دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم
إدارة التقويم والامتحانات

المـــــادة : رياضيات
زمن الإجابة : ساعة ونصف
عدد صفحات الأسئلة : (5)

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول للصف الثاني عشر / القسم العلمي
للعام الدراسي 2010 / 2011

نموذج إجابة

17

10

السؤال الأول

أولاً :

أوجد :

1) $\lim\limits_{x \to 3} \left(2x^2 + \frac{1}{x} + 4 \right)$

$= 2(3)^2 + \frac{1}{3} + 4$ (1) $= 18 + \frac{1}{3} + 4 = 22\frac{1}{3}$ (1)

2) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2}$

$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow 2$ الدالة معرفة على يمين ويسار العدد

$\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2}$ (1)

$= \lim\limits_{x \to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}$ (1) $= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$ (1)

3) إذا كان : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{|x+1|-2}{x^2-x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{\sin kx}$

أوجد قيمة k

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x+1)-2}{x(x-1)}$ (1) $= \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{\sin(kx)}{x}}$ (1)

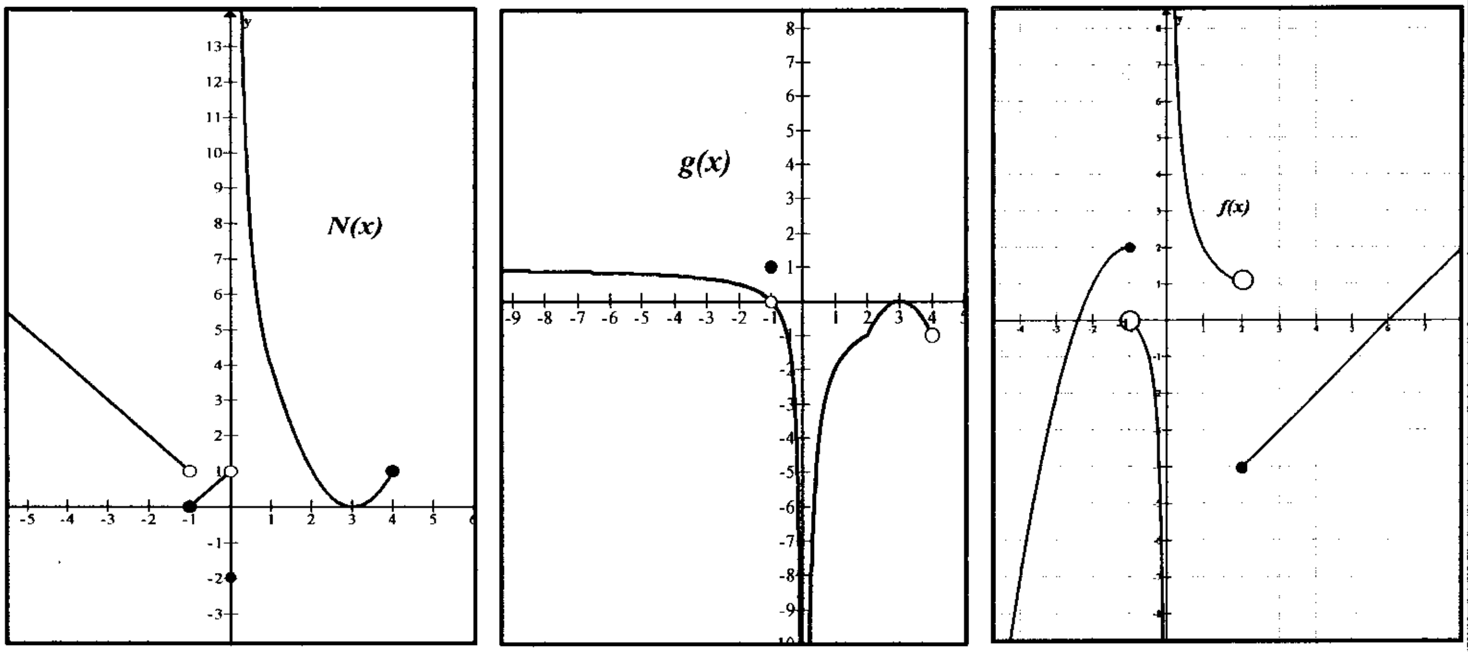
$\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{\frac{\sin kx}{x}}$

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x} = \frac{5}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x}}$

1 (1) $= \frac{5}{k}$ (1) $\Rightarrow k = 5$ (1)

7

ثانياً : الرسومات البيانية التالية تمثل بيان كل من الدوال : $f(x)$, $g(x)$, $N(x)$



4) اقرأ جيداً ثم املأ الفراغات في الجدول التالي بوضع (نعم) أو (لا) :

	$f(x)$ (2)	$g(x)$ (2)	$N(x)$ (2)
متصلة عند $x = 1$	نعم	نعم	نعم
لها انفصال لا نهائي عند $x = 0$	نعم	نعم	نعم
قابلة للإشتقاق عند $x = -2$	نعم	نعم	نعم
معدل التغير عند $x = 3$ يساوي صفراً	لا	نعم	نعم
تكون فقط النهاية لجهة اليسار موجودة عند $x = 4$	لا	نعم	نعم
لها انفصال يمكن التخلص منه عند $x = -1$	لا	نعم	لا

الدالة التي تحقق جميع ما سبق هي : ....g(x)........ (1)

18

السؤال الثاني

7

أولاً : إذا كانت الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 1 \\ 3x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$$

