a}(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$، ونفترض أن c هي أي ثابت. فإن ما يلي يكون منطبقًا:
- $\lim_{x\to a}[c\, f(x)] = c\, .\lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x) \mp g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \mp \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ (if $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$)

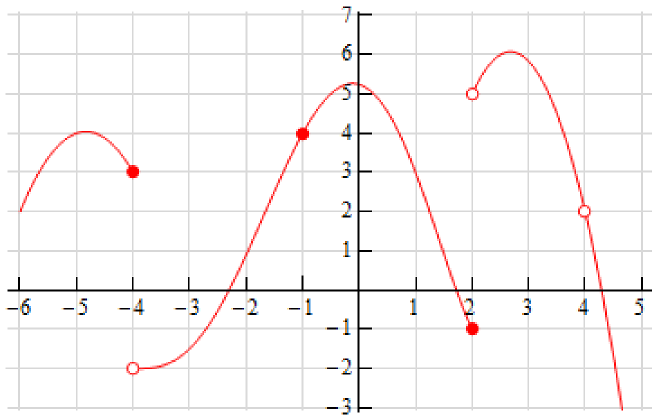
- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة باستخدام التعويض المباشر أو القراءة من الرسم البياني لإيجاد قيم النهايات البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1: أوجد قيمة $\lim_{x\to 2}(2x - x^2 + 3)$	*مثال 2:* أوجد قيمة $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-3}{x-1}\right)$
مثال 3: استخدم الرسم البياني للدالة f لإيجاد كل مما يلي: أ) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ب) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ج) $\lim_{x\to 2} f(x)$ د) $f(2)$	*مثال 4:* استخدم الرسم البياني للدالة f لإيجاد كل مما يلي: أ) $\lim_{x\to -4^-} f(x)$ ب) $\lim_{x\to -4^+} f(x)$ ج) $\lim_{x\to -4} f(x)$ د) $\lim_{x\to 4} f(x)$ هـ) $f(4)$



أ) 1
ب) −6
ج) لا توجد
د) 4

و) $\lim_{x\to-1} f(x)$



أ) 3
ب) −2
ج) لا توجد
د) 2
هـ) لا توجد
و) 4

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة باستخدام المعالجة الجبرية لإيجاد قيم النهايات، على سبيل المثال:

مثال 5.
أوجد قيمة ما يلي

ملحوظة: لم نتمكن من التعويض بـ $x = 2$ مباشرة في النهاية لأنها ستكون غير معرفة.

مثال 6.
أوجد قيمة ما يلي

▪ في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة باستخدام الخصائص والأساليب المتعلقة بالنهايات لإيجاد قيمتها، على سبيل المثال:

مثال 7.	مثال 8.
أوجد قيمة $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-x-6}$	أوجد قيمة $\lim_{x\to 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\right)$

مثال 9. أوجد قيمة $\lim_{x\to -4} \frac{\lvert x+3\rvert -1}{x^2+3x-4}$ على مقربة من النقطة 4− $\lvert x+3\rvert = -(x+3)$	*مثال 10.* إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2+3x-2, & x \le 1 \\ \lvert 1-3\rvert, & x > 1 \end{cases}$ أوجد قيمة $\lim_{x\to 1} f(x)$ إذن،

ML3.PA3.2	يجد نهاية الدوال المثلثية بالتعويض المباشر أو استخدام النظرية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$، **والتقنيات الجبرية لحساب نهايات الدوال المثلثية**	يجد نهاية الدوال المثلثية بالتعويض المباشر أو استخدام النظرية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = 1$ لحساب نهايات الدوال المثلثية	يستخدم **التعويض المباشر** لحساب نهايات الدوال المثلثية	▪ يستخدم التعويض المباشر لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية ▪ يستخدم المعالجة الجبرية لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية ▪ يستخدم نظرية $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية ▪ يستخدم الأساليب الجبرية لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية

ملاحظات توضيحية:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة باستخدام التعويض المباشر لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية، على سبيل المثال:

مثال 1. *أوجد قيمة* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{\cos 3x}\right)$	*مثال 2.* *أوجد قيمة:* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\frac{3+\cos 2x}{1+\sin x}\right)$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة باستخدام نظرية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية، على سبيل المثال:

مثال 3: أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$	*مثال 4:* أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة باستخدام الأساليب الجبرية لإيجاد قيم نهايات الدوال المثلثية، على سبيل المثال:

مثال 5: أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{x^2+5x}\right)$ يلزم استخدام نظرية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	*مثال 6:* أوجد قيمة $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

ML3.PA3.3	يحسب نهايات الدوال النسبية عندما **x** تؤول إلى ما لانهاية أو سالب مالا نهاية	يحسب النهايات التي تميل إلى ما لانهاية **في الدوال النسبية**	يحسب النهايات التي تميل إلى ما لانهاية **في الدوال النسبية البسيطة**	▪ يجد قيم النهايات التي تميل إلى ما لانهاية في الدوال النسبية ▪ يجد قيم النهايات التي تميل إلى ما لانهاية في الدوال النسبية التي تتضمن أسس سالبة وكسرية

ملاحظات توضيحية:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد قيم النهايات التي تميل إلى ما لانهاية في الدوال النسبية البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1.	مثال 2.
اوجد قيمة $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}+5\right)$	أوجد قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد قيم النهايات التي تميل إلى ما لانهاية في الدوال النسبية، على سبيل المثال:

مثال 3.	مثال 4.

أوجد قيمة: $\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^2-2x}{1+x^2}$	أوجد قيمة $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-9}{x^2-5}$

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بإيجاد قيم النهايات التي تميل إلى ما لانهاية في الدوال النسبية التي تتضمن أسس سالبة وكسرية، على سبيل المثال:

مثال 5. أوجد قيمة $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^{-3}-5x^{-2}}{x^{-3}-1}$	مثال 6. أوجد قيمة $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-4}{\sqrt{x^2+9}}$ حيث إنه عندما $x\to-\infty$ ، فإن $\lvert x\rvert=-x$

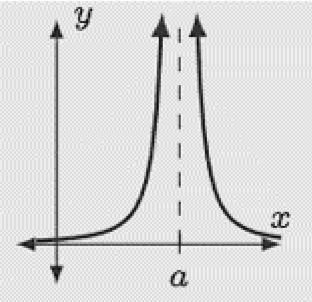
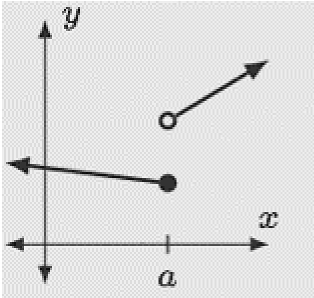
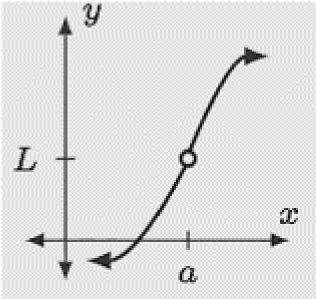
ML3.PA3.4	يحدد اتصال دوال نسبية ودوال مركبة مع إيجاد نقاط الاتصال.	يحدد نقاط الاتصال والانقطاع، ويصنّف الانقطاعات، **ويعيد تعريف الدوال من خلال إزالة الانقطاعات**	**يحدد** نقاط الاتصال والانقطاع، **ويصنّف** الانقطاعات	▪ يحدد نقطة الاتصال ▪ يحدد نقطة الانقطاع ▪ يعيد تعريف الدوال من خلال إزالة الانقطاعات واستخدام نظرية القيمة المتوسطة لتقريب الأصفار

ملاحظات توضيحية:

- لدالة معرفة في الفترة $(,b)$ وتحتوي على $x=c$، نقول أن f مستمرة عند c إذا كان $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. وبخلاف ذلك، نقول أن f منقطعة عند $x=a$.
- نفترض أن F دالة يحتوي مجالها على الفترة $(,b)$. ونفترض أن c نقطة في الفترة (a,b) . نقول أن الدالة F متصلة عند C في حالة استيفاء الشروط الثلاثة التالية:
  1. أن تكون $F(c)$ معرفة
  2. أن تكون $\lim_{x\to c}f(x)$ موجودة

3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

- يكون الانقطاع عند a قابلاً للإزالة إذا كان من الممكن جعل $f(x)$ متصلة من خلال إعادة تعريفها. ويطلق على ذلك "ثقب" (دائرة مفرغة).
- يُعرف الانقطاع عند a بأنه غير قابل للإزالة إذا لم نتمكن من إعادة تعريف $f(c)$ لجعل الدالة متصلة عند $x = a$. ويسمى ذلك بالقفزة، أو الانقطاع اللانهائي.

انقطاع غير قابل للإزالة (لانهائي)	**انقطاع غير قابل للإزالة (قفزة)**	**انقطاع قابل للإزالة (ثقب)**
		

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بتحديد نقاط الاتصال والانقطاع، وتصنيف الانقطاعات، على سبيل المثال:

مثال 1.

هل الدالة $f(x) = 3x^2 - 6x + 10$ متصلة عند النقطة $x = 2$؟

كي تكون متصلة، لابد من استيفاء الشروط الثلاثة لاتصال الدوال:

1. $f(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 10 = 10$
2. $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 6x + 10)$

=

3. $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

إذن، f متصلة عند $x = 2$.

مثال 2.

حدد اتصال الدالة التالية عند النقطة $x = 1$

شروط الاتصال الثلاثة:

1. $y(1) = \frac{1+1}{1-2} = -2$
2. $\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-2}$
3. $\lim_{x\to 1} y(x) = y(1)$

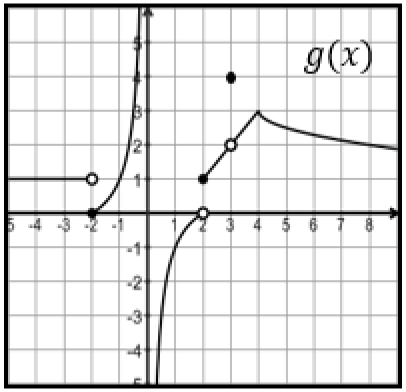
إذن، y متصلة عند $x = 1$.

مثال 3.

الرسم البياني للدالة $g(x)$ موضح أدناه

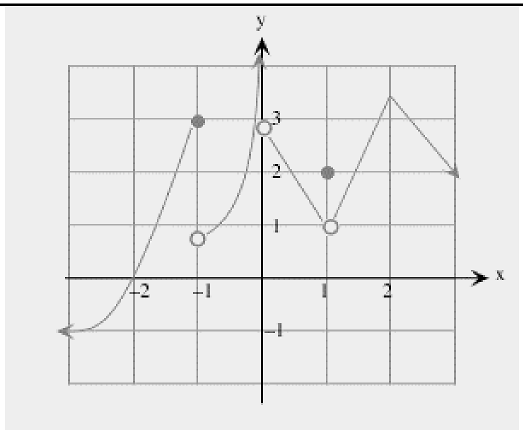
مثال 4.

نفترض أن الرسم البياني للدالة f كما هو موضح أدناه



أ) عند أي النقاط تكون G غير متصلة؟
ب) قم بتصنيف أي نقاط انقطاع موجودة في الجزء (أ).

أ) غير متصلة عند $x = -2, 0, 2, 3$
ب) عند $x = -2$، توجد قفزة
عند $x = 0$، الانقطاع لانهائي
عند $x = 2$، توجد قفزة
عند $x = 3$، يوجد ثقب (قابل للإزالة)



أ) عند أي من نقاط مجال f تكون الدالة f غير متصلة؟
ب) حدد طبيعة نقاط الانقطاع من الجزء (ب).

أ) $x = -1, 0, 1$
ب) عند $x = -1$، توجد قفزة
عند $x = 0$، الانقطاع لانهائي
عند $x = 1$، يوجد ثقب (قابل للإزالة)

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإعادة تعريف الدوال من خلال إزالة الانقطاعات، على سبيل المثال:

مثال 5.

حدد ما إذا كانت الدالة f متصلة عند النقطة $x = -1$

$f(-1)$ غير موجودة. وبالتالي، f غير متصلة عند $x = -1$

ضع $f(-1) = -2$

مثال 6.

هل الدالة $g(x) = \frac{\sqrt{\ }-2}{x-4}$ متصلة عند $x = 4$؟

$g(4)$ غير موجودة. وبالتالي، G غير متصلة عند $x = 4$

ضع $g(x) = \frac{1}{4}$

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة باستخدام نظرية القيمة المتوسطة لتقريب الأصفار، على سبيل المثال:

مثال 7.

