دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم
إدارة التقويم والامتحانات

وزارة التربية والتعليم

المـادة : رياضيات
زمن الإجابة : حسب الجدول المعتمد
عدد صفحات الأسئلة : (5)

امتحان الفصل الدراسي الثالث للصف الثاني عشر / القسم العلمي
للعام الدراسي 2014 / 2015 م

على الطالب التأكد من عدد صفحات الأسئلة — الإجابة على (الورقة نفسها)

أجب عن جميع الأسئلة الآتية

السؤال الأول

نموذج الإجابة

30

16

أولاً: 1. أكمل ما يلي لإيجاد المطلوب على حسب نوع القطع :

القطوع المخروطية

معادلة القطع الناقص :

$$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-4)^2}{36}=1$$

مركز القطع . $(-1\ ,4)$ ❷

البؤرتان

$c^2 = a^2 - b^2$ ❷

$c^2 = 36 - 25 = 11$

$c = \sqrt{11}$

$(h\ ,k \pm c\ )$

$\Rightarrow (-1\ ,4 \pm \sqrt{11}\ )$ ❷

نقطتا طرفي المحور الأصغر

$(h \pm b\ ,k)$

$\Rightarrow (-1 \pm 5\ ,4\ )$

$(-6\ ,4\ )\ ,(4\ ,4\ )$ ❷

معادلة القطع الزائد :

$$\frac{(y-2)^2}{49}-\frac{x^2}{9}=1$$

مركز القطع . ❷ $(0\ ,2)$

البؤرتان

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 49 + 9 = 58$

$c = \sqrt{58}$ ❷

$(h\ ,k \pm c)$

$\Rightarrow \left(0\ ,2 \pm \sqrt{58}\ \right)$ ❷

نقطتا طرفي المحور القاطع

$(h\ ,k \pm a) \Rightarrow$

$(0\ ,2 \pm 7\ )$

$(0\ ,-5\ ),(0\ ,9\ )$ ❷

....

14

ثانياً: لتكن : $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$ أوجد :

2. النقاط الحرجة للدالة f

6 درجات

$$f'(x) = 3x^2 - 3x + 0 \quad ❷$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 3x \overset{❶}{=} 0 \rightarrow \overset{❶}{3x(x-1)} = 0 \Rightarrow x = 0 \;,\; x = 1$$

النقاط الحرجة للدالة هي : $x \overset{❶}{=} 0 \;,\; x \overset{❶}{=} 1$

6 درجات

3. فترات التزايد والتناقص للدالة f

الفترات	$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
إشارة $f'(x)$	❶ +	❶ −	❶ +
سلوك $f(x)$	↗	↘	↗

الدالة متزايدة على الفترات: $(-\infty, 0], [1, +\infty)$ ❶ ❶

الدالة متناقصة على الفترة : $[0, 1]$ ❶

4. القيم القصوى المحلية للدالة f

درجتان

توجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ وقيمتها : $f(0) = (0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2 + 4 = 4$ ❶

توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ وقيمتها : $f(1) = (1)^3 - \frac{3}{2}(1)^2 + 4 = 3\frac{1}{2}$ ❶

37

السؤال الثاني

أولاً : 5. إذا كانت $f(x) = \dfrac{3 - 2x^4 \tan x}{x^4}$

8

أثبت أن $F(x) = \ln(\cos^2 x) - x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة f حيث $\cos x \neq 0$

$$F'(x) = \frac{-2\cos x \,.\, \sin x}{\cos^2 x} + 3x^{-4} = \frac{-2\sin x}{\cos x} + \frac{3}{x^4}$$

$$= -2\tan x + \frac{3}{x^4} = \frac{3 - 2x^4 \tan x}{x^4} = f(x)$$

$\therefore$ $F(x)$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x)$

ثانياً : 6. حل المعادلة التفاضلية **بفصل المتغيرات** : $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\left(sec^2x + \frac{1}{x}\right)$ ، **حيث** $y > 0\ ,\ x \neq 0$

10

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \left(sec^2x + \frac{1}{x}\right)\ dx \quad ❷$$

$$\frac{1}{2}\int y^{\frac{-1}{2}}\ dy = \int \left(sec^2x + \frac{1}{x}\right)\ dx \quad ❶$$

$$\overset{❷}{\frac{1}{2}(2)\, y^{\frac{1}{2}}} = \overset{❷}{tan\, x} + \overset{❷}{ln\,|x|} + \overset{❶}{c}$$

$$y^{\frac{1}{2}} = tan\, x + ln\,|x| + c$$

$$y = (tan\, x + ln\,|x| + c)^2$$

ثالثاً : 7. باستخدام **التكامل بالتعويض** أوجد $\int \frac{x^2}{e^{(2x^3+8)}}dx$

9

$$u = \overset{❶}{2x^3 + 8} \quad \rightarrow \quad du = \overset{❶}{6x^2 dx} \quad \rightarrow \quad dx = \overset{❶}{\frac{du}{6x^2}}$$

$$\int \frac{x^2}{e^{(2x^3+8)}}dx = \overset{❷}{\int \frac{\cancel{x^2}}{e^u}\cdot\frac{du}{\cancel{6x^2}}} = \overset{❶}{\frac{1}{6}\int e^{-u}du}$$

$$= \overset{❷}{\frac{-1}{6}e^{-u} + c} = \overset{❶}{\frac{-1}{6}e^{-(2x^3+8)}} + c = \frac{-1}{6e^{(2x^3+8)}} + c$$

