مجلس أبوظبي للتعليم
Abu Dhabi Education Council
Education First التعليم أولاً

الرياضيات

المستوى الثالث - الفصلان الدراسيان (2,3)

العبيكان Obeikan
McGraw Hill Education
١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧ م
طبعة تجريبية

Original Title:

Precalculus
Algebra 2

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

الرياضيات - المستوى الثالث
أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

Arabic Edition is published by Obeikan under agreement with
The McGraw-Hill Companies, Inc. ©

الطبعة العربية: مجموعة العبيكان للاستثمار
وفقًا لاتفاقيتها مع شركة ماجروهل©

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومتنا الرشيدة بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان التوجه نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز كتب الرياضيات بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف إستراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الوحدة 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 2 القطوع المخروطية

الوحدة 3 المتجهات

الفهرس

الوحدة 4 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة 5 النهايات والاشتقاق

الوحدة 1

المتطابقات والمعادلات المثلثية
Trigonometric Identities and Equations

فيما سبق:

درستُ الدوال المثلثية، وتمثيلاتها البيانية.

والآن:

- أثبت صحة المتطابقات المثلثية وأستعملها.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها.
- أحلّ معادلات مثلثية.

لماذا؟

إلكترونيات: تستعمل الموجات الراديوية في العديد من الأجهزة الإلكترونية كالتلفاز والهاتف النقال وغيرها. ويمكن تمثيل الموجات الراديوية بالدوال المثلثية، بحيث يمكن إيجاد قدرة الجهاز باستعمال معادلة مثلثية.

قراءة سابقة: اكتب قائمة بما تعرفه عن الدوال المثلثية، ثم تنبأ بما ستتعلمه في هذه الوحدة.

التهيئة للوحدة 1

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

حلّل كل عبارة فيما يأتي تحليلًا تامًّا، وإذا لم يكن ذلك ممكنًا فاكتب "أولية".

1) $-16a^2 + 4a$

2) $5x^2 - 20$

3) $4x^2 - x + 6$

4) $2y^2 - y - 15$

5) **هندسة:** مساحة قطعة ورقية مستطيلة الشكل هي: $(x^2 + 6x + 8)\ \text{cm}^2$. إذا كان طول القطعة: $(x + 4)\ \text{cm}$، فما عرضها؟

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية باستعمال التحليل:

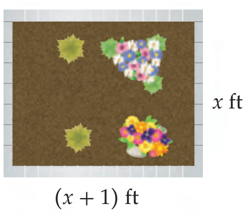
6) $x^2 + 6x = 0$

7) $x^2 + 2x - 35 = 0$

8) $x^2 - 9 = 0$

9) $x^2 - 7x + 12 = 0$

10) **حدائق:** قامت ليلى بتخصيص حوض مستطيل الشكل لزراعة الورود في منزلها. إذا علمت أن مساحة الحوض $42\ \text{ft}^2$، وبعديه عددان صحيحان، فأوجد قيمة x الممكنة.



أوجد القيمة الدقيقة لكل دالة مثلثية فيما يأتي:

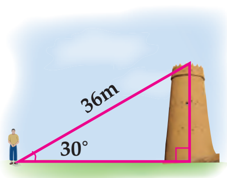
11) $\sin 45°$

12) $\cos 225°$

13) $\tan 150°$

14) $\sin 120°$

15) **أبراج:** يقف راشد أمام برج كما في الشكل المجاور. ما ارتفاع البرج؟



مراجعة المفردات

الحل الدخيل (extraneous solution):
الحل الذي لا يحقق المعادلة الأصلية.

الزاوية الربعية (quadrantal angle):
زاوية في الوضع القياسي بحيث يقع ضلع الانتهاء لها على أحد المحورين x أو y.

الزاوية المرجعية (reference angle):
إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x، ويمكن استعمالها؛ لإيجاد قيم الدوال المثلثية لأي زاوية θ.

دائرة الوحدة (unit circle):
هي دائرة مرسومة في المستوى الإحداثي، ومركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة.

الدالة الدورية (periodic function):
هي دالة تمثيلها البياني عبارة عن تكرار نمط على فترات منتظمة متتالية.

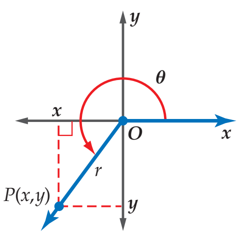
النسبة المثلثية (trigonometric ratio):
نسبة تقارن بين طولي ضلعين في المثلث القائم الزاوية.

الدوال المثلثية للزوايا (trigonometric functions of general angles):
لتكن θ زاوية مرسومة في الوضع القياسي، وتقع النقطة $P(x, y)$ على ضلع انتهائها. باستعمال نظرية فيثاغورس يمكن إيجاد r (المسافة من النقطة P إلى نقطة الأصل) باستعمال الصيغة $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. وتكون الدوال المثلثية الست للزاوية θ معرفة كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0 \qquad \csc \theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0 \qquad \cot \theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0$$



1-1

المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities

فيما سبق:

درستُ كيفية إيجاد قيم الدوال المثلثية.

والآن:

- أستعمل المتطابقات المثلثية لإيجاد قيم الدوال المثلثية.
- أستعمل المتطابقات المثلثية لتبسيط العبارات.