حدد من بين أي من الأعداد الصحيحة المتتالية تقع الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = -x^3 + 4x - 2$ في الفترة $[-3, 3]$.

الحل:

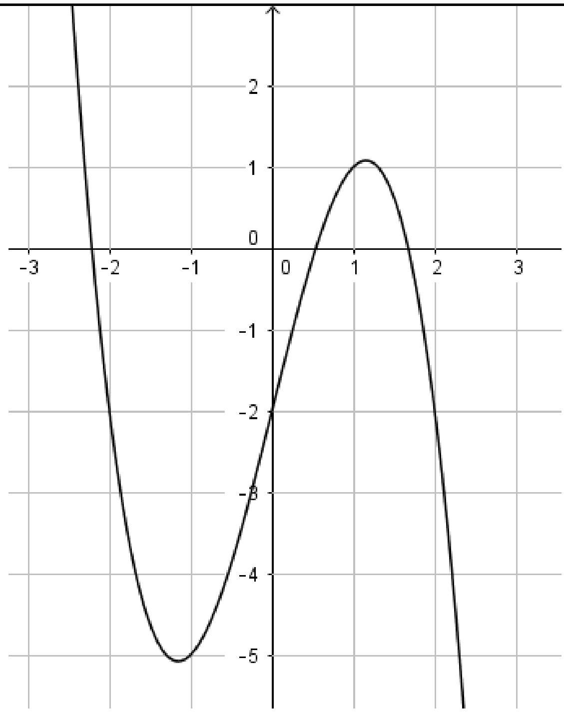
3	2	1	0	1–	2–	3–	
17–	2–	1	2–	5–	2–	13	

بما أن $f(-3)$ موجبة و$f(-2)$ سالبة، فإنه باستخدام مبدأ تحديد موقع الأصفار، يكون للدالة $f(x)$ صفرًا بين –3 و–2.

هناك أيضًا تغير في علامة $f(x)$ بين 0 و1، وبين 1 و2.

هناك أصفار في الفترات:

الرسم البياني لـ $f(x)$ أدناه يدعم ذلك.


2
1
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
-1
-2
-3
-4
-5

Code: ML3. PA4 الرمز: ML3. PA4	Level: Level 3 المستوى: المستوى 3	Subject: Mathematics المادة: الرياضيات
Unit: Differentiation *الوحدة: التفاضل*		Strand: Patterns, Algebra & Functions المحور: الأنماط والجبر والدوال

المؤشر

بنهاية هذا الصف، سوف يكون الطلبة قادرين على:

- تمييز الدوال باستخدام المبادئ الأولية، واستخدام قواعد حاصل الضرب وناتج القسمة والسلسلة، بما في ذلك الدوال المثلثية والأسية واللوغاريتمية

المنهج التربوي

طوال هذه الوحدة، سوف يقضي الطلبة معظم وقتهم في التعلم من خلال:

- تطوير الأساليب الحسابية المتعلقة بالتفاضل والتي تستغل المهارات الجبرية
- الاستعداد لتطبيقات التفاضل في الوحدة التالية

المخرجات التعليمية

يتعلم الطالب أن:

Assessment Criteria **معايير التقويم**	Emerging **المستوى المبتدئ**	Developing **المستوى المتقدم**	Mastered (Learning Outcome) **المستوى المتقن** **(المخرج التعليمي)**	
▪ يجد تفاضل الدوال الثابتة والخطية والتربيعية باستخدام المبادئ الأولية ▪ يجد تفاضل مجموعة متنوعة من الدوال باستخدام المبادئ الأولية	يجد تفاضل الدوال البسيطة (**ثابتة وخطية**) باستخدام التعريف	يجد تفاضل الدوال (ثابتة، خطية، **تربيعية**) باستخدام التعريف	يجد مشتقة دالة باستخدام التعريف.	*ML3. PA4.1*

ملاحظات توضيحية:

- في الصف 11، يتم تعريف الطلبة بمفهوم متوسط معدلات التغير ومعدلات التغير اللحظية. ويعد هذا الأمر هامًا قبل أن يبدءوا العمل على دالة الميل باستخدام المبادئ الأولية.
- يمكن للطلبة إيجاد معدل التغير اللحظي من خلال إيجاد ميل المماس عند أي نقطة في الرسم البياني.
- تعطى مشتقة f عند x من خلال $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-f(x)}{h}$ شريطة وجود نهاية. لجميع x التي يوجد لها هذه النهاية، تمثل f' دالة x.
- تعطى مشتقة f عند a من خلال $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$
- تعطى مشتقة f عند a من خلال $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- يطلق على الدالة تفاضلية عند x إذا كانت مشتقتها موجودة عند x.
- بالإضافة إلى $f'(x)$ ، تستخدم تدوينات أخرى للتدليل على مشتقة $y = f(x)$. وأكثرها شيوعاً هي $'(x), \frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}(f(x))$.
- إذا كانت $y = f(x)$ تمثل معادلة لمنحنى، فإن $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ هو ميل المماس عند أي نقطة على المنحنى.

- في المستوى **المبتدئ**، يوجد الطلبة تفاضل الدوال الثابتة والخطية باستخدام المبادئ الأولية، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد تفاضل $f(x) = 4$ باستخدام المبادئ الأولية	*مثال 2.* أوجد تفاضل $g(x) = 5 - 2x$ باستخدام المبادئ الأولية عند x=3

- في المستوى **المتقدم**، يوجد الطلبة أيضًا تفاضل الدوال التربيعية باستخدام المبادئ الأولية، على سبيل المثال:

مثال 3. أوجد تفاضل $f(x) = x^2 - 1$ باستخدام تعريف المشتقة	*مثال 4.* أوجد تفاضل $f(x) = x^2 - 2x$ باستخدام المبادئ الأولية عند $x = 3$

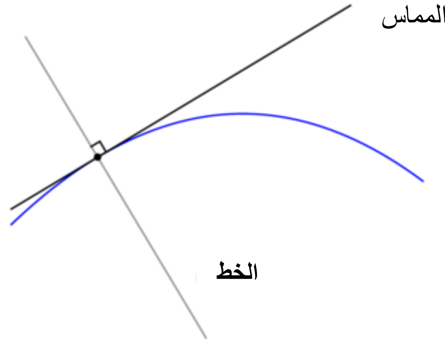
- في المستوى **المتقن**، يوجد الطلبة تفاضل مجموعة متنوعة من الدوال باستخدام المبادئ الأولية، على سبيل المثال:

مثال 5.	مثال 6.
أوجد تفاضل $f(x) = \sqrt{2x+5}$ باستخدام المبادئ الأولية	أوجد تفاضل $r(x) = \frac{2}{x-1}$ باستخدام تعريف المشتقة

ML3. PA4.2	يجد معادلة المماس و العمودي على المماس لدالة عند أية نقطة.	يجد **معادلة المماس** لمنحنى عند أي نقطة	يستخدم التفاضل لإيجاد **ميل منحنى** عند أي نقطة	▪ يستخدم التفاضل لإيجاد ميل منحنى عند أي نقطة ▪ يجد معادلة المماس لمنحنى عند أي نقطة ▪ يجد معادلة الخط العمودي لمنحنى عند أي نقطة

ملاحظات توضيحية:

▪ هذه هي المرة الأولى التي يستخدمون فيها ذلك لإيجاد معادلة المماس أو الخط العمودي.



- يمكن استخدام المشتقة أو دالة الميل في إيجاد الميل عند أي نقطة على منحنى. إذا كانت معادلة المنحنى هي $y = f(x)$، فإن الميل عند النقطة $x = x_1$ يعطى من خلال $m = f'(x_1)$.
- بالنسبة للمماس لمنحنى، إذا كنا نعرف النقطة (x_1, y_1) على المنحنى $y = f(x)$ ويمكننا حساب الميل عند هذه النقطة، فإننا نتمكن من استخدام الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم $y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث $m = f'(x_1)$.
- بالنسبة للخط العمودي لمنحنى، إذا كنا نعرف النقطة (x_1, y_1) على المنحنى $y = f(x)$، وكان ميل المماس عند النقطة هو m_1، فإن ميل الخط العمودي سيكون $m_2 = \frac{-1}{m_1}$. ويمكننا استخدام الصيغة العامة لمعادلة الخط المستقيم $y - y_1 = m_2(x - x_2)$.

تذكر:

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد ميل المنحنى عند نقطة، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد ميل $y = x^2 - 4x$ عند النقطة (4، 0) عند (4، 0)	*مثال 2.* أوجد ميل $f(x) = 4\sin 2x$ عند $x = \frac{\pi}{6}$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد معادلة المماس لمنحنى عند نقطة، على سبيل المثال:

مثال 3: أوجد معادلة المماس لـ $f(x) = x^3$ عند النقطة (2، 8).	*مثال 4:* أوجد معادلة المماس لـ $y = (x+2)(4-x)$ عند $x = 0$.

عند النقطة (2، 8) معادلة المماس أو	عندما $x = 0$ و معادلة المماس أو

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بإيجاد معادلة الخط العمودي لمنحنى عند أي نقطة، على سبيل المثال:

مثال 5. حدد معادلة الخط العمودي للمنحنى $xy = 4$ عند النقطة (–1، 4) عند النقطة (–1، 4) إذن ميل الخط العمودي هو معادلة الخط العمودي	*مثال 6.* أوجد معادلة الخط العمودي للمنحنى $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 1$ عند $x = 2$. ميل المماس ميل الخط العمودي معادلة الخط العمودي

ML3. PA4.3	يستخدم قواعد الاشتقاق (ضرب دالتين) لإيجاد مشتقة حدودية ودوال تحتوي على تعابير جبرية (أسس سالبة ، أو أسس نسبية)	يستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد مشتقة حدودية ودالة **ذات أسس سالبة**	يستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد مشتقة حدودية **تتضمن كثيرات حدود بسيطة**	▪ يستخدم قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل كثيرات الحدود البسيطة ▪ يستخدم قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل الحواصل التي تتضمن أسس صحيحة سالبة ▪ يستخدم قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل الحواصل التي تتضمن **أسس كسرية**

ملاحظات توضيحية:

- قد يحاول العديد من الطلبة إيجاد تفاضل الحواصل بطريقة مماثلة لمجموع دالتين أو أكثر من خلال محاولة إيجاد تفاضل كل منهما. وسوف يحتاج الطلبة إلى الممارسة في التعرف على حاصل الضرب ومن ثم معرفة تطبيق قاعدة حاصل الضرب.
- بشكل عام، تُكتب **قاعدة حاصل الضرب** بصيغتين:

	أو

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة باستخدام قاعدة حاصل الضرب في إيجاد تفاضل حواصل كثيرات الحدود البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1. استخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل حدد الدالتين $f(x) = 3x+2$ أوجد تفاضل الدالتين	*مثال 2.* استخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين

$= 3(2 - x^2) + (-2x)(3x+2)$ $= 6 - 3x^2 - 6x^2 - 4x$ $= 6 - 4x - 9x^2$	

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة أيضًا باستخدام قاعدة حاصل الضرب مع الدوال ذات الأسس السالبة، على سبيل المثال:

مثال 3. استخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	*مثال 4.* استخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة

- في المستوى **المتقن**، تتضمن دراسة الطلبة أيضًا الدوال ذات الأسس الكسرية، على سبيل المثال:

مثال 5. استخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل حدد الدالتين	*مثال 6.* استخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل حدد الدالتين

أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة

ML3. PA4.4	يستخدم قواعد الاشتقاق (قسمة دالتين) لإيجاد مشتقة حدودية ودوال تحتوي على تعابير جبرية (أسس سالبة ، أو أسس نسبية)	يستخدم قواعد الاشتقاق (قسمة دالتين) لإيجاد مشتقة حدودية **ذات أسس سالبة**	يستخدم قواعد الاشتقاق (قسمة دالتين) **تتضمن كثيرات حدود بسيطة**	▪ يستخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل النواتج التي تتضمن كثيرات حدود بسيطة ▪ يستخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل النواتج التي تتضمن دوال ذات أسس صحيحة سالبة ▪ يستخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل النواتج التي تتضمن دوال ذات أسس كسرية

ملاحظات توضيحية:

- ناتج القسمة يعني نتيجة قسمة مقدارين.
- بشكل عام، تُكتب **قاعدة ناتج القسمة** في صيغتين:

	أو

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة باستخدام قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل الدوال التي تتضمن كثيرات الحدود البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1. استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	*مثال 2.* استخدم قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة باستخدام قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل النواتج التي تتضمن دوال ذات أسس صحيحة سالبة، على سبيل المثال:

مثال 3. أوجد التفاضل حدد الدالتين	*مثال 4.* أوجد التفاضل حدد الدالتين

أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة أيضًا بإيجاد تفاضل الدوال التي تتضمن أسس كسرية باستخدام قاعدة ناتج القسمة، على سبيل المثال:

مثال 5. أوجد التفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	*مثال 6.* أوجد التفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة

ML3. PA4.5	يستخدم قاعدة السلسة لإيجاد مشتقة تركيب دالتين تحتوي على تعابير جبرية (أسس سالبة ، أو أسس نسبية)	يستخدم قاعدة السلسة لإيجاد مشتقة تركيب دالتين **ذات أسس سالبة**	يستخدم قاعدة السلسة لإيجاد مشتقة تركيب دالتين **تتضمن كثيرات حدود بسيطة**	▪ يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل الدوال المركبة التي تتضمن كثيرات حدود بسيطة ▪ يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل الدوال المركبة التي تتضمن دوال ذات أسس صحيحة سالبة ▪ يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل الدوال المركبة التي تتضمن دوال ذات أسس كسرية

ملاحظات توضيحية:

- الدالة المركبة هي دالة. إذا كان لدينا دالتين $f(x)$ و $g(x)$ ، فإن الدالة المركبة f التي تتبع g ستكون $(fo)(x) = f(g(x))$، على سبيل المثال:

h

$= (x^2 + 5x)^7$

حيث $g(x) = x^2 + 5x$ و $(x) = x^7$

- بشكل عام، تُكتب قاعدة السلسلة بصيغتين:

- بالنسبة للمقدار الأسي، نستخدم هذه المعادلة: إذا كان $y = \left(f(x)\right)^n$ فإن $\frac{dy}{dx} = n\left(f(x)\right)^{n-1} . f'(x)$
- إذا كان لدينا معادلات بارامترية بها المتغيران x و y معرفين بالنسبة إلى t

$x = f(t)$ و $y = g(t)$

يمكننا إيجاد التفاضل باستخدام قاعدة السلسلة

حيث

إذن

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل الدوال البسيطة التي تكون فيها الدالتان من كثيرات الحدود، على سبيل المثال:

مثال 1. استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	*مثال 2.* استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة
مثال 3: أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما يكون $x = t^3 - t$ و $y = 4 - t^2$ *الحل:* أوجد تفاضل كل دالة عوض في المعادلة	

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل الدوال المركبة ذات الأسس الصحيحة السالبة، على سبيل المثال:

مثال 4: استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل	*مثال 5.* استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل

حوّل الأس إلى سالب

حدد الدالتين

أوجد تفاضل الدالتين

استخدم المعادلة

حوّل الأس إلى سالب

حدد الدالتين

أوجد تفاضل الدالتين

استخدم المعادلة

مثال 6.

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما يكون $x = t + \sqrt{t}$ و $y = t - \sqrt{t}$

أوجد تفاضل كل دالة

عوض في المعادلة	

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة أيضًا بإيجاد تفاضل الدوال المركبة ذات الأسس الكسرية، على سبيل المثال:

مثال 7. استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل حول الجذر إلى أس حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة	*مثال 8.* استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل حدد الدالتين أوجد تفاضل الدالتين استخدم المعادلة

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>

مثال 9.

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عندما يكون $x = te^{-t}$ و $y = 2t^2 + 1$

أوجد تفاضل كل دالة

عوض في المعادلة

</td><td>

مثال 10.

أوجد تفاضل زوج المعادلات البارامترية:

أوجد تفاضل كل دالة

عوض في المعادلة

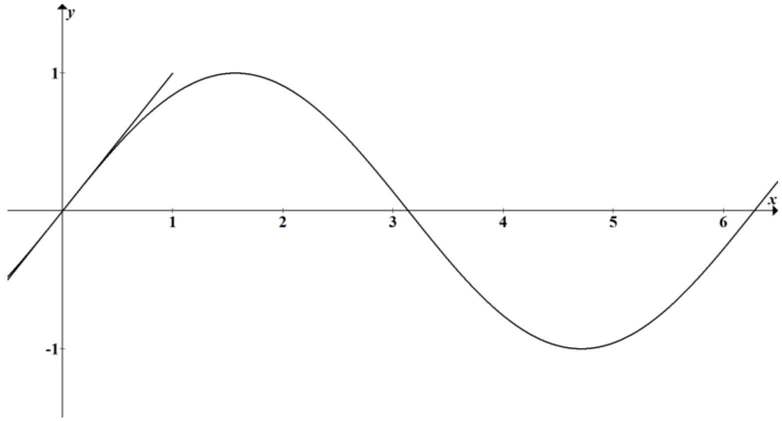
</td></tr>
</table>

ML3. PA4.6	يستخدم قواعد الاشتقاق، قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة الدوال المثلثية	يوجد تفاضل الدوال المثلثية باستخدام قاعدتي السلسلة وحاصل الضرب	يوجد تفاضل الدوال المثلثية **باستخدام قاعدة السلسلة**	▪ يجد تفاضل $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y =$ $\csc x, y = \sec x, y = \cot x$ ▪ يجد تفاضل الدوال المثلثية باستخدام قواعد حاصل الضرب وناتج القسمة والسلسلة

ملاحظات توضيحية:

- تتضمن الدوال المثلثية $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \operatorname{cosec} x, y = \sec x, y = \cot x$.
- لإيجاد تفاضل $y = \sin x$ باستخدام المبادئ الأولية، نحتاج أولاً إيجاد نتيجة للنهاية $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ (باستخدام زاويا نصف القطر).

بالنظر إلى الرسم البياني لـ $y = \sin x$



يبدو أن الدالة المثلثية تقترب من $y = x$ حيث إن قيم x صغيرة جدًا (تقترب x من 0). ويؤكد على ذلك الجدول الذي يحتوي على قيم x و $\sin x$ (باستخدام زاويا نصف القطر).

0,84147	1,00000
0,47942	0,50000
0,09983	0,10000
0,04998	0,05000
0,02000	0,02000

حيث تقترب x من 0 (النهاية)

الآن، نستخدم هذه النتيجة في إثبات مشتقة $\sin x$

إذا كان $(x) = \sin x$ ، فإن

باستخدام معادلات مجموع الحواصل: $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

- يمكننا الآن استخدام هذه المشتقة في تكوين مشتقات للدوال المثلثية الأخرى:

لإيجاد تفاضل $f(x) = \cos x$

نعيد كتابة $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

إيجاد التفاضل باستخدام قاعدة السلسلة

f

إذن $f'(x) = -\sin x$

لإيجاد تفاضل $f(x) = \tan x$

نعيد كتابتها بالشكل التالي $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$

إيجاد التفاضل باستخدام قاعدة ناتج القسمة

f

f

f

إذن $f'(x) = \sec^2 x$

- مشتقات جميع الدوال المثلثية موضحة أدناه

الدالة	المشتقة

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل الدوال المثلثية البسيطة باستخدام قاعدة السلسلة، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد تفاضل $y = \sin x + 3\tan x$	*مثال 2.* اوجد تفاضل $f(x) = 5\sec 2x$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة باستخدام قاعدتي السلسلة وحاصل الضرب لإيجاد تفاضل الدوال المثلثية، على سبيل المثال:

مثال 3. أوجد تفاضل $(x) = \cos x \tan 2x$	*مثال 4.* أوجد تفاضل الدالة التالية $g(x) = \csc 3x - 10\cot x$

- في المستوى **المتقن**، يحتاج الطلبة أيضًا إلى استخدام قاعدة ناتج القسمة لإيجاد تفاضل الدوال المثلثية، على سبيل المثال:

مثال 5. أوجد تفاضل	*مثال 6.* أوجد تفاضل

ML3. PA4.7	يجد مشتقة الدوال الأسية باستخدام قواعد الاشتقاق ، قاعدة السلسلة.	يوجد تفاضل الدالة الأسية باستخدام قاعدة السلسلة **وقاعدة حاصل الضرب**	يوجد تفاضل الدوال الأسية البسيطة **باستخدام قاعدة السلسلة**	▪ يجد تفاضل الدوال الأسية الطبيعية باستخدام قواعد السلسلة وحاصل الضرب وناتج القسمة

ملاحظات توضيحية:

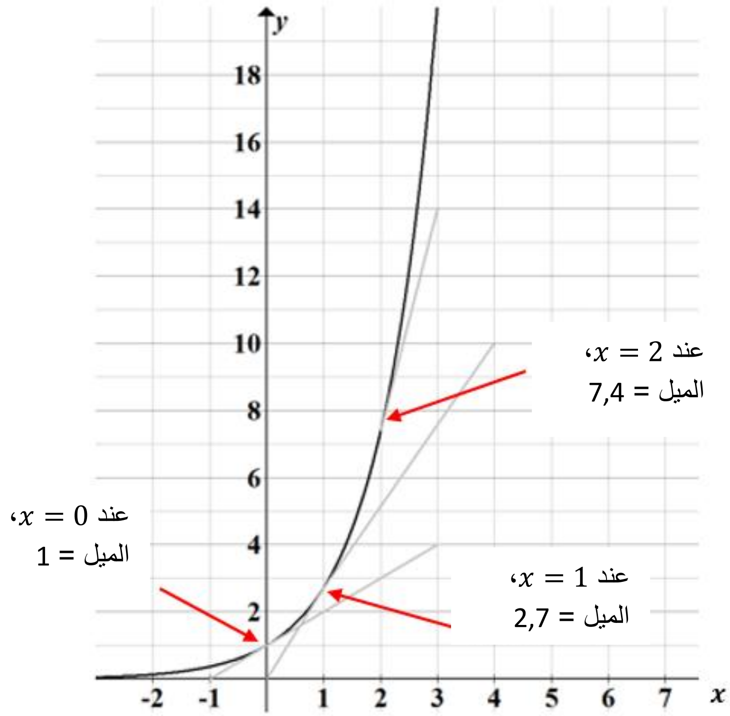
- الدالة الأسية $f(x) = e^x$ هي دالة تدعو إلى الاهتمام حيث إنها هي نفسها المشتقة. فإذا درسنا الرسم البياني لـ e^x ، يمكننا اختبار الميل (قيمة المشتقة) عند قيم مختلفة لـ x من خلال رسم المماسات عند هذه النقاط.

قيمة y عند $x = 0$ هي 1، والميل عند هذه النقطة هو 1.

وبالمثل، قيمة y عند $x = 1$ هي 2,7، والميل عند هذه النقطة هو 2,7.

قيمة y عند $x = 2$ هي 7,4، والميل عند هذه النقطة هو 7,4.

إذن،



- **القاعدة:** إذا كان $f(x) = e^x$، فإن $f'(x) = e^x$
- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل الدوال الأسية البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1.	مثال 2.
أوجد تفاضل $y = e^{4x}$	أوجد تفاضل $(x) = 4e^{-5x}$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة أيضًا باستخدام قاعدة حاصل الضرب عند إيجاد تفاضل الدوال الأسية، على سبيل المثال:

مثال 3: أوجد تفاضل $f(x) = e^{2x}(3x^2 + 4)$ أو	مثال 4: أوجد تفاضل $y = \sqrt{x}\ \ {}^{2x}$

- في المستوى **المتقن**، يحتاج الطلبة أيضًا إلى استخدام قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل الدوال التي تتضمن دالة أسية، على سبيل المثال:

مثال 5: أوجد تفاضل	مثال 6: أوجد تفاضل

ML3. PA4.8	يجد مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي باستخدام قواعد الاشتقاق ، قاعدة السلسلة.	يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية باستخدام قاعدتي السلسلة وحاصل الضرب	يوجد مشتقة الدالة اللوغاريتمية **باستخدام قاعدة السلسلة**	▪ يجد تفاضل الدوال اللوغاريتمية الطبيعية باستخدام قواعد السلسلة وحاصل الضرب وناتج القسمة

ملاحظات توضيحية:

- اللوغاريتم الطبيعي $y = \log_e x$ أو $y = \ln x$ هو معكوس الدالة الأسية (تم تغطية هذه النقطة في الهدف التعليمي السابق).