رابعاً : 8. إذا علمت أن : $f(x) = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}dt$ ، $y = e^{x^2}f(x)$

أثبت أن $y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$

10

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-t^2}dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2} \quad ❸$$

$$y' = \overset{❶}{e^{x^2}f'(x)} + \overset{❶}{f(x)}.\overset{❷}{2xe^{x^2}} = e^{x^2}f'(x) + 2xe^{x^2}f(x)$$

$$y' = e^{x^2}\left(\overset{❶}{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2}}\right) + \overset{❶}{2xy}$$

$$y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \quad ❶$$

33

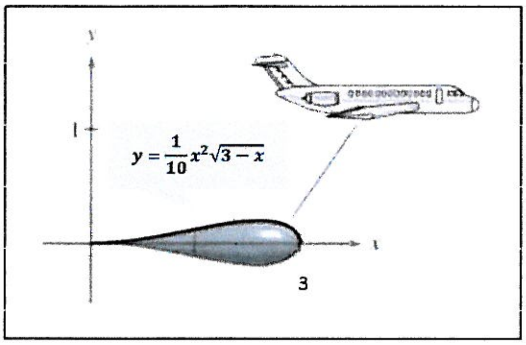
السؤال الثالث

أولاً : 9. خزان بترول موجود في جناحٍ إحدى الطائرات النفاثة كما هو موضح بالشكل .

11

أوجد حجم الخزان الناتج من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة : $y = \frac{1}{10}x^2\sqrt{3-x}$

والمحور السيني في الفترة $[0\ ,3]$ حول محور السينات حيث $x\ ,\ y$ تقاس بالأمتار.



$$V = \int_0^3 \pi \left(\frac{1}{10}x^2\sqrt{3-x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{100}\int_0^3 x^4(3-x)\, dx$$ ❸ ❶

$$= \frac{\pi}{100}\int_0^3 (3x^4 - x^5)\, dx$$ ❷

$$= \frac{\pi}{100}\left[\frac{3x^5}{5} - \frac{x^6}{6}\right]_0^3$$ ❷

$$= \frac{\pi}{100}\left(\left(\frac{3(3)^5}{5} - \frac{(3)^6}{6}\right) - 0\right)$$ ❷

$$\approx 0.763\ m^3$$ ❶

11

ثانياً : 10. أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ على الفترة $[1, 2]$

علماً بأن : $f'(x) = \sqrt{64\,x^6 - 1}$

$$f'(x) = \sqrt{64x^6 - 1} \quad \rightarrow \quad (f'(x))^2 = 64x^6 - 1$$ ❷

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$ ❷

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + 64x^6 - 1}\ dx$$ ❶

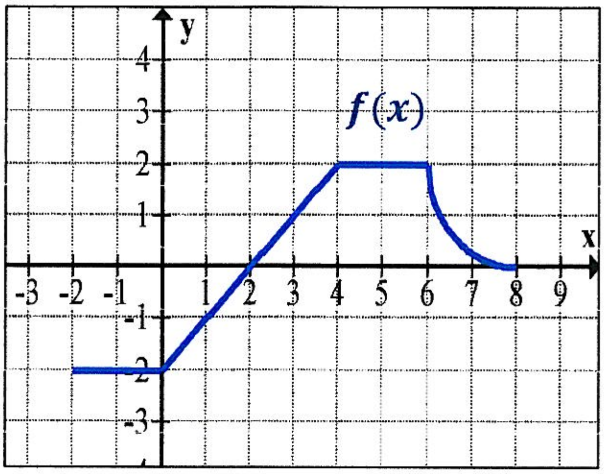
$$= \int_1^2 \sqrt{64x^6}\ dx = \int_1^2 |\,8x^3\,|dx = \int_1^2 8x^3\, dx = \left[\frac{8x^4}{4}\right]_1^2 = [2x^4]_1^2$$ ❶ ❶ ❷

$= 2(16) - 2(1) = 32 - 2 = 30$ وحدة قياس ❶ ❶

ثالثاً : الشكل التالي يمثل بيان الدالة f المتصلة على الفترة $[-2\,,8]$ ، بفرض أن $H(x) = \int_{-2}^{x} f(t)dt$

11

أجب عما يلي :



11. أوجد قيمة $H'(4)$

$$H'(4) = f(4) = 2 \quad ❷$$

12. أوجد قيمة $H''(5)$

$$H''(5) = f'(5) = 0 \quad ❶$$

13. أوجد قيمة $H(2)$

$$H(2) = \int_{-2}^{2} f(t)dt = \frac{-1}{2}(4+2)\times 2 = -6 \quad ❶ \; ❶ \; ❶$$

14. أوجد القيمة المتوسطة للدالة $f(x)$ على الفترة $[-2\,,2]$

$$av(f) = \frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{4}\times -6 = \frac{-3}{2} \quad ❷$$

15. أوجد كل قيم x في $[-2\,,8]$ بحيث $H(x) = 0$

$x = -2$ ❶, $x = 6$ ❶

16. هل إشارة $H(3)$ موجبة أم سالبة .

سالبة ❶

انتهت الأسئلة، بالتوفيق والنجاح