5) ابحث اتصال الدالة عند $x = 1$

① $f(1) = 2$ ، ① $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(3x^2-1) = 2$ ، ① $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}(x+1) = 2$

① ∴ الدالة f متصلة عند $x=1$ لأن

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} f(x) = f(1)$$

6) باستخدام تعريف المشتقة أوجد $f'(1^+)$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{3x^2-1-(1+1)}{x-1} \text{ ①}$$

$$= \lim_{x\to1^+} \frac{3x^2-3}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{3(x-1)(x+1)}{x-1} \text{ ①}$$

$$= \lim_{x\to1^+} 3(x+1) = (3)(2) = 6 \text{ ①}$$

7

ثانياً : أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

7) $y = \frac{x^3+7}{x-3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x^2)(x-3) - (x^3+7)(1)}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{3x^3 - 9x^2 - x^3 - 7}{(x-3)^2} = \frac{2x^3 - 9x^2 - 7}{(x-3)^2}$$

8) $y = \sqrt{x^2+1}\ \sin(2x+1)$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2+1}\cdot\left(2\cos(2x+1)\right) + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\sin(2x+1)$$

$$= 2\sqrt{x^2+1}\cos(2x+1) + \frac{x\sin(2x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

4

ثالثاً :

9) إذا كانت $u = x^2 + 7x$ ، $y = u + \sec(3u)$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 0$

$\frac{dy}{du} = 1 + 3\sec(3u)\tan(3u)$ (1)

$\frac{du}{dx} = 2x + 7$ (1)

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (1 + 3\sec(3u)\tan(3u)) \cdot (2x+7)$ (1)

عندما $x = 0$ تكون $u = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = (1 + 3\sec(0)\tan(0))(0+7)$

$= (1)(7) = 7$ (1)

السؤال الثالث

15

أولاً :

5

تتحرك نقطة على خط مستقيم بحيث يعطى موقعها في أي لحظة بالدالة $s(t) = 25t^2 - \frac{5}{3}t^3$

حيث t مقاسة بالثواني ، s مقاسة بالأمتار ، $0 \le t \le 10$ **أوجد:**

10) الزمن t الذي تكون عنده العجلة مساوية للصفر .

$v(t) = s'(t) = 50t - 5t^2$ (1)

$a(t) = v'(t) = 50 - 10t$ (1)

نضع $a(t) = 0$

$50 - 10t = 0$ (1) $\Rightarrow t = 5$ (1) ثواني

11) سرعة الجسيم في كل مرة تساوي فيها العجلة صفرا .

$v(5) = 50(5) - 5(25)$ (1)

$= 250 - 125 = 125$ متر/ثانية

5

ثانياً : إذا كانت $f(2) = 5$ ، $f'(2) = 4$

12) أوجد : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x^2 - 4)f(x)}{x-2}$

$\therefore$ $f'(2)$ موجودة $\Leftarrow$ f دالة متصلة عند $x=2$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$ ①

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)\ f(x)}{x-2}$ ① $= \lim\limits_{x\to 2} (x+2)\ f(x)$ ①

$= \lim\limits_{x\to 2}(x+2) \cdot \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ① $= (2+2) \cdot f(2) = 4(5) = 20$ ①

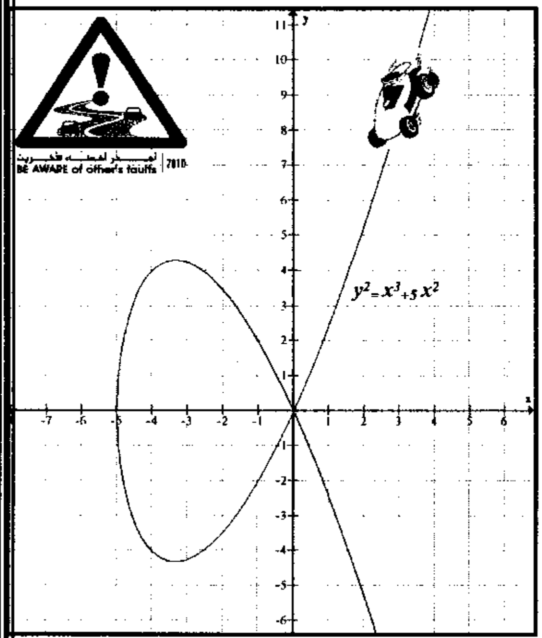
5

ثالثاً :

سيارة سباق تسير على المنحنى الذي معادلته $y^2 = x^3 + 5x^2$ والمرسوم بيانياً أمامك :

إذا انحرفت السيارة عن مسارها على هذا المنحنى وسارت على المماس المرسوم له عند النقطة $(-4 , 4)$

13) أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(-4, 4)$ باستخدام الاشتقاق الضمني .



بالاشتقاق الضمني بالنسبة لـ x

$2yy'$ ① $= 3x^2$ ① $+ 10x$

عند النقطة $(-4, 4)$

$8y' = 3(16) + 10(-4)$ ①

$8y' = 8 \Rightarrow y' = 1$ ①

$\therefore$ ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(-4, 4)$ يساوي 1

14) أوجد معادلة المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(-4 , 4)$

معادلة المماس $y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 4 = (1)(x + 4)$ ①

معادلة المماس للمنحنى عند النقطة $(-4, 4)$ هي $y = x + 8$

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا لكم بالنجاح والتوفيق

دولة الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم
إدارة التقويم والامتحانات