■ يمكننا تحديد مشتقة الدالة اللوغاريتمية باستخدام معرفتنا بالدالة الأسية ومشتقتها.

نحن نعلم أنه إذا كان $y = b^x$، فإن $\log_b y = x$

بما أن $y = \log_e x$، فإن $x = e^y$

إيجاد التفاضل بالنسبة لـ y

$\frac{d}{d}$

$\frac{d}{d}$

ولكن $x = e^y$

$\frac{d}{d}$

إذن، بصفة عامة

إذا كان $f(x) = \ln x$

فإن $f'(\quad) = \frac{1}{x}$

وباستخدام قاعدة السلسلة

f

f

f

■ في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة باستخدام قاعدة السلسلة لإيجاد تفاضل الدوال اللوغاريتمية البسيطة، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد تفاضل $y = \ln(4x - 2)$	*مثال 2.* أوجد تفاضل $f(x) = \ln(5x + 1)^2$

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة أيضًا باستخدام قاعدة حاصل الضرب لإيجاد تفاضل الدوال المثلثية، على سبيل المثال:

مثال 3: أوجد تفاضل $y = x^2 \ln 2x$	*مثال 4:* أوجد تفاضل $(x) = (x^3 + 1)\ln(4x^2)$ أو

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة أيضًا باستخدام قاعدة ناتج القسمة، على سبيل المثال:

مثال 5: أوجد تفاضل	*مثال 6:* أوجد تفاضل

ML3.PA5 *تطبيقات التفاضل*

Subject: Mathematics المادة: الرياضيات	Level: Level 3 المستوى: المستوى 3	Code: ML3. PA5 الرمز: ML3. PA5
Strand: Patterns, Algebra & Functions المحور: الأنماط والجبر والدوال	*Unit: Applications of Differentiation* *الوحدة: تطبيقات التفاضل*	

المؤشر

بنهاية هذا الصف، سوف يكون الطلبة قادرين على:

- تطبيق أساليب التفاضل لإيجاد نقاط الثبات، والتفاضل الضمني، والمعادلات البارامترية، وحل مسائل الكينماتيكا (الحركة المجردة)، ومعدلات التغير ذات العلاقة، والاستمثال

المنهج التربوي

طوال هذه الوحدة، سوف يقضي الطلبة معظم وقتهم في التعلم من خلال:

- تطبيق المهارات المستفادة في الوحدة السابقة
- استخدام حساب التفاضل والتكامل في حل المسائل المتعلقة بالحياة اليومية

المخرجات التعليمية

يتعلم الطالب أن:

	Mastered (Learning Outcome) المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	Developing المستوى المتقدم	Emerging المستوى المبتدئ	Assessment Criteria معايير التقويم
ML3. PA5.1	يجد النقاط الحرجة ونقاط الانعطاف ويحدد نوعها	يستخدم المشتقة الثانية لإيجاد **نقاط الانعطاف**	يوجد **نقاط التحول** من خلال إيجاد التفاضل، ويحدد نوعها	▪ يجد نقاط التحول باستخدام التفاضل، ويحدد طبيعتها ▪ يجد نقاط الانعطاف باستخدام المشتقة الثانية ▪ يجد النقاط الحرجة، ويحدد طبيعتها

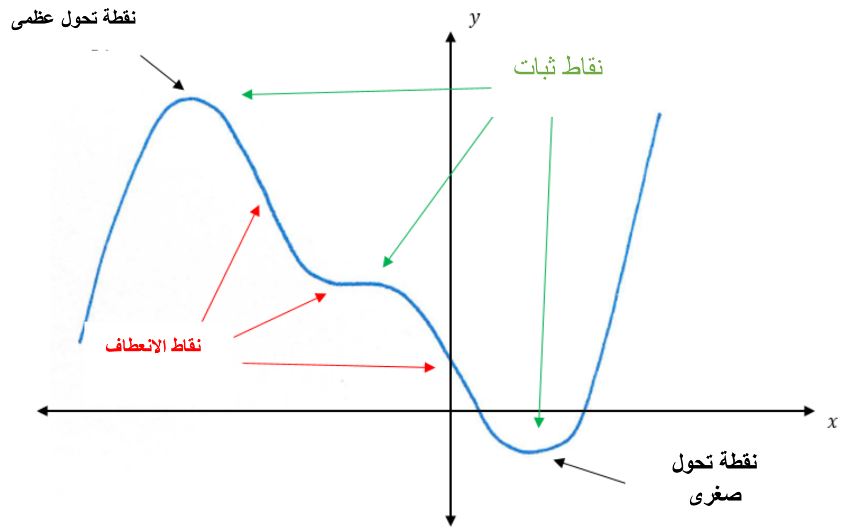
ملاحظات توضيحية:

- عندما نقوم بإيجاد تفاضل دالة، فإننا نحصل على دالة المشتقة أو الميل. وباستخدام ذلك، يمكننا إيجاد انحدار أو ميل دالة عند أي نقطة. وعندما يكون الميل صفرًا، لا تكون الدالة متزايدة أو متناقصة. ونطلق على هذه النقطة **نقطة الثبات**.

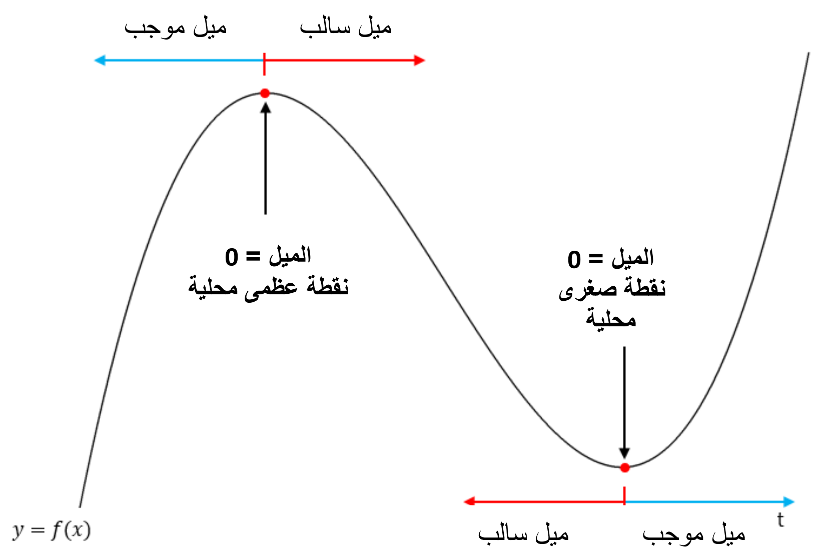
هناك ثلاثة أنواع من نقاط الثبات:

- نقطة عظمى
- نقطة صغرى
- نقطة الانعطاف ليست بالضرورة نقطة ثبات، ولكن يمكن أن تكون نقطة ثبات إذا كان الميل يساوي صفرًا. وتقع نقطة الانعطاف حيث يتوقف الميل عن التزايد ويبدأ في التناقص أو العكس.

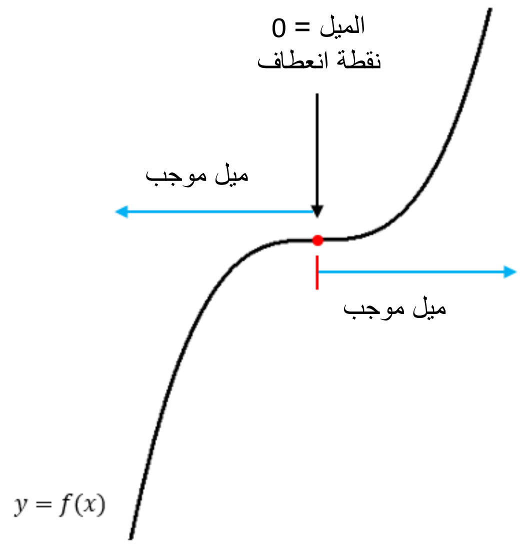
ملحوظة: في المخطط، هناك أمثلة على نقاط الانعطاف التي تمثل نقاط ثبات، ونقاط انعطاف أخرى لا تمثل نقاط ثبات.



- بالنسبة للدالة $y = f(x)$، نقطة الثبات هي نقطة على الرسم البياني للدالة تقع حيث يساوي ميل الدالة صفرًا. إذا تغيرت علامة ميل الدالة عند نقطة الثبات، يطلق عليها نقطة تحول، والتي يمكن أن تكون نهاية عظمى محلية أو نهاية صغرى محلية:



▪ إذا لم تتغير علامة ميل الدالة عند نقطة الثبات، فإنها تكون نقطة انعطاف:



▪ يمكننا إيجاد نقطة الثبات بتعيين $f'(\quad) = 0$ وإيجاد حل x. ولتحديد طبيعة النقطة، يمكننا استخدام عدة الأساليب:

- معرفة شكل الدالة
- حساب الميل في على جانبي النقطة
- إيجاد المشتقة الثانية

▪ اختبار المشتقة الثانية:

فيما يتعلق بنقطة معينة $x = a$، إذا كان

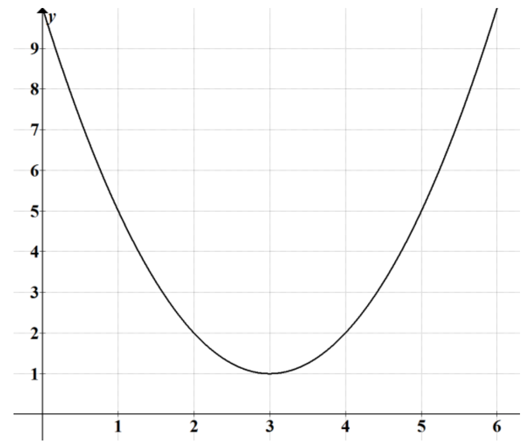
$f'(a) = 0$ و $f''(a) < 0$ ، يكون لدينا نقطة عظمى

$f'(a) = 0$ و $f''(a) > 0$ ، يكون لدينا نقطة صغرى

$f'(a) = 0$ و $f''(a) = 0$، نحتاج إلى المزيد من التحقق.

▪ في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد نقاط التحول وتحديد ما إذا كانت نقاط عظمى محلية أو نقاط صغرى محلية باستخدام أحد الأساليب الثلاثة، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد إحداثيات نقطة تحول الدالة	*مثال 2.* أوجد نقاط تحول الدالة

وحدد طبيعتها توجد نقاط التحول عندما $\frac{dy}{dx} = 0$ عندما $x = 3$ ، الرسم البياني عبارة عن قطع مكافئ موجب  نقطة التحول (3، 1) هي النقطة الصغرى المحلية.	وحدد طبيعتها توجد نقاط التحول عندما $\frac{dy}{dx} = 0$ عندما $x = -1$ عندما $x = 1$ نقاط التحول هي (–1، 4) و (1، 0). اختبار المشتقة الثانية عند (–1، 4) إذن، (–1، 4) هي النقطة العظمى. عند (1، 0) إذن، (1، 0) هي النقطة الصغرى.

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة باستخدام المشتقة الثانية لإيجاد نقاط الانعطاف، على سبيل المثال:

مثال 3: أوجد نقاط الانعطاف للمنحنى	*مثال 4:* أوجد نقاط الانعطاف للدالة

عيّن $f''(x) = 0$ لنقاط الانعطاف

عندما $x = 0$، $f(0) = 0^4 - 4(0)^3 + 16(0) - 2 = -2$
عندما $x = 2$، $f(2) = 2^4 - 4(2)^3 + 16(2) - 2 = 14$

نقاط الانعطاف هي (0، −2) و(2، 14).

عيّن $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$ لنقاط الانعطاف

عندما $x = \frac{1}{2}$، $y = 9 - 36\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{-19}{2}$

نقطة الانعطاف هي $\left(\frac{1}{2}, \frac{-19}{2}\right)$.

▪ في المستوى **المتقن**، يجب على الطلبة إيجاد نقاط الثبات ونقاط الانعطاف، على سبيل المثال:

مثال 5.
بالنسبة للدالة $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 13$، أوجد إحداثيات أي نقاط ثبات ونقاط انعطاف.

