وزارة التربية والتعليم

امتحان الفصل الدراسي الثالث للصف الثاني عشر / القسم العلمي
للعام الدراسي 2014 / 2015 م

على الطالب التأكد من عدد صفحات الأسئلة — الإجابة على (الورقة نفسها)

أجب عن جميع الأسئلة الآتية

نموذج الإجابة

السؤال الأول — 30

أولاً: لتكن : $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$ أوجد :

13

1. النقاط الحرجة للدالة f

$f'(x) = x^2 - 9$ ❷

$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 9 \overset{❶}{=} 0 \rightarrow (x+3)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3 \;,\; x = -3$

النقاط الحرجة للدالة هي : $x = 3$ ❶ , $x = -3$ ❶

2. فترات التزايد والتناقص للدالة f

الدالة متزايدة على الفترات: $(-\infty, -3\,], [\,3, +\infty)$ ❷

الدالة متناقصة على الفترة : $[-3\,,3]$ ❶

الفترات	$x < -3$	$-3 < x < 3$	$x > 3$
إشارة $f'(x)$	+ ❶	− ❶	+ ❶
سلوك $f(x)$	↗	↘	↗

3. القيم القصوى المحلية للدالة f

يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = -3$ وقيمتها : $f(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 - 9(-3) = 18$ ❶

يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ وقيمتها : $f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - 9(3) = -18$ ❶

9

ثانياً: إذا كانت المعادلة $x^2 = 16 - 4\,(y-5)^2$ تمثل **قطعاً ناقصاً** أوجد :

4. معادلة القطع في الصورة القياسية.

$$x^2 + 4(y-5)^2 = 16 \quad ❶$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1 \quad ❷$$

5. مركز القطع .

$$(h,k) \Rightarrow (0,5) \quad ❷$$

6. البؤرتان .

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = 16 - 4 \Rightarrow c^2 = 12 \Rightarrow c = \sqrt{12} \quad ❷$$

البؤرتان هما $(h \pm c, k) \Rightarrow \left(\pm\sqrt{12}\ ,\ 5\right)$ ❷

8

ثالثاً: إذا كانت المعادلة $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ تمثل **قطعاً زائداً**. أوجد :

7. مركز القطع .

$$(h,k) \Rightarrow (0,0) \quad ❷$$

8. البؤرتان.

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 25 + 16 \Rightarrow c^2 = 41 \Rightarrow c = \sqrt{41} \quad ❷$$

البؤرتان هما : $(\pm c, 0) = \left(\pm\sqrt{41}\ ,\ 0\right)$ ❷

9. معادلتا الخطيين التقاربيين.

معادلتا الخطيين التقاربيين هما : $a = 5 \ , \ b = 4$

$$y = \pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm\frac{4}{5}x \quad ❶ \ ❶$$

38

السؤال الثاني

أولاً : 10. إذا كانت $f(x) = 2cotx + 2x\, e^{(x^2+1)}$

8

أثبت أن $F(x) = ln(sin^2x) + e^{(x^2+1)}$ هي مشتقة عكسية للدالة f حيث $sinx \neq 0$

$$F(x) = ln(sin^2x) + e^{(x^2+1)}$$

$$F'(x) = \frac{2\sin x\, cosx}{sin^2 x} + 2x\, e^{(x^2+1)}$$ ❸ ❷

$$= \frac{2cosx}{\sin x} + 2x\, e^{(x^2+1)}$$ ❶

$$= 2\cot x + 2x\, e^{(x^2+1)} = f(x)$$ ❶ ❶

$\therefore$ F هى مشتقة عكسية للدالة f

8

ثانياً: 11. حل المعادلة التفاضلية بفصل المتغيرات: $12\,\frac{dy}{dx} - 7e^x = 0$

$$12dy = 7e^x\, dx$$ ❷

$$\int 12\, dy = \int 7\ e^x\ dx$$ ❶

$$12y = 7e^x + c$$ ❶ ❷ ❶

$$y = \frac{7}{12}e^x + c$$ ❶

11

ثالثاً: 12. باستخدام التكامل بالتعويض أوجد $\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\, dx$

$$u = 3x^2 + 1 \quad \rightarrow \quad du = 6x\, dx \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{6x}$$ ❶ ❷ ❶