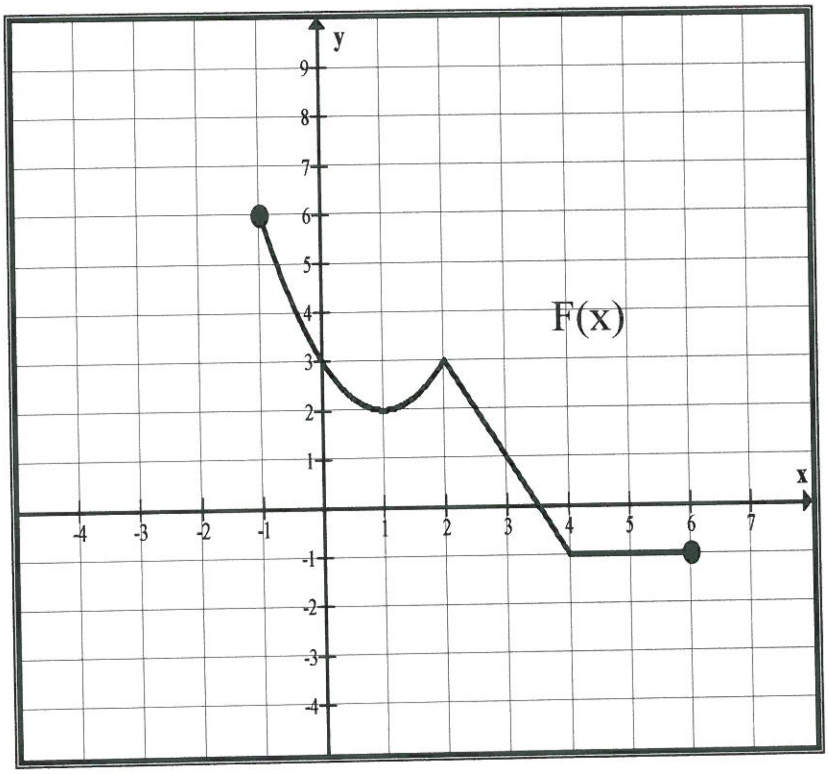
المـــــادة : رياضيات
زمن الإجابة : ساعة ونصف
عدد صفحات الأسئلة : (6)

نموذج تجريبي لامتحان نهاية الفصل الدراسي الأول للصف الثاني عشر / القسم العلمي
للعام الدراسي 2010 / 2011

على الطالب التأكد من عدد صفحات الأسئلة
الإجابة على الورقة نفسها

السؤال الاول

اولا : الشكل التالي يمثل بيان الدالة F(x) المعرفه على [-1 , 6]



فإذا كان $F'(-1^+) = -4$, $F'(0) = -2$ ، $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{F(x) - F(2)}{x-2} = 2$

اجب عن الأسئلة 1 ، 2 ، 3

1) أوجد $G'(0)$ حيث $G(x) = (x+1)F(x)$

$G'(x) = (1)(F(x)) + (x+1)(F'(x))$

$G'(0) = F(0) + (1)\,F'(0) = 3 + (-2) = 1$

2) أكمل الجدول التالي مع تبرير الإجابة

x	$F'(x)$	التبرير
1	......0......	المماس للمنحنى الدالة $F(x)$ عند $x=1$ أفقي
2	...غير موجودة	لأن $F'(2^-)=2$ ، $F'(2^+)=-2$
3	......-2......	دالة خطية ، ميل المماس للمنحنى $= F'(3) = -2$
5	......0......	دالة ثابتة ، ميل المماس للمنحنى $= F'(5) = 0$

3) إذا علمت أن $\dfrac{\sin 8x + x\cos x}{2x+\sin x} \le \dfrac{4K(x)-1}{x+3} \le F(x)$ حول العدد (0)

بالاستعانة ببيان الدالة $F(x)$ وباستخدام نظرية الإحاطة أوجد $\lim\limits_{x\to 0} K(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x + x\cos x}{2x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 8x}{x} + \cos x}{2 + \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{8+1}{2+1} = \frac{9}{3} = 3 \qquad \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} F(x) = 3 \qquad \frac{1}{2}$$

س ½ ، ½ كرر

$$\lim_{x\to 0}\frac{4K(x)-1}{x+3} = 3$$

$$\frac{4\lim\limits_{x\to 0}K(x) - \lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}(x+3)} = 3$$

$$\frac{4\lim\limits_{x\to 0}K(x) - 1}{3} = 3$$

$$4\lim_{x\to 0}K(x) = 10$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}K(x) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

السؤال الثاني

أولاً

في إحدى التدريبات لفريق كشافة في أحد المعسكرات تم تحديد مسار التدريب على منحنى الدالة $P(t)$ حيث

$$P(t) = \frac{t^2 - 9}{|t-2| - 1}$$

، t تمثل وقت التدريب

اجب عن الأسئلة الآتية :

4) $\lim\limits_{t \to 3} p(t)$

$$\lim_{t\to3} \frac{(t-3)(t+3)}{(t-2-1)}$$

$$= \lim_{t\to3} \frac{(t+3)}{1} = \frac{6}{1} = 6$$

5) حدد نوع انفصال الدالة $P(t)$ عند t=3

نوع الانفصال عند t=3

هو انفصال يمكن التخلص منه .