المفردات:

المتطابقة
identity

المتطابقة المثلثية
trigonometric identity

المتطابقات النسبية
quotient identities

متطابقات المقلوب
resiprocal identities

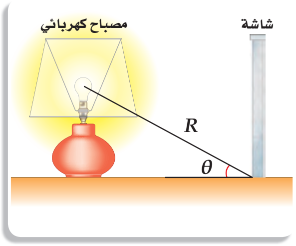
متطابقات فيثاغورس
pythagorean identities

متطابقات الزاويتين المتتامتين
cofunction identities

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية
odd-even identities

لماذا؟

تُسمّى كمية الضوء الساقطة من مصدر ضوئي على سطح، الاستضاءة (E). وتقاس الاستضاءة بوحدة قدم / شمعة، وترتبط بالمسافة R مقيسة بالأقدام بين المصدر الضوئي والسطح بالعلاقة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$، حيث I شدة إضاءة المصدر مقيسة بالشمعة، و θ هي الزاوية بين شعاع الضوء والمستقيم العمودي على السطح (الشاشة)، وتستعمل هذه العلاقة في التطبيقات الضوئية والبصرية كالإضاءة والتصوير.



المتطابقات المثلثية الأساسية: تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها. فمثلًا: $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$ متطابقة؛ لأن طرفيها متساويان لجميع قيم x، و**المتطابقة المثلثية** هي متطابقة تحوي دوال مثلثية. وإذا وجدت مثالًا مضادًّا يثبت خطأ المعادلة، فالمعادلة عندئذٍ لا تكون متطابقة.

مفهوم أساسي — المتطابقات المثلثية الأساسية

المتطابقات النسبية:

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

متطابقات المقلوب:

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}, \csc\theta \neq 0$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sin\theta \neq 0$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}, \sec\theta \neq 0$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cos\theta \neq 0$

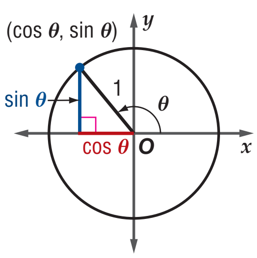
$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}, \cot\theta \neq 0$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}, \tan\theta \neq 0$

متطابقات فيثاغورس:

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$



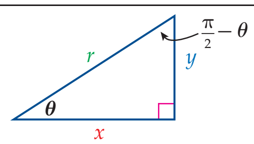
حسب نظرية فيثاغورس $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$



$\sin\theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

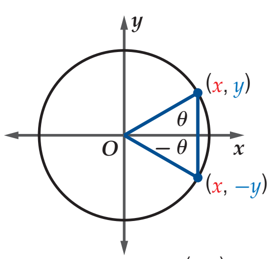
$\tan\theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية:

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$



$\sin\theta = y$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y$

$\cos\theta = x$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = x$

إرشادات للدراسة

متطابقات الزاويتين المتتامتين:
يمكن كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات كما يلي:
$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

يمكنك استعمال المتطابقات الأساسية، والمتطابقة $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ؛ لإيجاد القيم الدقيقة للدوال المثلثية، كما يمكنك إيجاد قيم تقريبية لها باستعمال الحاسبة البيانية.

مثال 1 استعمال المتطابقات المثلثية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{4}$ ، $90° < \theta < 180°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ — متطابقات فيثاغورس

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ — اطرح $\sin^2\theta$ من كلا الطرفين

$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$ — عوِّض $\frac{1}{4}$ بدلاً من $\sin\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$ — بإيجاد مربع العدد $\frac{1}{4}$

$\cos^2\theta = \frac{15}{16}$ — اطرح

$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$ — خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\cos\theta$ تكون سالبة ، ولذلك فإن $\cos\theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

التحقق: استعمل الحاسبة لإيجاد الإجابة التقريبية.

الخطوة 1: أوجد $\sin^{-1}\frac{1}{4}$

$\sin^{-1}\frac{1}{4} \approx 14.48°$ — استعمل الحاسبة

لأن $90° < \theta < 180°$ ، فإن $\theta \approx 180° - 14.48° = 165.52°$.

الخطوة 2: أوجد $\cos\theta$

عوض عن θ بـ $165.52°$

$\cos 165.52° \approx -0.97$

الخطوة 3: قارن الإجابة مع القيمة الدقيقة.

$-\frac{\sqrt{15}}{4} \stackrel{?}{\approx} -0.97$

$-0.968 \approx -0.97$ ✓

b) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\csc\theta$ إذا كان $\cot\theta = -\frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$ — متطابقات فيثاغورس

$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1 = \csc^2\theta$ — عوِّض $-\frac{3}{5}$ بدلاً من $\cot\theta$

$\frac{9}{25} + 1 = \csc^2\theta$ — بإيجاد مربع العدد $-\frac{3}{5}$

$\frac{34}{25} = \csc^2\theta$ — $\frac{9}{25} + 1 = \frac{9}{25} + \frac{25}{25} = \frac{34}{25}$

$\pm\frac{\sqrt{34}}{5} = \csc\theta$ — خذ الجذر التربيعي للطرفين.

وبما أن θ تقع في الربع الرابع، فإن $\csc\theta$ سالبة، ولذلك $\csc\theta = -\frac{\sqrt{34}}{5}$.

تحقق من فهمك

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{1}{3}$ ، $270° < \theta < 360°$.

1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec\theta$ إذا كان $\sin\theta = -\frac{2}{7}$ ، $180° < \theta < 270°$.