عيّن $f'(x) = 0$ لنقاط الثبات

عندما $x = \frac{1}{2}$

عندما $x = -2$
f

اختبار المشتقة الثانية

مثال 6.
أوجد إحداثيات أي نقاط تحول ونقاط انعطاف للدالة

عيّن $f'(x) = 0$ لنقاط التحول

عندما $x = 0$، $f(0) = 2$
عندما $x = 4$، $f(4) = 4^3 - 6(4)^2 + 2 = -30$

اختبار المشتقة الثانية
$f''(0) = 6(0) - 12 = -12 < 0$، إذن هي النقطة العظمى
$f''(4) = 6(4) - 12 = 12 > 0$، إذن هي النقطة الصغرى

عيّن $f''(x) = 0$ لنقاط الانعطاف

$f''\left(\frac{1}{2}\right) = 24\left(\frac{1}{2}\right) + 18 = 30 > 0$، إذن هي النقطة الصغرى $f''(-2) = 24(-2) + 18 = -30 < 0$، إذن هي النقطة العظمى عيّن $f''(x) = 0$ لنقاط الانعطاف عندما $x = \frac{-3}{4}$ الصغرى عند $\left(\frac{1}{2}, \frac{39}{4}\right)$ العظمى عند $(-2, 41)$ نقطة الانعطاف عند $\left(\frac{-3}{4}, \frac{203}{8}\right)$	عندما $x = 2$، $f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 2 = -14$ العظمى عند (0، 2) الصغرى عند (4، −30) نقطة الانعطاف عند (2، −14)

	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.2	يحدد القصوى المطلقة لمجموعة متنوعة من الدوال ويصنفها كعظمى أو صغرى مطلقة	يحدد القيم القصوى المطلقة **للدوال ذات الأسس الكسرية** في فترة معينة، ويصنّفها بوصفها قيم عظمى أو صغرى	يحدد القيم القصوى المطلقة **لكثيرات الحدود** في فترة معينة، ويصنّفها بوصفها قيم عظمى أو صغرى	▪ يحدد القيم القصوى المطلقة **للدوال** في فترة معينة ▪ يصنف القيم القصوى بوصفها قيم عظمى أو صغرى باستخدام اختبار المشتقة الأولى والرسوم البيانية

ملاحظات توضيحية:

- بالنسبة للدالة f المعرفة في الفترة $[,b]$ والعدد $c \in [a\,,b]$

أ. $f(c)$ هي القيمة العظمى المطلقة للدالة f في الفترة $[a\,,b]$ إذا كانت $f(c) \geq f(x)$ لجميع $x \in [a\,,b\,]$

ب. $f(c)$ هي القيمة الصغرى المطلقة للدالة f في الفترة $[a\,,b]$ إذا كانت $f(c) \leq f(x)$ لجميع $x \in [a\,,b\,]$

النظرية:

تحتوي الدالة المستمرة (المتصلة) f المعرفة في الفترة المغلقة $[a,b]$ على كل من قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة في هذه الفترة.

- يكون للدالة قيم قصوى مطلقة عند النقاط الحرجة في الفترة $[a,b]$

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بتحديد القيم القصوى المطلقة لكثيرات الحدود في فترة معينة، وتصنيفها بوصفها قيم عظمى أو صغرى، على سبيل المثال:

مثال 1. أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^2 - 2x + 2$، وهي دالة متصلة في الفترة $[0, 3]$.	*مثال 2.* أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة $f(x) = x^3 - 2$، وهي دالة متصلة في الفترة $[-1, 2]$.

الأعداد الحرجة هي 0 و 1 و 3.

القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 2

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 5

الأعداد الحرجة هي –1و 0 و 2.

القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ هي –3

القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 6

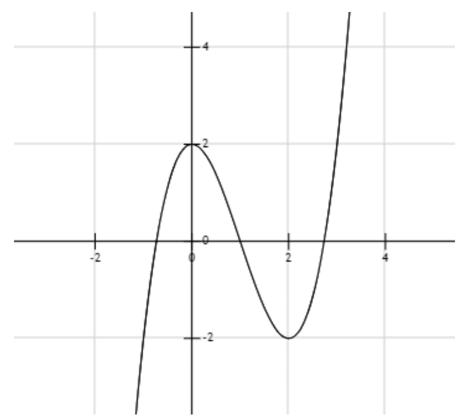
مثال 3.

إذا كانت $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$، استخدم الرسم البياني للدالة $f(x)$ لإيجاد الأعداد الحرجة وتصنيفها بوصفها قيم عظمى أو صغرى

الأعداد الحرجة هي 0 و2 $(f'(\quad) = 0)$

للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند x= 0 و2 =

للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند x= 2 و-2 =



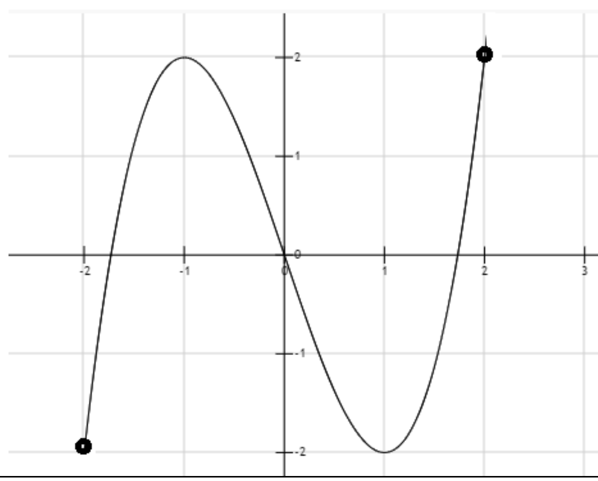
مثال 4.

استخدم الرسم البياني للدالة $f(x)$ لإيجاد القيم وتصنيفها بوصفها قيم صغرى أو عظمى

من الرسم البياني:

للدالة $f(x)$ قيمة عظمى محلية عند x= -1 و2 =

للدالة $f(x)$ قيمة صغرى محلية عند x= 1 و -2 =



- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بتحديد القيم القصوى المطلقة للدوال ذات الأسس الكسرية في فترة معينة، وتصنيفها بوصفها قيم عظمى أو صغرى، على سبيل المثال:

مثال 5.

إذا كانت $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$، أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة

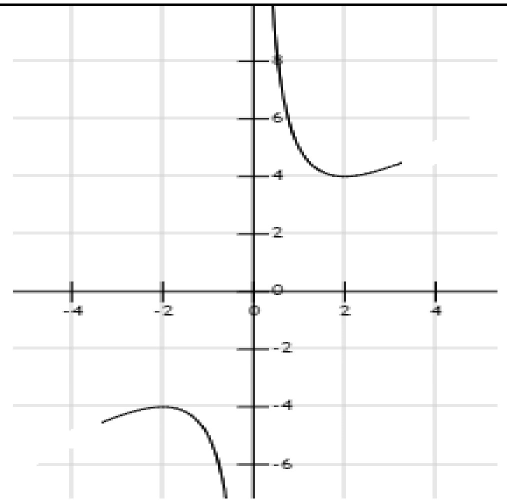
مثال 6.

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + 5$، أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة في الفترة $[-1, 8]$

الأعداد الحرجة هي -2 و 2 و 0 القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 0 القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 2	الأعداد الحرجة هي 0 (($f'(\ \ )$ لا توجد) و -1 و 8 القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 4 القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 7

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بتحديد القيم القصوى المطلقة لمجموعة متنوعة من الدوال في فترة معينة، وتصنيفها بوصفها قيم عظمى أو صغرى، على سبيل المثال:

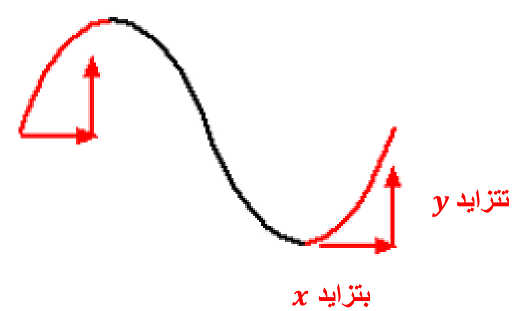
مثال 7. إذا كانت $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & if -2 \le x < 0 \\ x^2-4x & if\ 0 \le x \le 3 \end{cases}$، أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة المتصلة في الفترة $[-2,3]$. الأعداد الحرجة هي -2 و -1 و 0 و 2 و 3.	*مثال 8.* إذا كانت $f(x) = x + \frac{4}{x}$، أوجد القيم القصوى المطلقة للدالة في الفترة [-3 ,3]. الأعداد الحرجة هي -2 و 2 ($f'(x) = 0$) والنقاط النهائية [-3 ,3] الدالة غير متصلة في الفترة [-3 ,3] إذن، قد لا يكون للدالة قيم قصوى مطلقة.

القيمة الصغرى المطلقة للدالة $f(x)$ هي -4 القيمة العظمى المطلقة للدالة $f(x)$ هي 0	 من الرسم البياني للدالة، لا توجد قيم قصوى مطلقة في الفترة [-3, 3].

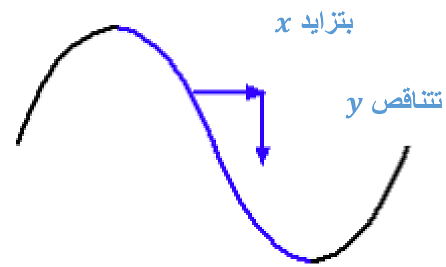
	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.3	**يرسم بيان مشتقة الدالة و يحدد الأصفار وفترات التزايد والتناقص من البيان**	**يحدد الأصفار** والفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة من خلال الرسم البياني	يحدد الفترات التي تكون فيها الدالة **متزايدة أو متناقصة** من خلال الرسم البياني	▪ يحدد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة من خلال الرسم البياني ▪ يحدد الأصفار من خلال الرسم البياني ▪ يرسم مخطط الدالة المشتقة لمنحنى

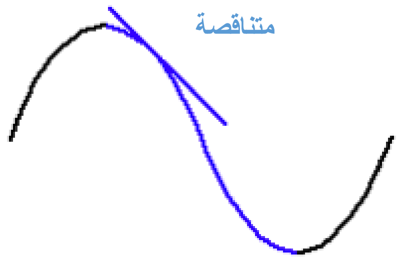
ملاحظات توضيحية:

- يكون الرسم البياني لدالة $y = f(x)$ في فترة معينة متزايدًا إذا كانت لجميع المماسات انحدارًا (أو ميلاً) موجبًا. ويعني ذلك أن الدالة تكون متزايدة إذا كان التزايد في x يقابله تزايدًا في y أيضًا.

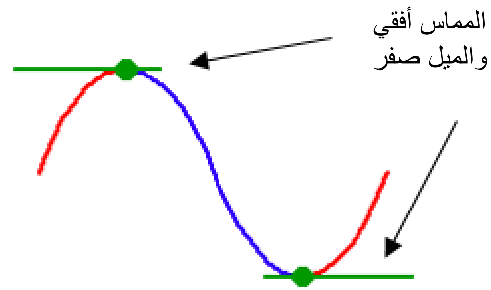


- يكون الرسم البياني لدالة $y = f(x)$ في فترة معينة متناقصًا إذا كانت لجميع المماسات انحدارًا (أو ميلاً) سالبًا. ويعني ذلك أن الدالة تكون متناقصة إذا كان التزايد في x يقابله تناقصًا في y.



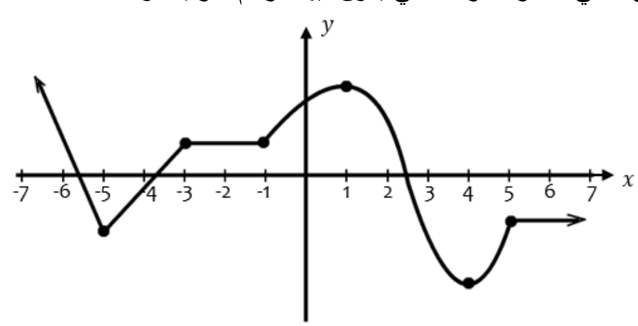


- عندما يكون المماس أفقيًا، يكون الميل صفر. ويحدث ذلك عند نقاط الثبات (النقطة العظمى والنقطة الصغرى وبعض نقاط الانعطاف)



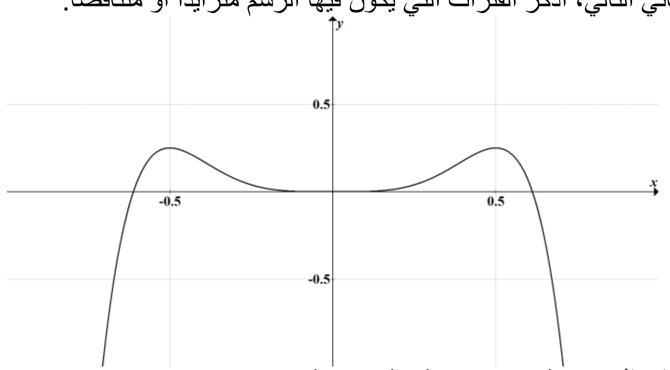
- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بتحديد الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة أو متناقصة باستخدام الرسم البياني، على سبيل المثال:

مثال 1.
في الرسم البياني التالي، اذكر الفترات التي يكون فيها الرسم متزايدًا أو متناقصًا.