6) هل يمكن التخلص من هذا الانفصال ؟ وضح ذلك

نعم ، وذلك بإعادة تعريف الدالة $p(t)$ على الصورة

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2-9}{|t-2|-1} & t \neq 3 \\ 6 & t = 3 \end{cases}$$

ثانياً

7) إذا كان $D(2+h)-D(2)=\sqrt{4h+4}-2$, $D''(2)=3$

اوجد معدل التغير للدالة $L(x)=\dfrac{x^2}{D'(x)+1}$ عند $x=2$

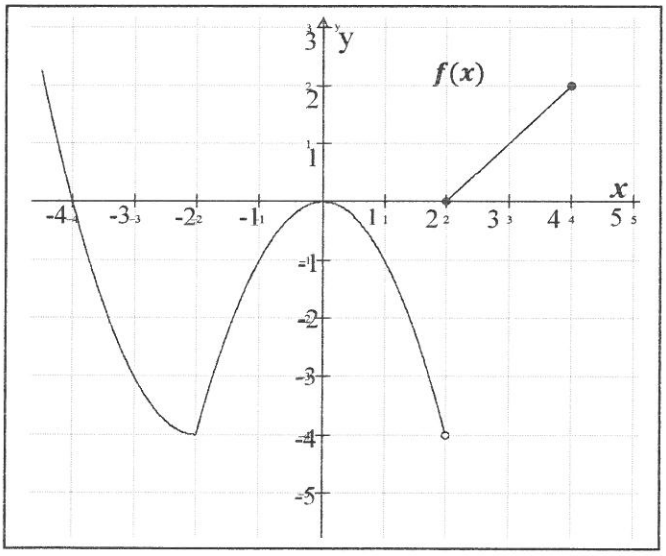
$$D'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{D(2+h)-D(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4h+4}-2}{h}\times\frac{\sqrt{4h+4}+2}{\sqrt{4h+4}+2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4h+\cancel{4}-\cancel{4}}{h(\sqrt{4h+4}+2)}=\lim_{h\to 0}\frac{4}{\sqrt{4h+4}+2}=\frac{4}{4}=1$$

$$L'(x)=\frac{2x(D'(x)+1)-x^2D''(x)}{(D'(x)+1)^2}$$

$$L'(2)=\frac{4(D'(2)+1)-4D''(2)}{(D'(2)+1)^2}=\frac{8-12}{4}=\frac{-4}{4}=-1$$

ثالثا : بالاستعانة بالشكل المجاور الذي يمثل بيان الدالة $f(x)$ أجب عن الأسئلة التالية :



(8) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ غير موجودة

(9) $\lim_{x\to -4} f(x) = \cdots$ 0

(10) النهاية فقط من جهة اليسار موجودة عند

x تساوي 4

(11) إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=0$ فإن مجموعة

قيم a هي $\{-4 , 0\}$

(12) $\lim_{x\to 3^+} [x]\, f(x) = \cdots$

$$\lim_{x\to 3^+}(3)\,f(x)$$

$$=3\lim_{x\to 3}f(x)=3(1)=3$$

السؤال الثالث: أولا

13) اوجد قيمة a في كل حاله من الحالات التالية مع تبرير الاجابة

التبرير	قيمة a	الحالة
حيث أن $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ موجودة فإن $(\sqrt{x-a}-3)(\sqrt{x-a}+3)=x-1$ $x-a-9=x-1$ $a=-8$	-8	$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-a}-3}{x-1}$ وكان : $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ موجودة
حيث أن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$ فإن الدالة تكون متصلة عند $x=1$ $\therefore \lim\limits_{x\to1^+}(3x^2+a)=\lim\limits_{x\to1^-}(6x)$ $3+a=6$ $a=3$	3	$H(x)=\begin{cases}3x^2+a & : x>1\\ 6x & : x\le1\end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x=1$
$y=\dfrac{2}{x^2}\Rightarrow y'=\dfrac{-4}{x^3}$ ميل المستقيم × ميل المماس عند $x=3$ = -1 $\dfrac{-4}{27}\times a=-1\Rightarrow a=\dfrac{27}{4}$	....	مماس الدالة $x^2y=2$ عند $x=3$ عمودي على المستقيم $y=ax+5$

ثانيا :

14) اذا كان $x = \sqrt{t+3}$ وكانت t=cos2y+tany اوجد $\dfrac{dy}{dx}$ عند y=0

بالاشتقاق بالنسبة لـ t

$t = \cos 2y + \tan y$

$1 = -2\sin 2y \dfrac{dy}{dt} + \sec^2 y \dfrac{dy}{dt} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-1}{-2\sin 2y + \sec^2 y}$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}$

عند $y=0$ نجد أن $t=1$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}(\text{عند } y=0) = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{-1}{1}}{\frac{1}{4}} = -4$

15) اوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة $f(x)=(2x+1)^4$ عند النقط التي يكون المماس عندها يصنع زاوية 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

حيث أن المماس للمنحنى يصنع زاوية قياسها 45° فإن ميل المماس عندها

$f'(x) = \tan 45^\circ = 1$

$f'(x) = 4(2x+1)^3(2) = 1 \Rightarrow (2x+1)^3 = \dfrac{1}{8} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$

$\therefore$ نقطة التماس هي $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}\right)$

$\therefore$ معادلة المماس هي

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - \dfrac{1}{16} = 1\left(x + \dfrac{1}{4}\right) \Rightarrow y = x + \dfrac{5}{16}$

16) يتحرك جسيم على خط مستقيم حيث بعده عن نقطة ثابتة معطى بالعلاقة $s(t)=t^3-3t^2+10$ حيث t الزمن بالثانية ، s بالمتر اوجد السرعة المتجهة للجسم عندما تنعدم العجلة