إرشادات للدراسة

الأرباع: يساعدك الجدول أدناه على تذكّر أي النسب المثلثية موجبة، وأيها سالبة في كل ربع من الأرباع: 1,2,3,4 .

الدالة	+	−
$\sin\theta$	1, 2	3, 4
$\cos\theta$	1, 4	2, 3
$\tan\theta$	1, 3	2, 4
$\csc\theta$	1, 2	3, 4
$\sec\theta$	1, 4	2, 3
$\cot\theta$	1, 3	2, 4

تبسيط العبارات المثلثية: تبسيط العبارات الرياضية التي تحتوي على الدوال المثلثية، يعني إيجاد قيمة عددية للعبارة ، أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط، إن أمكن.

مثال 2 تبسيط العبارة المثلثية

بسّط العبارة : $\frac{\sin\theta \csc\theta}{\cot\theta}$.

$$\frac{\sin\theta\csc\theta}{\cot\theta} = \frac{\cancel{\sin\theta}\frac{1}{\cancel{\sin\theta}}}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\tan\theta}} \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$$

$$= \frac{1}{1}\cdot\frac{\tan\theta}{1} = \tan\theta \qquad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

تحقق من فهمك

(2A $\frac{\tan^2\theta\csc^2\theta - 1}{\sec^2\theta}$

(2B $\frac{\sec\theta}{\sin\theta}(1-\cos^2\theta)$

تبسيط العبارات المثلثية يمكن أن يكون مفيدًا في حل مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة إعادة كتابة الصيغ الرياضية

الاستضاءة: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس.

a) حل المعادلة $\sec\theta = \frac{I}{ER^2}$ بالنسبة لِـ E.

$$\sec\theta = \frac{I}{ER^2} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$E\sec\theta = \frac{I}{R^2} \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E\frac{1}{\cos\theta} = \frac{I}{R^2} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\cos\theta}{R^2} \qquad \cos\theta \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

b) هل المعادلة في الفرع a تكافئ المعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ ؟ فسِّر إجابتك.

$$R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E} \qquad \text{المعادلة الأصلية}$$

$$ER^2 = I\tan\theta\cos\theta \qquad E \text{ اضرب كلا الطرفين في}$$

$$E = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{R^2} \qquad R^2 \text{ اقسم كلا الطرفين على}$$

$$E = \frac{I\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{R^2} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$E = \frac{I\sin\theta}{R^2} \qquad \text{بسّط}$$

المعادلتان غير متكافئتين؛ فالمعادلة $R^2 = \frac{I\tan\theta\cos\theta}{E}$ تبسّط إلى: $E = \frac{I\sin\theta}{R^2}$ ، بينما المعادلة في الفرع (a) تكتب على الصورة: $E = \frac{I\cos\theta}{R^2}$.

تحقق من فهمك

3) تعلم أن مقدار العزم (τ) يساوي حاصل ضرب القوة (F) في ذراعها، ويعطى بالمعادلة $\tau = Fr\sin\theta$. أعد كتابة المعادلة السابقة بدلالة (F).

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارة المثلثية
عند تبسيط العبارات المثلثية يكون من الأسهل عادة أن تكتب حدود العبارة جميعها بدلالة: الجيب($\sin\theta$) و/أو بدلالة جيب التمام ($\cos\theta$).

تاريخ الرياضيات

الفراعنة القدماء هم أول من عرف حساب المثلثات، وساعدهم ذلك على بناء الأهرامات الثلاثة، ثم طوّره علماء المسلمين من بعدهم ووضعوا الأسس الحديثة له ، وأصبح علمًا مستقلًا بذاته، وكان من أوائل المؤسسين له : أبو عبد الله البتاني، والزرقلي ، ونصير الدين الطوسي.

تدرب وحل المسائل

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية: (مثال 1)

1) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$ ، $0° < \theta < 90°$

2) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{2}{3}$ ، $0° < \theta < 90°$

3) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ، $270° < \theta < 360°$

4) $\sec\theta$ ، إذا كان $\tan\theta = -1$ ، $270° < \theta < 360°$

5) $\tan\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -3$ ، $180° < \theta < 270°$

6) $\csc\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{1}{4}$ ، $180° < \theta < 270°$

7) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ، $90° < \theta < 180°$

8) $\cot\theta$ ، إذا كان $\sec\theta = -\frac{9}{2}$ ، $\sin\theta < 0$

بسّط كل عبارة مما يأتي: (مثال 2)

9) $\tan\theta\cos^2\theta$

10) $\csc^2\theta - \cot^2\theta$

11) $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$

12) $\sec\theta\tan^2\theta + \sec\theta$

13) $\sin\theta\,(1+\cot^2\theta)$

14) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sec\theta$

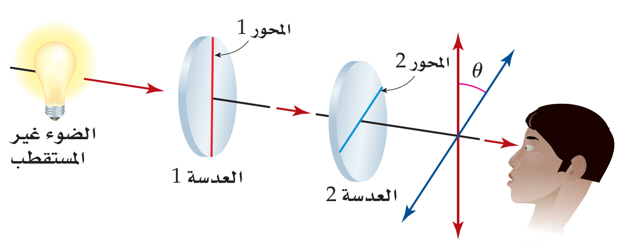
15) $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)}$