الرسم متزايد في الفترات (−5، −3) و(−1، 1) و(4، 5)
الرسم متناقص في الفترتين (− ∞، −5) و(1، 4)

مثال 2.
في الرسم البياني التالي، اذكر الفترات التي يكون فيها الرسم متزايدًا أو متناقصًا.

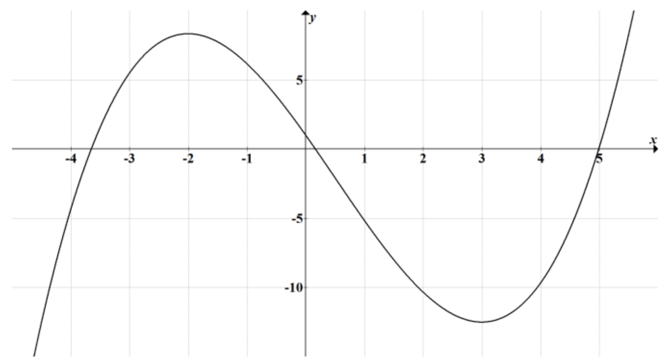


الرسم متزايد في الفترتين (− ∞، −0,5) و(0، 0,5)
الرسم متناقص في الفترتين (−0,5، 0) و(0,5، ∞)

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بتحديد "الأصفار". ويعني ذلك أنهم يوجدون النقاط (أو الفترات) التي يكون فيها الميل صفر. وسوف يساعدهم ذلك في كونهم قادرين على تخطيط الدالة المشتقة في المستوى المتقن، على سبيل المثال:

مثال 3:

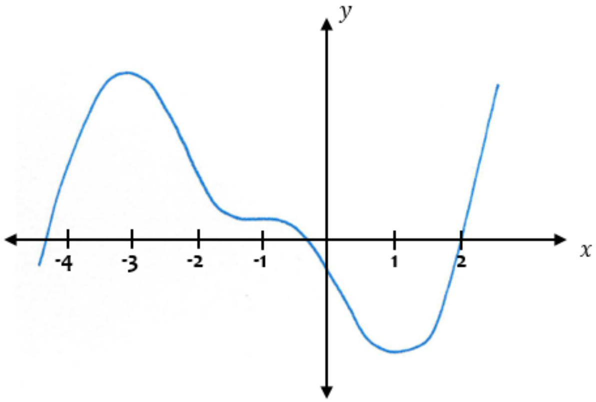
حدد النقاط التي يكون ميل الرسم البياني فيها صفر.



يكون ميل الرسم البياني صفر عند $x=-2$ و $x=3$.

مثال 4:

حدد النقاط التي يكون ميل الرسم البياني فيها صفر.

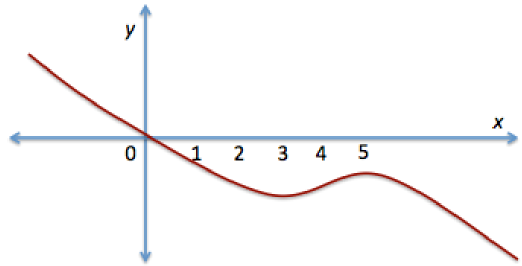


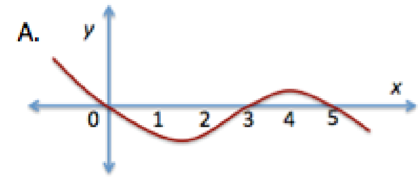
يكون ميل الرسم البياني صفر عند $x=-3$ و $x=-1$ و $x=1$.

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة باستخدام المعلومات التي حصلوا عليها من المستويين المبتدئ والمتقدم، وتخطيط الدالة المشتقة. وقبل أن يقوم الطلبة بتخطيط الدوال الخاصة بهم، يمكنهم محاولة حل الأسئلة التي يتعين فيها مطابقة الدالة بدالة الميل ذات العلاقة، على سبيل المثال:

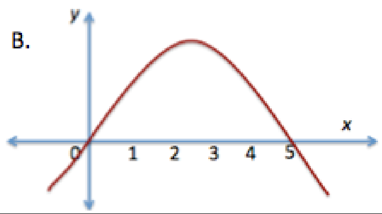
ملاحظة: لا يعتبر هذا السؤال كافيًا في المستوى المتقن، ولكنه بمثابة طريقة جيدة لتعريف الطلبة بما هو متوقع منهم كي يكونوا قادرين على عمل التخطيط.

الرسم البياني للدالة f مبين فيما يلي. أي من الرسوم البيانية التالية يمكن أن يكون الرسم البياني للدالة المشتقة منها؟

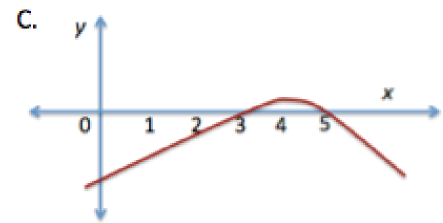




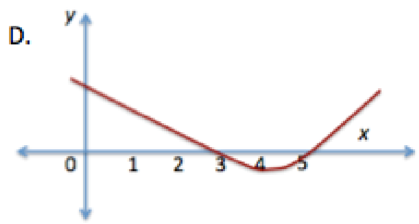
أ.



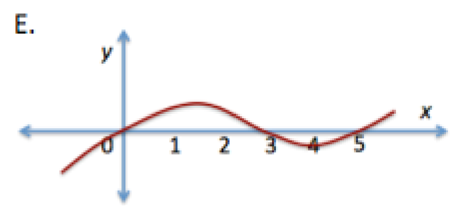
ب.



ج.



د.



هـ.

حدد "الأصفار". قيمة الميل صفر عند $x = 3$ و$x = 5$. ويعني ذلك أم الإجابة ليست "ب".
أين يكون الرسم البياني متزايدًا ومتناقصًا؟

الرسم متزايد بين 3 و5، ومتناقص في باقي الدالة. ويعني ذلك أن دالة الميل سوف تكون موجبة بين 3 و5، وسالبة في الفترات الأخرى. الحل هو "ج".

- في المستوى **المتقن**، يحتاج الطلبة أيضًا إلى دراسة القابلية للتفاضل، وأنه لا يمكن إيجاد المشتقة عند "زاوية حادة". فمن المفيد بالنسبة للطلبة دراسة ما يحدث عندما يقومون بإيجاد تفاضل الدوال، على سبيل المثال:

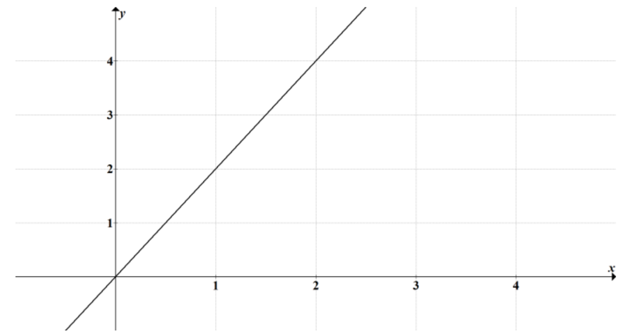
الرسم البياني للدالة	الرسم البياني لدالة الميل
الخط الأفقي $y = 5$	الخط على المحور $y' = 0$
الخط المستقيم $y = 3x + 1$	الخط الأفقي $y' = 3$
القطع المكافئ $y = 4x^2$	الخط المستقيم $y' = 8x$

الدرجة الثالثة (التكعيبية) $y = x^3 - 2x + 1$	القطع المكافئ $y' = 3x^2 - 2$

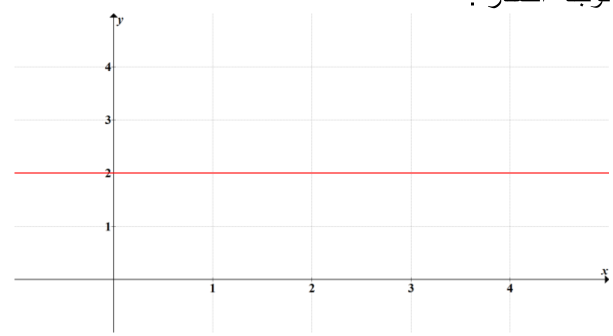
- سوف يحتاج الطلبة إلى تخطيط دالة الميل للدوال المنفردة وأيضًا الدوال متعددة التعريف، على سبيل المثال:

مثال 5.

خطط دالة الميل

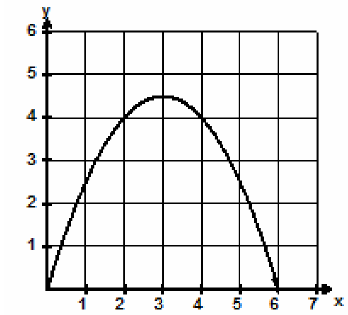


قيمة الميل 2. ولا توجد "أصفار".

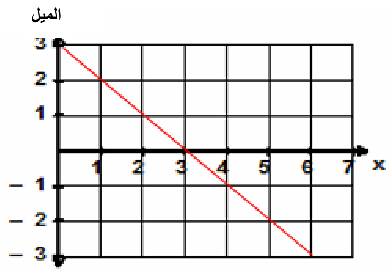


مثال 6.

خطط دالة الميل

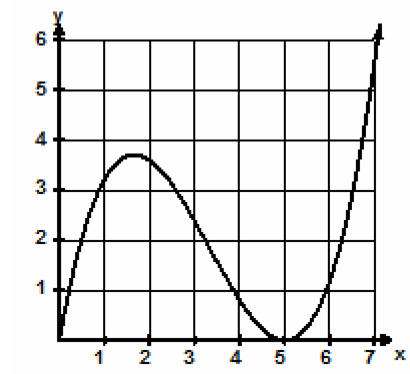


يوجد صفر عند $x = 3$. والميل موجب من 0 إلى 3، وسالب من 3 إلى 6.



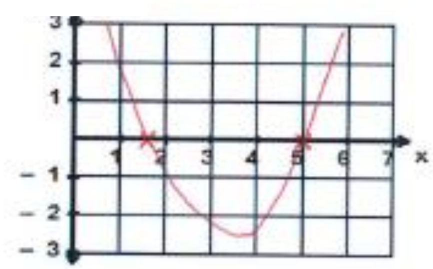
مثال 7.

خطط دالة الميل



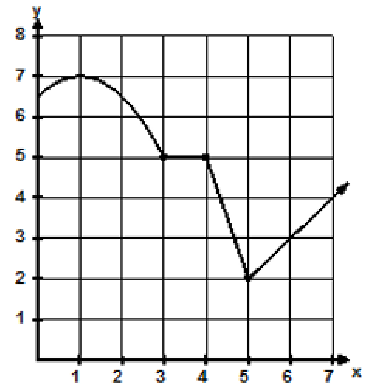
توجد أصفار عند $x = 1.75$ و $x = 5$. والميل موجب من 0 إلى 1,75، ومن 5 إلى 7؛ وسالب من 1,75 إلى 5.

الميل



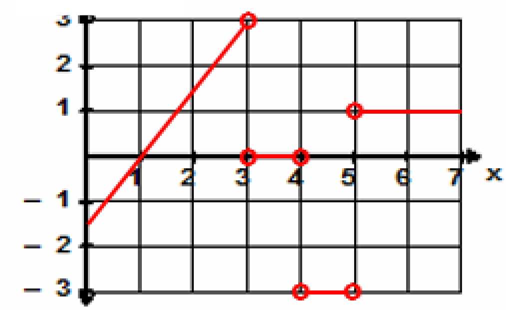
مثال 8.

خطط دالة الميل



الميل صفر عند $x = 1$ وفي الفترة من 3 إلى 5. والدالة غير تفاضلية عند $x = 3$ و 4 و5. الدالة متزايدة (الميل موجب) بين 0 و1 وبين 5 و7؛ ومتناقصة (الميل سالب) بين 1 و3 وبين 4 و5.