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t$

$a(t) = v'(t) = 6t - 6$

بوضع $a(t) = 0$ ينتج

$6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

$v(1) = 3 - 6 = -3$ متر/ثانية

انتهت الاسئلة

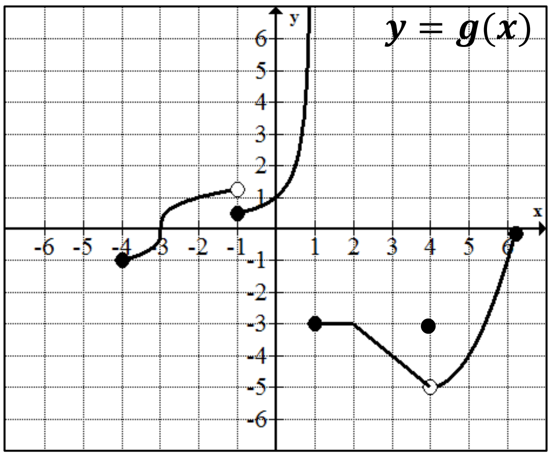
الإمارات العربية المتحدة
وزارة التربية والتعليم
إدارة التقويم والامتحانات

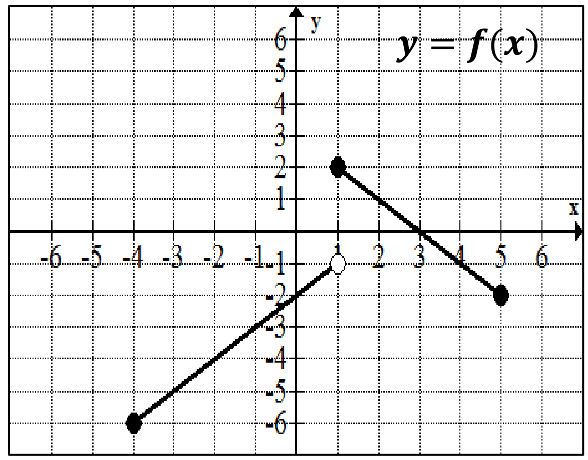
إجابة النموذج التدريبي لمادة الرياضيات في الفصل الدراسي الأول للصف الثاني عشر

للقسم العلمي للعام الدراسي 2014/2013 م

السؤال الأول

أولاً : استخدم الرسم البياني الذي يمثل بيان الدالتين $f(x)$, $g(x)$ في الإجابة عن الأسئلة التالية





(1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - 3\,g(x)}{x}$

$$\frac{0 - 3 \times -4}{3} = \frac{0 + 12}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(f(x) + g(x)\right)$

-2+ 1= -1

(3) $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{f(x)}$

غير موجودة

لأن $f(x) < 0$ (سالبة) عندما $x > 3$

(4) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$

$g'(2)$ غير موجودة

$g'(2^+) \neq g'(2^-)$ (ركن)

ثانيا : (5) أكمل الجدول التالي لتحصل على إجابة صحيحة :- فسر إجابتك

	الدالة	فقط النهاية لجهة اليسار موجودة	غير متصلة	متصلة و لكن غير قابلة للاشتقاق	انفصال يمكن التخلص منه
عند أي نقاط من مجال الدالة تكون	$f(x)$	$x = 5$ نقطة طرفية	$x = 1$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ غير موجودة(قفزة)	لايوجد	لا يوجد
	$g(x)$	$x = 6$ نقطة طرفية	$x = 4$ فجوة $x = 1$ قفزة $x = -1$ قفزة	$x = 2$ ركن $x = -3$ المماس عمودي	يمكن إعادة التعريف عند $x = 4$ نتيجة فجوة بجعل $g(4) = -5$

ثالثاً : أوجد نهاية كلاً مما يأتي :-

(7) $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x[x]-4}{x-2}$

$$= \lim_{x\to2^+} \frac{2x-4}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to2^+} \frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to2^+} 2 = 2$$

(6) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{|1-x|}{2-\sqrt{x+3}}$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{1-x}{2-\sqrt{x+3}} \times \frac{2+\sqrt{x+3}}{2+\sqrt{x+3}}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{(1-x)(2+\sqrt{x+3})}{4-(x+3)}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{\cancel{(1-x)}(2+\sqrt{x+3})}{\cancel{1-x}} = 2+\sqrt{1+3} = 4$$

السؤال الثاني

أولاً: (8) إذا كانت $x\cos x - \frac{3}{4}\sin x \le f(x) \le \frac{x^3+x}{4}$ أوجد $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\frac{x\cos x - \frac{3}{4}\sin x}{x} \le \frac{f(x)}{x} \le \frac{\frac{x^3+x}{4}}{x}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x\cos x}{x} - \frac{3}{4}\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to0} \cos x - \frac{3}{4}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$= \cos(0) - \frac{3}{4}(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+x}{4x} = \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x}(x^2+1)}{4\cancel{x}} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4}$$

ثانياً : (9) إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & x \le 1 \\ 2x^2-1 & 1 < x < 2 \\ x+3 & x \ge 2 \end{cases}$$

أوجد نقاط عدم الاتصال (إن كانت موجودة) للدالة f

نبحث اتصال الدالة عند $x = 2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(2x^2-1) = 2(2)^2 - 1 = 7$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x+3) = 2+3 = 5$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

الدالة غير متصلة عند $x = 2$

نبحث اتصال الدالة عند $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(2-x) = 2-1 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(2x^2-1) = 2(1)^2 - 1 = 1$$

$$f(1) = 2-1 = 1$$

إذاً الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 1$

ثالثاً : إذا كانت $f(x) = \frac{1}{2x-7}$

(10) أوجد ميل الخط القاطع للدالة f المار بالنقطتين $(4+h\,,\ f(4+h))\,,\,(4\,,\ f(4)\,)$ حيث $h \neq 0$