16) $(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

17) $2 - 2\sin^2\theta$

18) $\csc\theta - \cos\theta\,\cot\theta$

19) **بصريات:** عندما يمر الضوء من خلال عدسة مستقطبة للضوء، فإن شدة الضوء المار بهذه العدسة سيقل بمقدار النصف، ثم إذا مرّ الضوء بعدسة أخرى بحيث يكون محور هذه العدسة يصنع زاوية قياسها θ مع محور العدسة الأولى، فإن شدة الضوء تقل مرة أخرى. يمكننا إيجاد شدة الضوء باستعمال الصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ، حيث I_0 شدة الضوء القادمة من العدسة الأولى المستقطبة، I هي شدة الضوء الخارجة من العدسة الثانية، θ الزاوية بين محوري العدستين. (مثال 3)



a) بسّط الصيغة بدلالة $\cos\theta$

b) استعمل الصيغة المبسطة؛ لمعرفة شدة الضوء المار بالعدسة الثانية بدلالة شدة الضوء قبل المرور بها إذا كان محور العدسة الثانية يصنع زاوية قياسها $30°$ مع محور العدسة الأولى.

20) **الشمس:** ترتبط قدرة كل جسم على امتصاص الطاقة بعامل e يُسمّى قابلية الامتصاص للجسم. ويمكن حساب قابلية الامتصاص باستعمال العلاقة $e = \frac{W\sec\theta}{AS}$ ، حيث W معدل امتصاص جسم الإنسان للطاقة من الشمس، و S مقدار الطاقة المنبعثة من الشمس بالواط لكل متر مربّع، و A المساحة السطحية المعرّضة لأشعة الشمس، و θ الزاوية بين أشعة الشمس والخط العمودي على الجسم.

a) حل المعادلة بالنسبة لِـ W.

b) أوجد W إذا كانت $e = 0.80, \theta = 40°, A = 0.75$. $S = 1000\ W/m^2$ (قرِّب إلى أقرب جزء من مئة).

21) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تستعمل الحاسبة البيانية؛ لتحدد ما إذا كانت معادلة ما تمثِّل متطابقة مثلثية أم لا. هل تُمثِّل المعادلة: $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ متطابقة؟

a) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي.

θ	0°	30°	45°	60°
$\tan^2\theta - \sin^2\theta$				
$\tan^2\theta\sin^2\theta$				

b) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من طرفي المعادلة $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta\sin^2\theta$ كدالة، بيانيًّا.

c) **تحليليًّا:** "إذا كان التمثيلان البيانيان لدالتين متطابقين؛ فإن المعادلة تمثِّل متطابقة". هل التمثيلان البيانيان في الفرع **(b)** متطابقان؟

d) **تحليليًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لمعرفة ما إذا كانت المعادلة: $\sec^2 x - 1 = \sin^2 x\sec^2 x$ تمثِّل متطابقة أم لا. (تأكد أنّ الحاسبة البيانية بنظام الدرجات)

22) **التزلّج على الجليد:** يتزلّج شخص كتلته m في اتجاه أسفل هضبة ثلجية بزاوية قياسها θ درجة وبسرعة ثابتة. عند تطبيق قانون نيوتن في مثل هذه الحالة ينتج نظام المعادلات الآتي:

$F_n - mg\cos\theta = 0,\ mg\sin\theta - \mu_k F_n = 0$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و F_n القوة العمودية المؤثّرة في المتزلج، و μ_k معامل الاحتكاك. استعمل هذا النظام لتكتب μ_k كدالة في θ.

بسّط كلًّا مما يأتي:

23) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-1}{1+\sin(-\theta)}$

24) $\dfrac{\sec\theta\sin\theta+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{1+\sec\theta}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) **اكتشف الخطأ:** تحاور سعيد وأحمد حول معادلة في الواجب المنزلي، فقال سعيد: إنها متطابقة، حيث جرَّب 10 قيم للمتغير وحققت جميعها المعادلة فعلًا، بينما قال أحمد: إنها ليست متطابقة، حيث استطاع إيجاد قيمة للمتغير لا تتحقق عندها المعادلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

26) **تحدٍّ:** أوجد مثالًا مضادًّا يبيّن أنّ: $1-\sin x=\cos x$ ليست متطابقة.

27) **تبرير:** وضِّح كيف يمكن إعادة كتابة معادلة الاستضاءة الموجودة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس، على الصورة: $\cos\theta=\frac{ER^2}{I}$.

28) **اكتب:** بيّن كيف تستعمل نظرية فيثا غورس لإثبات صحة المتطابقة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

29) **برهان:** برهن أنّ $\tan(-a)=-\tan a$ تمثِّل متطابقة.

30) **مسألة مفتوحة:** اكتب عبارتين تكافئ كل منهما العبارة: $\tan\theta\sin\theta$

31) **تبرير:** بيِّن كيف يمكنك استعمال القسمة لإعادة كتابة المتطابقة $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ على الصورة: $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

32) **اكتشف الخطأ:** بسِّط كل من محمد وسامي المقدار $\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ كما يأتي. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

محمد

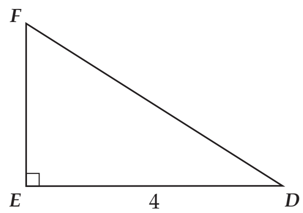
$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta}$$
$$=\tan^2\theta+1$$
$$=\sec^2\theta$$

سامي

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta}{1}$$
$$=\sin^2\theta$$

تدريب على اختبار

33) في الشكل أدناه، إذا كان $\cos D=0.8$ ، فما طول $\overline{DF}$؟



A 5

B 4

C 3.2

D 10

34) إذا كان $\sin x=m$ وَ $0<x<90°$ ، فما قيمة $\tan x$؟

A $\dfrac{1}{m^2}$

B $\dfrac{m\sqrt{1-m^2}}{1-m^2}$

C $\dfrac{1-m^2}{m}$

D $\dfrac{m}{1-m^2}$

1-2

إثبات صحة المتطابقات المثلثية
Verifying Trigonometric Identities

فيما سبق:
درست كيفية استعمال المتطابقات لإيجاد قيم العبارات المثلثية وتبسيطها.