الميل



	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.4	يستخدم التفاضل لحل المسائل على الحركة	يوجد **المشتقة الثانية** في مسائل الحركة	يوجد **المشتقة الأولى** في مسائل الحركة	▪ يجد المشتقة الأولى في مسائل الحركة ▪ يوجد المشتقة الثانية في مسائل الحركة ▪ يستخدم التفاضل في حل مسائل الحركة

ملاحظات توضيحية:

- **الإزاحة** هي المسافة في اتجاه معين. ومعدل تغير الإزاحة هو **السرعة**، ومعدل التغير في السرعة هو **التسارع**.

	الترميز	الوحدة
الإزاحة		المتر m
السرعة	v أو $\frac{ds}{dt}$	متر في الثانية m/s أو ms^{-1}
التسارع	a أو $\frac{dv}{dt}$	متر في الثانية المربعة m/s^2 أو ms^{-2}

دالة إزاحة

تفاضل

دالة سرعة

تفاضل

دالة تسارع

بالنسبة للإزاحة:
تعطي الإزاحة الأولية للجسم $s(0)$
تعطي الزمن t عندما يكون الجسم في البداية $s = 0$
بالنسبة للسرعة:
تعطي السرعة الأولية للجسم $v(0)$
تعطي الزمن t عندما يكون الجسم ساكنًا بشكل مؤقت $v = 0$
الجسم يتحرك في الاتجاه المعاكس $v < 0$
الجسم يتحرك في الاتجاه الأصلي $v > 0$
بالنسبة للتسارع:
تعطي التسارع الأولي للجسم $a(0)$
تعطي الزمن t عندما يكون الجسم غير متسارع $a = 0$
الجسم يتباطأ $a < 0$
الجسم يتسارع $a > 0$

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بحل المسائل التي يقومون فيها بإيجاد تفاضل دالة الإزاحة للحصول على دالة السرعة أو إيجاد تفاضل دالة السرعة للحصول على دالة التسارع – أي أنهم يقومون بإيجاد التفاضل مرة واحدة فقط، على سبيل المثال:

مثال 1. إذا كانت السرعة v بالمتر/ثانية لجسم معطاة بالمعادلة التالية	*مثال 2.* أوجد سرعة سيارة عند $t = 4$ ثانية، بمعلومية الإزاحة (بالمتر) المعرفة في المعادلة التالية:

أوجد تسارع الجسم بعد 3 ثواني.

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد التفاضل مرتين، حيث يُعطى لهم دالة الإزاحة ويقومون هم بإيجاد دالة التسارع، على سبيل المثال:

مثال 3:

أوجد تسارع سيارة عند $t = 2$ ثانية، بمعلومية الإزاحة (بالمتر) المعرفة بالمعادلة التالية:

مثال 4:

تُعطى المسافة بين فأر ومدخل جحر الفأر بالقاعدة التالية:

حيث تمت ملاحظة الفأر لمدة 8 دقائق.
كم يبلغ تسارع الفأر عند $t = 1$ دقيقة؟

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بحل المسائل التي تتضمن إيجاد تفاضل الدوال الكينماتيكية، على سبيل المثال:

مثال 5:

جسم يتحرك في خط مستقيم، وتُعطى إزاحته (بالمتر) من نقطة ثابتة بعد t ثانية بالمعادلة التالية:

أ) كم يبعد الجسم عن النقطة الثابتة عندما تكون $t = 2$ و 4 و 8 ثانية؟
ب) كم تبلغ سرعة الجسم بعد 5 ثواني؟
ج) كم بلغت السرعة عند بدء التوقيت؟
د) كم يبلغ التسارع الأولي؟
هـ) متى يكون الجسم ساكنًا؟

أ) $s(2) = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3\text{ m}$
$s(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9\text{ m}$
$s(8) = 3(8)^2 - 12(8) + 9 = 105\text{ m}$

ب) $v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t - 12$
$v(5) = 6(5) - 12 = 18\text{ m/s}$

مثال 6:

جسيم يتحرك في خط مستقيم، وتُعطى إزاحته (بالمتر) بالمعادلة التالية:

حيث تُقاس t بالثواني.

أ) كم تبلغ إزاحة الجسيم عندما تكون $t = 0$ ثانية؟
ب) اثبت أن

ومن ثم أوجد السرعة والتسارع بالنسبة للزمن t.

ج) هل يكون الجسيم ساكنًا؟ علل إجابتك.

ج) $v(0) = 6(0) - 12 = -12$ m/s د) $a(t) = \frac{dv}{dt} = 6$ $a(0) = 6$ m/s² هـ) يكون الجسم ساكنًا عندما $v = 0$ $t = 2$ ثانية	أ) $s(0) = \frac{0-3}{0+3} = -1$ m ب) استخدم القسمة المطولة $t + 3 \overline{) \; t - 3 \;}$ ، الناتج 1 $-(t + 3)$ -6 ناتج قسمة $t - 3$ على $t + 3$ هو 1 والباقي 6–. إذن، لإيجاد دالة السرعة لإيجاد دالة التسارع ج) كي يكون الجسم ساكنًا، لا بد أن تكون السرعة صفر. وفي هذه الحالة، لن يكون الجسيم ساكنًا أبدًا لأن $v \neq 0$.

6

	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.5	يجد مشتقة دالة ضمنياً ، و يجد معادلة المماس أو العمودي على المماس.	يجد مشتقة دالة ضمنياً	يوجد مشتقة **الدوال البسيطة ضمنيًا**	▪ يجد تفاضل الدوال ضمنيًا ▪ يجد معادلة المماس أو الخط العمودي لمنحنى عند نقطة باستخدام التفاضل الضمني

ملاحظات توضيحية:

- في السابق، تم التعبير عن المقادير اللازم إيجاد تفاضلها صراحةً، أي أنه تم التعبير عن y صراحةً باستخدام x، على سبيل المثال: $y = x^2 + 3x + 1$.
- بعض المقادير لا يمكن التعبير عنها صراحةً بسهولة، على سبيل المثال: $x^2 + y^2 = 9$ التي يعاد صياغتها بالشكل $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$، فإن إيجاد تفاضلها يصبح أكثر تعقيدًا. بدلاً من ذلك، نقوم بإيجاد تفاضل المقدار الأصلي ضمنيًا.

- كي نوجد التفاضل الضمني، فإننا نوجد تفاضل "حدود x" كالمعتاد. وعندما نوجد تفاضل الحدود التي تحتوي على y، فإننا نستخدم قاعدة السلسلة. على سبيل المثال: لإيجاد تفاضل ^{2} ، نعيد كتابتها بهذا الشكل $(y)^2$ ونستخدم قاعدة السلسلة. نوجد تفاضل الدالة الخارجية باستخدام $2(y)$ ومن ثم الدالة الداخلية باستخدام $\frac{dy}{dx}$ (مشتقة y هي $\frac{dy}{dx}$). إذن، مشتقة y^2 هي $2y\frac{dy}{dx}$.

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل الدوال البسيطة التي لا تتضمن استخدام قاعدة حاصل الضرب، على سبيل المثال:

مثال 1. استخدم التفاضل الضمني لإيجاد مشتقة ما يلي:	*مثال 2.* أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة التالية:

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل مجموعة متنوعة من الدوال ضمنيًا، بما في ذلك الدوال التي تتضمن استخدام قاعدة حاصل الضرب (حدود كلاً من x و y) و/أو الدوال التي تحتوي على أكثر من حد y، على سبيل المثال:

مثال 3. أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة التالية:	*مثال 4.* استخدم التفاضل الضمني لإيجاد مشتقة ما يلي:

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة باستخدام التفاضل الضمني لإيجاد معادلة المماس أو الخط العمودي لمنحنى عند نقطة، على سبيل المثال:

مثال 5. أوجد تفاضل $(x-2)^2 + 4xy^3 - y^2 = 4$، وأوجد المماس عند النقطة (1، 1). عند (1، 1) معادلة المماس	*مثال 6.* أوجد معادلة الخط العمودي للدالة التالية: عند نقطة الأصل. عند (0، 0) ميل الخط العمودي

	معادلة الخط العمودي

	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.6	يستخدم قاعدة السلسلة لحل مسائل على معدل التغير في الزمن	يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد معدلات التغير ذات العلاقة **عندما تكون الصيغ معطاة**	**يحدد المتغيرات** التي تتضمنها مسألة لمعدلات التغير ذات العلاقة	▪ يحدد المتغيرات التي تتضمنها مسألة لمعدلات التغير ذات العلاقة ▪ يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد معدلات التغير ذات العلاقة عندما تكون الصيغ معطاة ▪ يستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد معدلات التغير ذات العلاقة عندما لا تكون الصيغ معطاة

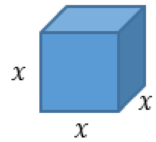
ملاحظات توضيحية:

- معدلات التغير ذات العلاقة هي أحد تطبيقات قاعدة السلسلة. نحن نستخدم ترميز لايبنيتز في قاعدة السلسلة:

- من ضمن الإرشادات المساعدة في حل هذه المسائل هي محاولة تحديد المعلومات الثلاثة التالية:
  1. كتابة معدل التغير المعطى في السؤال باستخدام ترميز لايبنيتز
  2. التعبير عن معدل التغير اللازم (المطلوب في السؤال) باستخدام ترميز لايبنيتز
  3. التحقق من المعدلين (باستخدام ترميز لايبنيتز في كليهما) وتحديد الجزء الثالث من قاعدة السلسلة اللازم للربط بالجزئين السابقين. ابحث عن المتغيرات المذكورة في المعدل المعطى فقط.

- في المستوى **المبتدئ**، يحتاج الطلبة إلى تحديد المتغيرات المتضمنة، ولكن لا يجب عليهم كتابتها في صورة معدلات، على سبيل المثال:

مثال 1.	مثال 2.
حدد المتغيرات التي تتضمنها المسألة التالية: *طفلان يصنعان كرة كبيرة من الثلج* $V=\frac{4}{3}\pi r^3$*. وإذا كان الحجم يتزايد عند* $0.75\ m^3/min$*، في حين يبلغ نصف القطر* $0.85\ m$*، أوجد معدل زيادة نصف القطر.* الحجم، V؛ نصف القطر، r ؛ الزمن، t	حدد المتغيرات التي تتضمنها المسألة التالية: *ترتفع درجة حرارة مكعب خشبي، ونتيجة لذلك، تتمدد كل حافة بمعدل 0,003 سم / دقيقة. ما هو معدل زيادة الحجم عندما تكون الحافة 20 سم؟*

	حجم المكعب = X^3  الحجم، V؛ طول الجانب، x؛ الزمن، t

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بحل المسائل التي تتضمن معدلات وتكون الصيغ معطاة، على سبيل المثال:

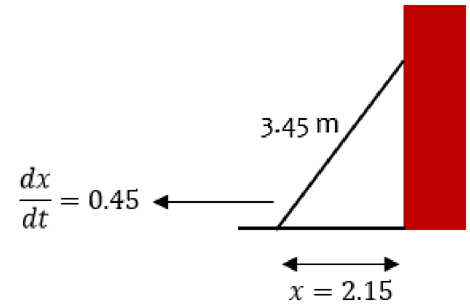
مثال 3: حل المسألة في *المثال 1.* من السؤال، نعلم أن وبالتالي، يمكننا إيجاد تفاضل من السؤال، نعلم أيضًا أن استخدم قاعدة السلسلة عندما تكون $r = 0.85$	*مثال 4:* حل المسألة في *المثال 2.* من السؤال، نعلم أن من السؤال، نعلم أيضًا أن وبالتالي، يمكننا إيجاد تفاضل استخدم قاعدة السلسلة عندما تكون $x = 20$

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بحل المسائل التي تتضمن معدلات وتكون الصيغ غير معطاة، على سبيل المثال:

مثال 5: سلم طوله 3,45 م يميل على الجدار. قاعدة السلم تبدأ في الانزلاق عند 0,45 م/ث. أوجد معدل	*مثال 6:* خزان اسطواني مملوء بالمياه. يبلغ نصف قطر الخزان 20 سم. كم تبلغ السرعة التي ينخفض بها

انزلاق قمة السلم على الجدار عندما تكون القاعدة على بعد 2,15 م من الجدار.

أبدأ برسم مخطط بياني



من السؤال، نعلم أن

نحتاج إلى إيجاد علاقة بين ارتفاع السلم h وقاعدته x. باستخدام نظرية فيثاغورث، يكون لدينا:

إذن، يمكننا إيجاد التفاضل ضمنيًا

استخدم قاعدة السلسلة

عندما تكون $x = 2.15$

قم بالتعويض لإيجاد المعدل المطلوب

هذا يعني أن

$\frac{dh}{dt} = 0.36\ m/s$ للأسفل.