النقطتان هما , $(4,1)\,,\,(4+h, \frac{1}{1+2h})$ ميل القاطع $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$$m = \frac{\frac{1}{1+2h} - 1}{4+h-4} = \frac{\frac{1-1-2h}{1+2h}}{h} = \frac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}(1+2h)} = \frac{-2}{1+2h}$$

(11) استخدم إجابتك في السؤال السابق رقم (10) في إيجاد $f'(4)$

$$f'(4) = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{1+2h}$$

$$f'(4) = -2$$

(12) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند $x = 4$

معادلة المماس الذي ميله 2- و يمر بالنقطة (4 , 1)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2(x-4) \quad \rightarrow \quad y = -2x + 9$$

السؤال الثالث

أولاً:

(13) إذاكان $y = 5 - 4cost$, $x = 3sint$

أوجـــــــــد $\frac{dy}{dx}$ عنـــــــــد $t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dt} = 4\,sint \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 3\,cost$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\,sint}{3cost} = \frac{4}{3}tant$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}\,tan\,\frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}$$

ثانياً "تواصل العقول .. وصنع المستقبل" عنوان حملة استضافة معرض اكسبو الدولي 2020 في الإمارات .

ضمن فعاليات دعم ملف الاستضافة تحرك قارب يحمل شعار المعرض من نقطة فوق سطح البحر بحيث يكون موقعه عند اللحظة $t \geq 0$ يعطى بالعلاقة $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9$ حيث s تقاس بالمتر ، t تقاس بالثانية .

(14) أوجد الإزاحة خلال أول 3 ثواني من الحركة

$$s(3) - s(0)$$

$$((3)^3 - 6(3)^2 + 9)) - (9) = -27\,m$$

(15) أوجد السرعة المتوسطة خلال أول 3 ثواني من الحركة .

$$\frac{s(3) - s(0)}{3 - 0} = \frac{-27}{3} = -9\,m/sec$$

(16) أوجد السرعة اللحظية و العجلة عند $t = 3sec$؟

$$s'(t) = v(t) = 3t^2 - 12t \qquad s''(t) = a(t) = 6t - 12$$

$$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) = -9m/sec \qquad a(3) = 6(3) - 12 = 6\,m/sec^2$$

(17) إذا كانت $xy + y^2 = 4$ فأوجد y'' عند النقطة (0,1)

$$y + xy' + 2yy' = 0 \rightarrow (1)$$

نشتق العلاقة (1)

$$y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0$$

$$xy'' + 2yy'' = -2y' - 2(y')^2$$

$$y''(x + 2y) = -2y' - 2(y')^2$$

$$y'' = \frac{-2y' - 2(y')^2}{x + 2y}$$

عند النقطة (0,1)

$$y' = \frac{-y}{x+2y} \rightarrow y' = \frac{-1}{0+2(1)} = \frac{-1}{2}$$

$$y'' = \frac{-2\left(\frac{-1}{2}\right) - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^2}{0 + 2(1)} = \frac{1}{4}$$

ثالثاً :- بفرض أن الدالتين f ، g ومشتقاتهما الأولى لهما القيم التالية عند $x = 1$, $x = 0$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
0	-3	$\frac{1}{2}$	-1	1
1	0	1	-3	4

أوجد قيم المشتقة الأولى بالنسبة إلى x المعطاه في الحالات التالية :-

18) $g(f(x))$, $x = 1$

$$g'(f(x)) \times f'(x)$$

$$g'(f(1)) \times f'(1)$$

$$g'(0) \times 1$$

$$1 \times 1 = 1$$

19) $\sqrt{g(x) + 5}$, $x = 0$

$$\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x) + 5}}$$

$$\frac{g'(0)}{2\sqrt{g(0) + 5}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1 + 5}} = \frac{1}{4}$$

20) $f^2(x)g(x)$, $x = 1$

$$2f(x)f'(x)g(x) + f^2(x)g'(x)$$

$$2f(1)f'(1)g(1) + f^2(1)g'(1)$$

$$2 \times 0 \times 1 \times -3 + (0)^2 \times 4 = 0$$

21) $\frac{f(x)+x}{g(x)}$, $x = 0$

$$\frac{(f'(x) + 1)g(x) - g'(x)(f(x) + x)}{(g(x))^2}$$

$$\frac{(f'(0) + 1)g(0) - g'(0)(f(0) + 0)}{(g(0))^2}$$

$$\frac{(\frac{1}{2} + 1)(-1) - 1(-3 + 0)}{(-1)^2} = \frac{3}{2}$$

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا لكم بالنجاح و التوفيق

إجابة النموذج التدريبي لامتحان مادة الرياضيات للفصل الدراسي الأول للصف الثاني عشر / القسم العلمي للعام الدراسي 2012/ 2013 م

السؤال التدريبي الأول : **أولاً :** لتكن $f(x)=\frac{5-\sqrt{x-a}}{3-x}$

1) أوجد قيمة a التي تجعل $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ موجودة