والآن:
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل أحد طرفيها إلى الآخر.
- أثبت صحة المتطابقة المثلثية بتحويل كلا طرفيها إلى العبارة نفسها.

لماذا؟
عندما ركض عبدالله في مسار دائري نصف قطره R، لاحظ أن جسمه لا يكون عموديًّا على الأرض، بل يميل عن الخط العمودي بزاوية حادّة غير سالبة هي θ تُسمى زاوية الميل، ويمكن وصفها بالمعادلة: $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$ ، حيث g تسارع الجاذبية الأرضية، و v سرعة العداء.

كما توجد معادلات أخرى يمكن أن تصف زاوية الميل بدلالة دوال مثلثية أخرى، كالمعادلة: $\sin\theta = \frac{v^2}{gR}\cos\theta$ ، حيث $0 \le \theta \le 90°$.

هل تختلف هاتان المعادلتان كليًّا عن بعضهما بعضًا، أم أنهما صيغتان للعلاقة نفسها؟

تحويل أحد طرفي المتطابقة : يمكن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية بالإضافة إلى تعريف الدوال المثلثية لإثبات صحّة المتطابقات. وجدير بالذكر أن إثبات صحة المتطابقة المثلثية، يعني إثبات صحتها لقيم θ جميعها.

مفهوم أساسي **إثبات صحة متطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها**

بسِّط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان متساويين. وفي العادة يكون من الأسهل البدء بالطرف الأكثر تعقيدًا.

مثال 1 إثبات صحة المتطابقة من خلال تحويل أحد طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = 1+\cos\theta$

$\frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}$ الطرف الأيسر

$= \frac{\sin^2\theta}{1-\cos\theta}\cdot\frac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $1+\cos\theta$

$= \frac{\sin^2\theta(1+\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$ $(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = 1-\cos^2\theta$

$= \frac{\sin^2\theta\,(1+\cos\theta)}{\sin^2\theta}$ $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$

$= 1+\cos\theta$ ✓ اقسم كلًا من البسط والمقام على $\sin^2\theta$

= الطرف الأيمن

تحقق من فهمك

1) $\cot^2\theta - \cos^2\theta = \cot^2\theta\cos^2\theta$.

إرشادات للدراسة

إثبات صحة متطابقة
توجد حلول أخرى لإثبات أن الطرف الأيسر يساوي الطرف الأيمن في المثال رقم (1).

عند حل أسئلة الاختيار من متعدد في المتطابقات، لا بد من تحويل العبارة المعطاة حتى تطابق أحد البدائل.

مثال 2 على اختبار

أي مما يأتي يكافئ العبارة $\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta}$ ؟

A $\cot\theta$ C $\cot^2\theta$

B $\csc\theta$ D $\csc^2\theta$

اقرأ فقرة الاختبار

المطلوب إيجاد عبارة مكافئة للعبارة الأصلية. لاحظ أن جميع البدائل المعطاة تتضمّن إما $\cot\theta$ أو $\csc\theta$. لذا اعمل على أن تستبدل بالدوالّ دوالّ مثلثية أخرى.

حُلّ فقرة الاختبار

حوّل العبارة المعطاة حتى تطابق إحدى البدائل.

$$\frac{\cos\theta\csc\theta}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \qquad \text{اضرب}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اقلب المقام واضربه بالبسط}$$

$$= \cot\theta\cdot\cot\theta \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot^2\theta \qquad \text{اضرب}$$

الجواب هو C.

تحقق من فهمك

2) أي مما يأتي يكافئ العبارة $\tan^2\theta(\cot^2\theta - \cos^2\theta)$ ؟

A $\cot^2\theta$ C $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ D $\sin^2\theta$

إرشادات للاختبار

التأكد من الإجابات

كي تتحقق من صحة حلّك اختر قيمة لـ θ. وعوّضها في العبارة الجديدة، ثم قارنها بإجابتك عند تعويض قيمة θ في العبارة الأصلية.

تحويل طرفي المتطابقة: في بعض الأحيان يكون من الأسهل أن تُحوّل كل طرف في المتطابقة بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة. والاقتراحات الآتية ربما تكون مفيدة في إثبات صحة المتطابقات المثلثية:

مفهوم أساسي — اقتراحات لإثبات صحة المتطابقات

- بسِّط العبارة بالإفادة من المتطابقات المثلثية الأساسية.
- حلّل أو اضرب كلّا من البسط والمقام بالعبارة المثلثية نفسها.
- اكتب كل طرف بدلالة كل من الجيب، وجيب التمام فقط. ثم بسّط كل طرف قدر المستطاع.
- لا تنفذ أي عملية (جمع، طرح، ضرب، قسمة) على طرفي المعادلة التي يطلب إثبات أنها متطابقة؛ لأن خصائص المساواة لا تنطبق على المتطابقات كما تنطبق على المعادلات.