ارتفاع المياه في الخزان أثناء تفريغ المياه بمقدار $25\ c^3/s$؟

من السؤال، نعلم أن

(القيمة سالبة لأن الحجم يتناقص)

الخزان اسطواني، ونحن نعلم أن

كما أننا نعلم أن $r = 20$

إذن، يمكننا إيجاد التفاضل

استخدم قاعدة السلسلة

	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.7	يجد مشتقة دالة بارامتريا	يوجد تفاضل المعادلات البارامترية **التي تتضمن دوال مثلثية، أو دوال قوى، أو دوال أسية**	يوجد تفاضل **المعادلات البارامترية البسيطة**	▪ يجد تفاضل المعادلات البارامترية التي تتضمن دوال مثلثية أو دوال قوى أو دوال أسية ▪ يجد تفاضل الدوال البارامترية التي تتضمن حواصل ضرب

ملاحظات توضيحية:

- بعض العلاقات بين كميتين أو متغيرين تكون معقدة للغاية لدرجة أننا نقوم أحيانًا بإدخال كمية ثالثة أو متغير ثالث كي نجعل الأمور أيسر في التعامل. وتُسمى هذه الكمية الثالثة **بارامترًا** (يشار إليها في الغالب بـ t). فبدلاً من معادلة واحدة تربط بين x و y ، يكون لدينا معادلتان؛ أحداهما تربط بين x والبارامتر، والأخرى تربط بين y والبارامتر.

- لإيجاد مشتقة زوج من المعادلات البارامترية، نستخدم قاعدة السلسلة:

إذا كان لدينا معادلتان بارامتريتان حيث المتغيران x و y معرفين باستخدام t $y = g(t)$ و $x = f(t)$ يمكننا إيجاد التفاضل باستخدام قاعدة السلسلة بما أن إذن

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل المعادلات البارامترية البسيطة. ويتضمن ذلك إيجاد تفاضل الدوال كثيرة الحدود، ولكنه لا يشمل دوال القوى ذات الأسس السالبة والكسرية، على سبيل المثال:

مثال 1.	مثال 2.
أوجد تفاضل زوج المعادلات البارامترية التالي: $y = 4t$ و $x = t^2$ أوجد تفاضل كل دالة	أوجد $\frac{d}{dx}$ حيث $y = 4 - t^2$ و $x = t^3 - t$ أوجد تفاضل كل دالة

عوض في المعادلة	عوض في المعادلة

- في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل المعادلات البارامترية التي تتضمن دوال مثلثية و/أو دوال قوى ذات أسس سالبة أو كسرية، على سبيل المثال:

مثال 3: أوجد تفاضل زوج المعادلات البارامترية التالي: $x = 8\sin t$ و $y = 8\cos t$ أوجد تفاضل كل دالة عوض في المعادلة	*مثال 4:* أوجد تفاضل زوج المعادلات البارامترية التالي: $x = t + \sqrt{t}$ و $y = t - \sqrt{t}$ أوجد تفاضل كل دالة عوض في المعادلة

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بإيجاد تفاضل المعادلات البارامترية التي تتضمن دوال ضربية، على سبيل المثال:

مثال 5. أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $x = te^{-t}$ و $y = 2t^2 + 1$ أوجد تفاضل كل دالة عوض في المعادلة	*مثال 6.* أوجد تفاضل زوج المعادلات البارامترية التالي: أوجد تفاضل كل دالة عوض في المعادلة

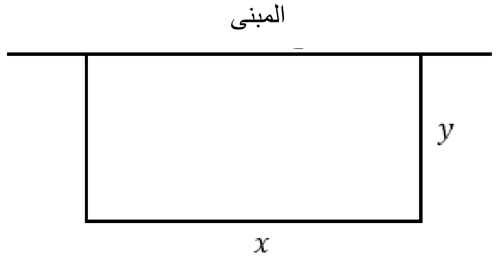
	المستوى المتقن (المخرج التعليمي)	المستوى المتقدم	المستوى المبتدئ	معايير التقويم
ML3. PA5.8	يحل مسائل يحل مسائل على تطبيقات القيم القصوى (الاستمثال)	يحل مسائل على تطبيقات القيم القصوى **بمعلومية معادلة واحدة**	يحل مسائل على تطبيقات القيم القصوى **بمعلومية المعادلات**	▪ يحل مسائل على تطبيقات القيم القصوى

ملاحظات توضيحية:

- في مسائل الاستمثال، نبحث عن أكبر أو أصغر قيمة يمكن أن تكون للدالة. وتعتبر تطبيقًا لمسائل القيمة العظمى/الصغرى التي قابلناها في هدف تعليمي سابق. وفي هذا السياق، تخضع الدالة لمحدد. والمحدد عبارة عن شرط (يمكن وصفه عادةً من خلال معادلة) يجب أن يكون صحيحًا أيًا كان الحل.

- في المستوى **المبتدئ**، يقوم الطلبة بحل المسائل التي تكون فيها المعادلات معطاة، على سبيل المثال:

مثال 1.
هناك حقل بجوار مبنى. ومن المخطط وضع سياج يحيط بالحقل. متاح 500 م من المواد المستخدمة لصنع السياج. ونظرًا لأن المبنى يطل على جانب واحد من الحقل، ليس هناك حاجة لسياج هناك.



حدد أبعاد الحقل الذي سوف يحيط بأكبر مساحة إذا كانت المساحة تُعطى بالمعادلة:

وكمية السياج هي

أعد ترتيب المعادلة الثانية

عوض في المعادلة الأولى

أوجد تفاضل

للحصول على أكبر مساحة، نفترض أن $\frac{d}{dy} = 0$

قم بالتعويض لإيجاد حل x

إذن، أبعاد الحقل التي سوف تعطي أكبر مساحة هي 125 م × 250 م

مثال 2.
أوجد عددين غير سالبين مجموعهما 9، بحيث يمثل حاصل ضرب عدد واحد في مربع الآخر قيمة عظمى، أي استخدم المعادلتين التاليتين:

أعد ترتيب المعادلة الأولى

عوض في المعادلة الثانية

أوجد التفاضل

للحصول على أكبر حاصل، نفترض أن $\frac{dP}{dy} = 0$

قم بالتعويض لإيجاد حل
عندما $y = 0$، $x = 9 - 0 = 9$
عندما $y = 6$، $x = 9 - 6 = 3$

نحتاج للحصول على أكبر حاصل كي يمكننا اختبار الحلين:

بما أن $x = 9$، $y = 0$

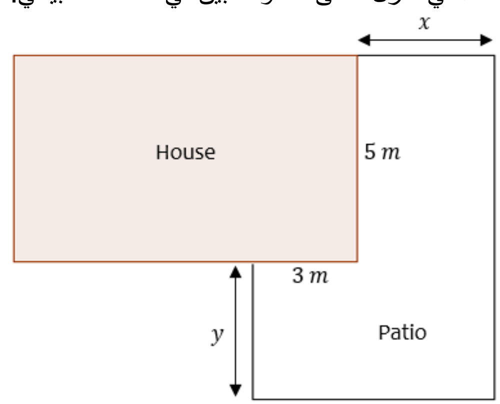
بما أن $x = 3$، $y = 6$

إذن، الحل هو $x = 3$ و $y = 6$.

▪ في المستوى **المتقدم**، يقوم الطلبة بحل المسائل التي تكون فيها معادلة واحدة معطاة، على سبيل المثال:

مثال 3:

تم استئجار بنّاء لإضافة فناء في منزل، على النحو المبين في المخطط البياني.



سوف يحاط الفناء بدرابزين من جميع الجهات باستثناء الجزء الذي يتصل فيه الفناء بالمنزل. لدى البنّاء ما يكفي من المواد لبناء 18 مترًا بالضبط من الدرابزين.

ويمكن إيجاد مساحة الفناء باستخدام

أوجد قيم x و y التي سوف تعطي أكبر مساحة ممكنة للفناء، وأوجد مساحته.

الحل:

أكتب المعادلة الخاصة بالدرابزين

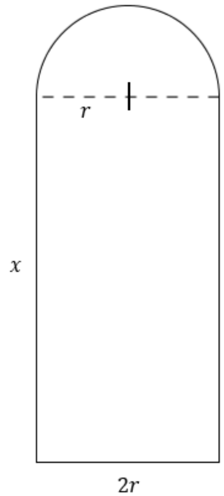
عوض في معادلة المساحة

أوجد التفاضل

للحصول على أكبر قيمة، نفترض أن $A' = 0$

مثال 4:

نافذة على شكل نصف دائرة أعلى مستطيل.



إذا كانت المسافة حول النافذة من الخارج 12 مترًا، ما هي الأبعاد التي سوف تنتج عن أكبر مساحة ممكنة للمستطيل (حيث $A = 2xr$)؟

الحل:

اكتب معادلة للمحيط

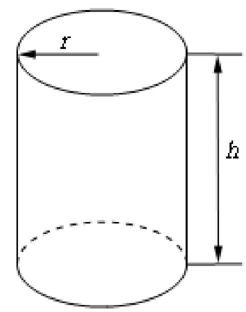
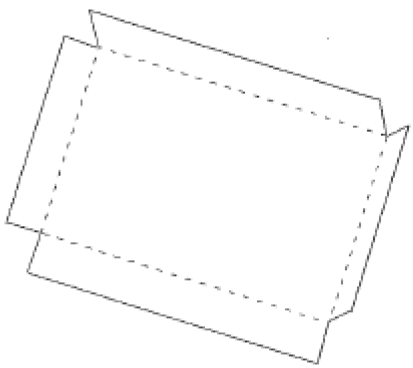
عوض في معادلة المساحة

أوجد التفاضل

لإيجاد أكبر قيمة، نفترض أن $\frac{dA}{dr} = 0$

قم بالتعويض لإيجاد x عوض بقيم x و y لإيجاد المساحة	$r = \frac{6}{2+\pi}$ أو 1.17 قم بالتعويض لإيجاد x عوض بقيم x و y لإيجاد المساحة

- في المستوى **المتقن**، يقوم الطلبة بإنشاء المعادلات اللازمة قبل حل مسائل الاستمثال، على سبيل المثال:

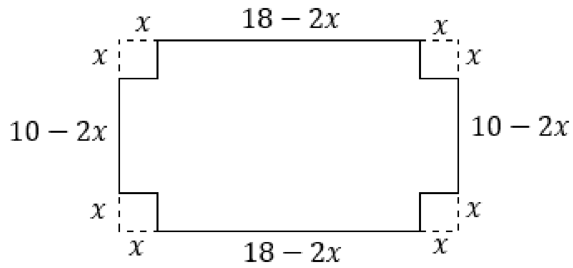
مثال 5. مصنّع يحتاج لإنشاء وعاء أسطواني ليسع 1,5 لترًا من السائل. حدد أبعاد الوعاء التي من شأنها أن تقلل من كمية المواد المستخدمة في إنشائه.  *الحل:* يمكن إيجاد حجم الاسطوانة باستخدام: نعلم أن $1\ L = 1000\ c^3$، لذا $1.5\ L = 1500\ cm^3$ يمكن إيجاد مساحة سطح الاسطوانة باستخدام:	*مثال 6.* فرخ مستطيل من الورق المقوى تم إزالة أركانه الأربعة المربعة المتساوية، وتم رفع الجوانب لتعطي شكل صندوق مفتوح.  قياس الفرخ 18 سم × 10 سم، أوجد طول حافة المربعات التي سيتم إزالتها، كي نحصل على أكبر حجم للصندوق. *الحل:* ارسم مخططًا بيانيًا

أوجد التفاضل

لإيجاد أصغر قيمة لمساحة السطح، نفترض أن $\frac{dS}{dr} = 0$

عوض عن r لإيجاد قيمة h

للحصول على أقل كمية من مواد الإنشاء، ينبغي أن تكون الأبعاد $r = 6.20\ cm$ و $h = 12.41\ cm$.



اكتب معادلة لحجم الصندوق

أوجد التفاضل

للحصول على أكبر حجم، نفترض أن $\frac{dV}{dx} = 0$

تجاهلنا $x = 7.27$ لأنه لا يمكننا إزالة أركان بهذا الطول من جانب طوله 10 سم.

إذن، يبلغ طول حافة المربع التي سيتم إزالته 2,1 سم (جزء عشري واحد).