حتى تكون $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ موجودة لابد أن يكون $5-\sqrt{x-a}=0$ عند $x=3$

$$5-\sqrt{3-a}=0$$

$$\sqrt{3-a}=5$$

$$3-a=25 \quad\to\quad a=3-25 \quad\to\quad a=-22$$

2) بالاستفادة مما سبق أوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

$$f(x)=\frac{5-\sqrt{x+22}}{3-x}$$

الدالة معرفة على يمين ويسار العدد3 $x\ge -22$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(5-\sqrt{x+22}\right)}{3-x}\times\frac{(5+\sqrt{x+22}\,)}{(\,5+\sqrt{x+22}\,)}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(3-x)}}{\cancel{(3-x)}(5+\sqrt{x+22}\,)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(5+\sqrt{x+22}\,)}=\frac{1}{(5+\sqrt{3+22}\,)}=\frac{1}{10}$$

ثانيا : 3) أوجد : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\,.\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$$

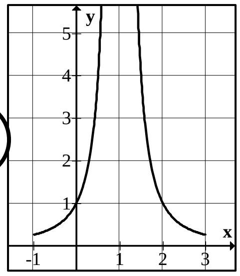
باستخدام نظرية الإحاطة نوجد : $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$

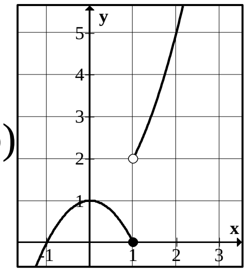
$$-1\le\sin x\le 1 \quad\to\quad -1\le\sin\frac{1}{x}\le 1 \quad\to\quad 0\le\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1 \qquad 0\le|x|\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x| \quad\to\quad 0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

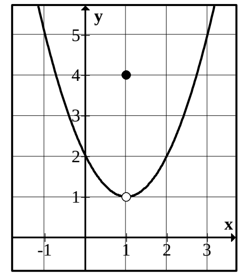
$$\lim_{x\to 0}0=0 \quad,\quad \left(\because\ \lim_{x\to 0^+}x=0\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}(-x)=0\ ,\quad \therefore\ \lim_{x\to 0}|x|=0\right) \quad\to\quad \lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\,.\,\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=(1).(0)=0$$

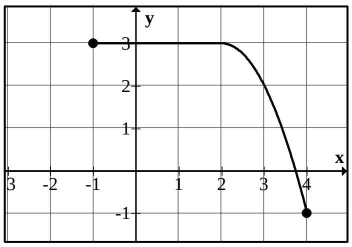
4) يوجد انفصال لا نهائي عند $x = 1$

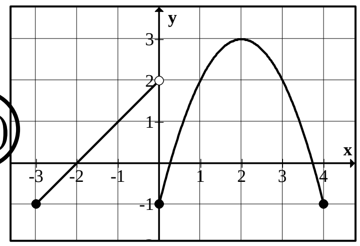
(a)


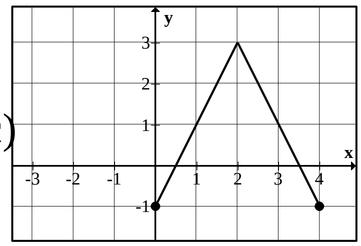
(b)


(c)


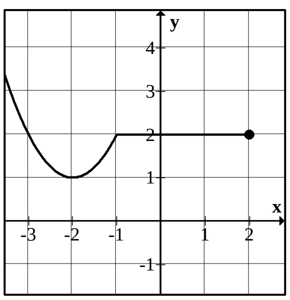
5) يوجد مماس أفقي عند $x = 2$

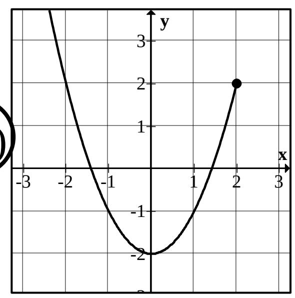
(a)


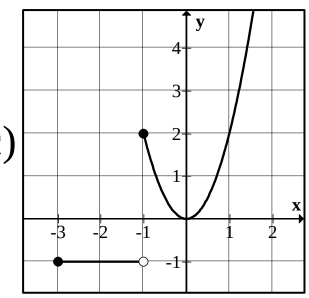
(b)


(c)


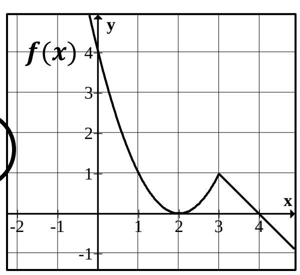
6) الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

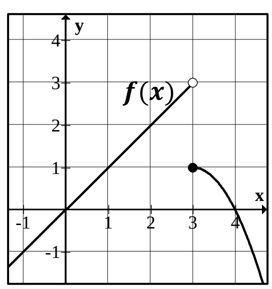
(a)


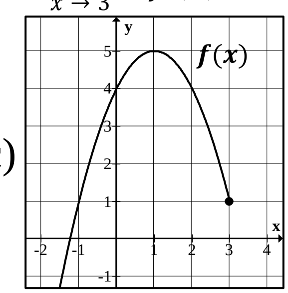
(b)


(c)


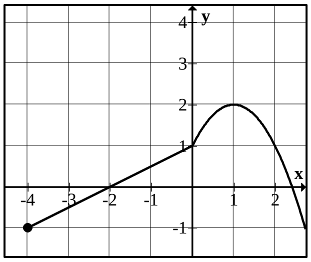
7) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 1$

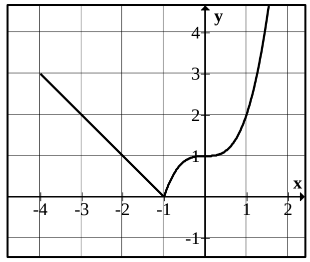
(a)