تنبيه!

تبسيط الطرفين
تشبه عملية إثبات صحة المتطابقة، عمليةَ التحقّق من حل المعادلة. ومن هنا يمكنك استعمال عملية التحقّق في تبسيط أحد الطرفين أو كليهما للحصول على العبارة ذاتها.

مثال 3 إثبات صحة المتطابقات من خلال تحويل كلا طرفيها

أثبت صحة المتطابقة $\cos\theta\cot\theta = \csc\theta - \sin\theta$

نبسِّط الطرف الأيسر

$$\cos\theta\cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اضرب}$$

نبسِّط الطرف الأيمن

$$\csc\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta} \qquad \text{اطرح}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

بما أن الطرفين يساويان المقدار نفسه، فالطرفان متساويان.

تحقق من فهمك

3) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \cot\theta\tan\theta$.

تدرب وحل المسائل

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta = 1$

2) $\cot\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \csc^2\theta$

3) $1 + \sec^2\theta\sin^2\theta = \sec^2\theta$

4) $\sin\theta\sec\theta\cot\theta = 1$

5) $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\csc\theta - \cot\theta)^2$

6) $\frac{1-2\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \tan\theta - \cot\theta$

7) $\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\csc\theta}$

8) $\cos\theta = \sin\theta\cot\theta$

9) $(\sin\theta - 1)(\tan\theta + \sec\theta) = -\cos\theta$

10) $\cos\theta\cos(-\theta) - \sin\theta\sin(-\theta) = 1$

11) **اختيار من متعدد:** أي عبارة مما يأتي تكافئ العبارة $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta}$؟ (مثال 2)

A $\sin^2\theta$ C $\cos^2\theta$

B $\tan^2\theta$ D $\csc^2\theta$

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

12) $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

14) $\sec\theta\csc\theta = \tan\theta + \cot\theta$

15) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2\sin^2\theta - 1}{\sin\theta - \cos\theta}$

16) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{2+\sec\theta\csc\theta}{\sec\theta\csc\theta}$

17) $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

18) $\csc\theta - 1 = \dfrac{\cot^2\theta}{\csc\theta + 1}$

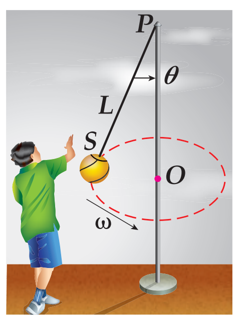
19) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

20) $\sin\theta\cos\theta\tan\theta + \cos^2\theta = 1$

21) $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\sin\theta$

22) $\csc^2\theta = \cot^2\theta + \sin\theta\csc\theta$

23) $\dfrac{\sec\theta - \csc\theta}{\csc\theta\sec\theta} = \sin\theta - \cos\theta$



24) **ألعاب:** يُبيّن الشكل المجاور إحدى الألعاب. فعندما تدور الكرة حول العمود بسرعة زاوية ω (الإزاحة الزاويّة مقسومة على الزمن المستغرق)، فإنها تكوّن مع الحبل شكلًا مخروطيًّا. إذا علمت أن العلاقة بين طول الحبل L والزاوية المحصورة بين الحبل والعمود θ تُعطى بالصيغة: $L = \dfrac{g\sec\theta}{\omega^2}$، حيث g تساوي الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\,m/s^2$، فهل الصيغة $L = \dfrac{g\tan\theta}{\omega^2\sin\theta}$ هي أيضًا تُمثّل العلاقة بين L, θ ؟ وضح إجابتك.

25) **جري:** مضمار سباق نصف قطره $16.7\,m$. إذا ركض أحد العدّائين في هذا المضمار، وكان جيب زاوية ميله θ يساوي $\frac{1}{4}$، فأوجد سرعة العدّاء.

إرشاد: أوجد $\cos\theta$ أولًا، ثم استعمل صيغة زاوية الميل الواردة في فقرة "لماذا؟".

بسّط كلًّا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج 1 أو −1 :

26) $\cot(-\theta)\tan(-\theta)$

27) $\sin\theta\csc(-\theta)$

28) $\sin^2(-\theta) + \cos^2(-\theta)$

29) $\sec(-\theta)\cos(-\theta)$

30) $\sec^2(-\theta) - \tan^2(-\theta)$

31) $\cot(-\theta)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

32) $\cos(-\theta)\sec\theta$

33) $\sin(-\theta)\csc\theta$

بسّط كلًّا مما يأتي إلى قيمة عددية، أو إلى دالة مثلثية أساسية:

34) $\dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\csc\theta}{\csc^2\theta}$

35) $\dfrac{1+\tan\theta}{1+\cot\theta}$

36) $\dfrac{\sec^2\theta - \tan^2\theta}{\cos^2 x + \sin^2 x}$

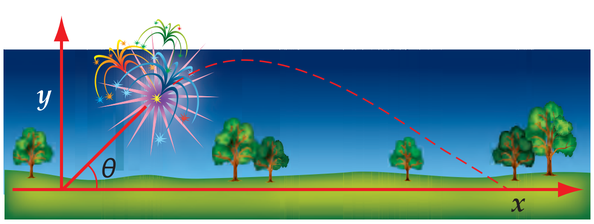
37) $\tan\theta\cos\theta$

38) $\cot\theta\tan\theta$

39) $\sec\theta\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

40) $(\sec^2\theta + \csc^2\theta) - (\tan^2\theta + \cot^2\theta)$

41) **فيزياء:** عند إطلاق الألعاب النارية من سطح الأرض، فإن ارتفاع الألعاب y والإزاحة الأفقية x ترتبطان بالعلاقة: $y = \dfrac{-gx^2}{2{v_0}^2\cos^2\theta} + \dfrac{x\sin\theta}{\cos\theta}$، حيث v_0 هي السرعة الابتدائية للمقذوفات، θ زاوية الإطلاق، g تسارع الجاذبية الأرضية . أعد كتابة هذه العلاقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$.