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x^2+1}}\, dx = \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{6\cancel{x}}$$ ❷

$$= \frac{1}{6}\int u^{\frac{-1}{2}}\, du = \frac{1}{3}\, u^{\frac{1}{2}} + c$$ ❷ ❷

$$= \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+1} + c$$ ❶

11

رابعاً : بفرض أن h , f دالتان متصلتان حيث

$$\int_1^4 h(x)dx = 3 \quad , \quad \int_1^9 f(x)dx = 10 \quad , \quad \int_4^9 f(x)dx = -2$$

أوجد :

13. $\int_9^4 3\, f(x)\, dx$

$$= -3 \int_4^9 f(x)\, dx = -3 \times -2 = 6$$

14. $\int_1^4 \left(f(x) + h(x)\right) dx$

$$= \int_1^4 f(x)\, dx + \int_1^4 h(x)dx = \int_1^9 f(x)dx - \int_4^9 f(x)dx + 3$$

$$= 10 - (-2) + 3 = 15$$

32

السؤال الثالث

10

أولاً : 15. أوجد $F'(x)$ إذا علمت أن : $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \sqrt{1+\ t^4}\ dt$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{2x}^{x^2} \sqrt{1+\ t^4}\ \ dt$$

$$= \frac{d}{dx}\int_{2x}^{a} \sqrt{1+\ t^4}\ \ dt + \frac{d}{dx}\int_{a}^{x^2} \sqrt{1+\ t^4}\ \ dt$$

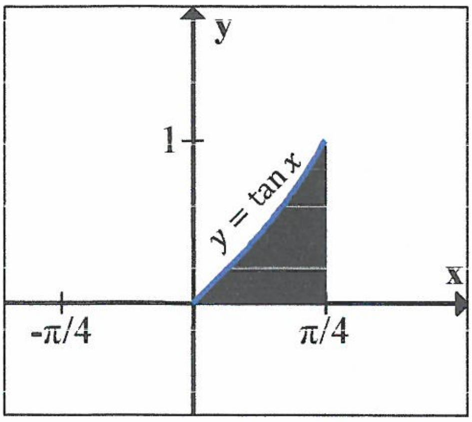
$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_{a}^{2x} \sqrt{1+\ t^4}\ \right) dt + \frac{d}{dx}\int_{a}^{x^2} \sqrt{1+\ t^4}\ \ dt$$

$$= -2\sqrt{1+\ 16\, x^4} + 2x\sqrt{1+\ x^8}$$

11

ثانياً : 16. أوجد حجم المجسم الناشئ من دوران المنطقة المظللة والمحصورة بين المنحنى $y = \tan x$

والمحور السيني في الفترة $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{4}\right]$ حول محور السينات. (إرشاد : $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$)



$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi \tan^2 x \ dx \ ❸ = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1)\, dx \ ❶$$

$$= \pi\, [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} \ ❸$$

$$= \pi \left[\left(\tan\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - (\tan 0 - 0)\right] \ ❶ ❶$$

$$= \pi \left[\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - 0\right] = \pi - \frac{\pi^2}{4}$$ وحدة مكعبة ❷

11

ثالثاً : 17. أوجد طول منحنى الدالة $f(x)$ على الفترة $[2, 4]$

علماً بأن : $f'(x) = \sqrt{81x^2 - 1}$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \quad ❷$$

$$= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(\sqrt{81x^2 - 1}\right)^2}\ dx \quad ❶$$

$$= \int_2^4 \sqrt{1 + 81x^2 - 1}\ dx \ ❶ = \int_2^4 \sqrt{81x^2}\ dx \ ❶ = \int_2^4 |9x|\ dx$$

$$= \int_2^4 9x\ dx \ ❶ = \left[\frac{9x^2}{2}\right]_2^4 \ ❷ = \left(\frac{9 \times (4)^2}{2}\right) - \left(\frac{9 \times (2)^2}{2}\right) \quad ❷$$

$= 72 - 18 = 54$ وحدة قياس ❶

انتهت الأسئلة، بالتوفيق والنجاح