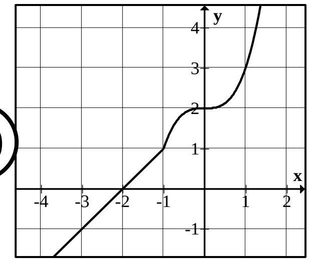
(b)


(c)


8) متوسط التغير عند $x = -2$ يساوي 1

(a)


(b)


(c)


السؤال التدريبي الثاني :

أولاً : 9) أعد تعريف الدالة $f(x) = \frac{4x-x^2}{|x-5|-1}$ بحيث تكون متصلة عند $x = 4$

$$\lim_{x \to 4} \frac{4x-x^2}{|x-5|-1} = \lim_{x \to 4} \frac{x(4-x)}{-x+5-1} = \lim_{x \to 4} \frac{x\cancel{(4-x)}}{\cancel{(4-x)}} = \lim_{x \to 4} x = 4 = f(4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x-x^2}{|x-5|-1} & x \neq 4 \\ 4 & x = 4 \end{cases}$$

ثانياً : 10) إذا كان $f(x) = \frac{x^3-125}{x-5}$ فأثبت أن $\lim_{x \to 5} f(x) = 3\,f'(10)$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} \frac{\cancel{(x-5)}(x^2+5x+25)}{\cancel{(x-5)}} = (5)^2 + 5\,(5) + 25 = 75$$

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-5) - (x^3-125)}{(x-5)^2}$$

$$f'(10) = \frac{3(10)^2(10-5) - (10)^3 + 125}{(10-5)^2} = 25$$

$$3f'(10) = 3(25) = 75 = \lim_{x \to 5} f(x)$$

ثالثاً : اكتب مثالاً للدالة $f(x)$ بحيث تحقق الشروط المعطاه في كل مما يلي :

11) $f'(x) = 0$ لكل x عدد حقيقي .

الإجابة مفتوحة أى دالة ثابتة مثال : $f(x) = 6$ ....

12) $f'(x)$ موجوده لكل $x \neq -1$ ، $f'(-1)$ غير موجوده.

....

الإجابة مفتوحة أي دالة صحيحة تحقق الشروط السابقة مثال : $f(x) = \frac{4}{x+1}$

13) $f'(x)$ موجوده لكل $x \neq \pm 1$ ، $f'(-1), f'(1)$ غير موجودتين .

الإجابة مفتوحة أي دالة صحيحة تحقق الشروط السابقة مثال : $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ ....

14) $f'(x) = 0$ لكل $x \neq 0$ ، $f'(0)$ غير موجوده .

....

الإجابة مفتوحة أي دالة صحيحة تحقق الشروط السابقة مثال : $f(x) = \begin{cases} 5 & x \neq 0 \\ [x] & x = 0 \end{cases}$

رابعاً : أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية :

15) $y = \sqrt{\cos x + 3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-sinx}{2\sqrt{cosx + 3}}$$

16) $y = x^3 \csc x$

$$\frac{dy}{dx} = x^3(-cscx\ cotx) + 3x^2 cscx$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 cscx - x^3 cscx\ cotx$$

السؤال التدريبي الثالث :

أولاً: 17) حدد نقاط تماس المماسيين الأفقيين للمنحنى $x^2 - xy + y^2 = 27$

∵ للمنحنى مماس أفقي ← ∴ $y' = 0$

$$2x - (xy' + y) + 2yy' = 0$$

$$y' = 0 \rightarrow 2x - (x(0) + y) + 2y(0) = 0 \rightarrow 2x - y = 0 \rightarrow y = 2x$$

∴ نقطة التماس هي $(x, 2x)$ وتحقق معادلة المنحنى

$$x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 27$$
$$x^2 - 2x^2 + 4x^2 = 27$$
$$3x^2 = 27$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3, x = -3$$

$$x = 3 \rightarrow y = 2(3) = 6 \quad , x = -3 \rightarrow y = 2(-3) = -6$$

∴ نقطتي التماس هما $(-3, -6)$, $(3, 6)$

ثانياً: إذا كانت $y = f(3x)$ ، $\frac{dy}{dx} = 9x^2$ أوجد :

18) $f''(3x)$

$$\frac{dy}{dx} = 3\, f'(3x)$$

$$9x^2 = 3\, f'(3x) \quad \to \quad 18x = 3(3)f''(3x) \quad \to \quad f''(3x) = \frac{18x}{9} = 2x$$

19) $f''(6)$

$$f''(6) = f''(3(2)) = 2(2) = 4$$

ثالثاً:

إن مشروع الأولمبياد المدرسي تضمن رسالة وطنية سامية في إبراز الاهتمام بالقطاع المدرسي، وتعزيز دور الرياضة المدرسية، وتنحصر هذه المبادرة في 6 ألعاب من بينها الرماية والقوس والسهم.

الاولمبياد المدرسي
SCHOOL OLYMPICS

أطلق سعيد سهماً بسرعة قدرها $35 \text{ ft}/sec$ باتجاه هدف ، بفرض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه يعطى بالعلاقة :

$$h(t) = -16\, t^2 + 35\, t + 1.5$$ أوجد كلا مما يلي :

20) السرعة اللحظية (المتجهة) للسهم عند $t = \frac{1}{4}$

$$v(t) = h'(t) = -32t + 35$$

$$h'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-32}{4} + 35 = 27 \text{ ft}/sec$$

21) الزمن t الذي تكون عنده السرعة مساوية للصفر .

$$h'(t) = 0$$

$$-32\, t + 35 = 0$$

$$t = \frac{35}{32} = 1.09\, sec$$