42) **إلكترونيات:** عند مرور تيار متردّد من خلال مقاومة R، فإن القدرة P بعد t من الثواني تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 2\pi f t$، حيث f التردد، I_0 أعلى قيمة للتيار.

a) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\cos^2 2\pi f t$.

b) اكتب صيغة للقدرة بدلالة $\csc^2 2\pi f t$.

43) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، ستكتشف طريقة حل معادلة مثل $1 = 2 \sin x$.

a) **جبريًا:** أعد كتابة المعادلة السابقة بحيث تكون $\sin x$ فقط في أحد الطرفين.

b) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا كدالة في المجال $0 \le x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه. ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

c) **بيانيًا:** مستعملًا الحاسبة البيانية، مثّل كلًّا من طرفي المعادلة التي أوجدتها في الفرع **(a)** بيانيًّا، كدالة في المجال $-2\pi < x < 2\pi$ وفي المستوى الإحداثي نفسه، ثم حدد جميع نقاط التقاطع بينهما، وأوجد قيم x بالراديان.

d) **لفظيًا:** خمِّن الصيغة العامة لحلول المعادلة. وضح إجابتك.

مسائل مهارات التفكير العليا

44) **اكتشف المختلف:** حدّد المعادلة المختلفة عن المعادلات الثلاث الأخرى. وضح إجابتك.

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$
$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = 2 \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

45) **تبرير:** بيّن لماذا تُعدّ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ متطابقة، ولكن $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos \theta}$ ليست متطابقة.

46) **اكتب سؤالًا:** يجد زميلك صعوبة في برهنة متطابقة مثلثية تتضمن قوى دوال مثلثية. اكتب سؤالًا قد يساعده في ذلك.

47) **اكتب:** اكتب موضحًا لماذا يُفضل إعادة كتابة المتطابقات المثلثية بدلالة الجيب $(\sin \theta)$ وجيب التمام $(\cos \theta)$ في معظم الأحيان.

48) **تحدٍّ:** إذا علمت أن α, β زاويتان متتامتان، فبرهن أن: $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$.

49) **تبرير:** برهن صحة متطابقتي فيثاغورس الثانية والثالثة.

تدريب على اختبار

50) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي لا يكافئ $\cos \theta$، حيث $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ؟

A $\frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$ **C** $\cot \theta \sin \theta$

B $\frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta}$ **D** $\tan \theta \csc \theta$

51) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** أثبت أن المعادلة التالية تمثّل متطابقة:
$\sin^3 \theta \cos \theta + \cos^3 \theta \sin \theta = \sin \theta \cos \theta$

1-3

المتطابقات المثلثية للمجموع وللفرق
Sum and Difference Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدوال المثلثية للزوايا.

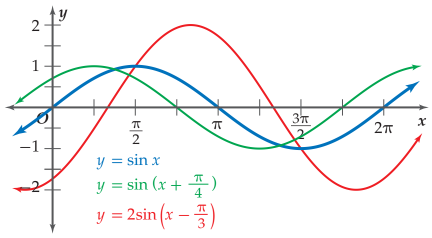
والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.
- أثبت صحة المتطابقات المثلثية باستعمال متطابقات المجموع والفرق

لماذا؟

هل استعملت مزود الإنترنت اللاسلكي وفقدت الإشارة بينما كنت تستعمله؟ تُسبِّب الموجات التي تمر من المكان نفسه، وفي الوقت نفسه تداخلًا.

ويحدث التداخل عندما تتلاقى موجتان فينتج عن ذلك موجة سعتها قد تكون أكبر من سعة كل من الموجتين المكونتين لها أو أصغر منهما.



متطابقات المجموع والفرق: لاحظ أن المعادلة الثانية الموضحة في الشكل أعلاه، تتضمّن جمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$, x. وفي الغالب يكون من المفيد استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما في إيجاد القيم المثلثية لزوايا محدّدة. فمثلًا يمكننا إيجاد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 15°$ من خلال إيجاد: $\sin (60° - 45°)$.

مفهوم أساسي **متطابقات المجموع والفرق**

متطابقات المجموع	متطابقات الفرق
• $\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$	• $\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$
• $\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$	• $\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$
• $\tan (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	• $\tan (A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

مثال 1 **إيجاد القيم المثلثية**

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

a) $\sin 105°$

بما أن مجموع الزاويتين $45°$ وَ $60°$ يساوي $105°$، وكلًّا منهما زاوية خاصة معلومة قيم الدوال المثلثية لها، لذا يمكن استعمالهما لإيجاد قيمة $\sin 105°$ ؛ وذلك باستعمال المتطابقة:

$$\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$\sin 105° = \sin (60° + 45°)$ — $105° = 60° + 45°$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$ — متطابقة المجموع

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — عوّض

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ — بسّط

b) $\cos (-120°)$

اختر زاويتين من الزوايا الخاصة، بحيث يكون الفرق بينهما $-120°$ ، ثم استعمل المتطابقة:

$$\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$\cos (-120°) = \cos (60° - 180°)$ — $-120° = 60° - 180°$

$= \cos 60° \cos 180° + \sin 60° \sin 180°$ — متطابقة الفرق

$= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0$ — عوّض

$= -\frac{1}{2}$ — بسّط

تحقق من فهمك

1A) $\sin 15°$ **1B)** $\cos (-15°)$

إرشادات للدراسة

كوّن قائمة: كوّن قائمة بقياسات الزوايا الناتجة عن جمع أو طرح زاويتين من الزوايا الخاصة بين $0°$, $360°$، حيث تستطيع إيجاد النسب المثلثية لكثير منها باستعمال متطابقات المجموع والفرق. استعمل هذه القائمة مرجعًا لك.

بإمكانك استعمال متطابقات مجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لحلّ مسائل وتطبيقات من واقع الحياة.

الربط مع الحياة

يسمى جهاز قياس شدة التيار الأميتر (Ammeter)، والأميتر كلمة مركبة من أمبير وهي وحدة قياس شدة التيار، وميتر وهو المقياس.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال متطابقات المجموع والفرق

كهرباء: يمر تيار كهربائي متردد في إحدى الدوائر الكهربائية، وتُعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 3 \sin 165t$ ، حيث قياس الزاوية بالدرجات.

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين من الزوايا الخاصة.

$c = 3 \sin 165°t$ — الصيغة الأصلية

$= 3 \sin (120°t + 45°t)$ — $120°t + 45°t = 165°t$

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

$c = 3 \sin (120°t + 45°t)$ — المعادلة بحسب الفرع a

$= 3 \sin (120° + 45°)$ — $t = 1$

$= 3[\sin 120° \cos 45° + \cos 120° \sin 45°]$ — متطابقة المجموع

$= 3\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ — عوّض مستعملًا الزاوية المرجعية $(\theta = 60°)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ — اضرب

$= \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ — بسّط

إذن شدة التيار بعد ثانية واحدة يساوي $\frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4}$ أمبير.

تحقق من فهمك:

إذا كانت شدة التيار c تُعطى بالصيغة $c = 2 \sin 285°t$ ، فأجب عما يأتي:

2A) أعد كتابة الصيغة، باستعمال الفرق بين زاويتين.

2B) استعمل المتطابقة المثلثية للفرق بين زاويتين ؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

إثبات صحة المتطابقات المثلثية: تستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما أيضًا في إثبات صحة المتطابقات.

مثال 3 — إثبات صحة المتطابقات المثلثية

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقتين الآتيتين:

a) $\cos (90° - \theta) = \sin \theta$

$\cos (90° - \theta)$ — الطرف الأيسر

$= \cos 90° \cos \theta + \sin 90° \sin \theta$ — متطابقة الفرق

$= 0 \cdot \cos \theta + 1 \cdot \sin \theta$ — عوّض

$= \sin \theta$ ✓ — بسّط

$=$ الطرف الأيمن

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ (b

$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$	الطرف الأيسر
$= \sin\theta\cos\frac{\pi}{2} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{2}$	متطابقة المجموع
$= \sin\theta \cdot 0 + \cos\theta \cdot 1$	عوّض
$= \cos\theta$ ✓	بسّط
= الطرف الأيمن	

تحقق من فهمك

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ (3A

$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ (3B

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي: (مثال 1)

1) $\cos 165°$
2) $\cos 105°$
3) $\cos 75°$
4) $\cos\frac{\pi}{12}$
5) $\sin 135°$
6) $\sin(-210°)$
7) $\cos 135°$
8) $\tan 195°$

9) **كهرباء:** يمر تيار كهربائي متردّد في دائرة كهربائية، وتعطى شدة هذا التيار c بالأمبير بعد t ثانية بالصيغة $c = 2\sin(120° t)$. (مثال 2)

a) أعد كتابة الصيغة، باستعمال مجموع زاويتين.

b) استعمل المتطابقة المثلثية لمجموع زاويتين من الزوايا الخاصة؛ لإيجاد القيمة الدقيقة لشدة التيار بعد ثانية واحدة.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 3)

10) $\sin(90° + \theta) = \cos\theta$

11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

12) $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

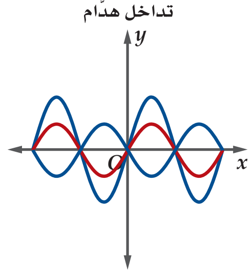
13) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

14) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

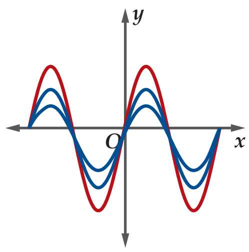
15) $\tan(\theta + 45°) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$

16) **إلكترونيات:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. عندما تتلاقى موجتان وتنتج موجة سعتها أكبر من سعة كل من الموجتين يكون التداخل بناءً، وبعكس ذلك يكون هدّامًا.

تداخل هدّام



تداخل بنّاء



إذا علمت أن كلًّا من الدالتين:
$y_1 = 10\sin(2t + 210°)$, $y_2 = 10\sin(2t + 30°)$.
تمثل موجة، فأوجد مجموع الدالتين، وفسّر معناه بالنسبة للموجتين.

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

17) $\tan 165°$
18) $\sec 1275°$
19) $\sin 735°$
20) $\tan\frac{23\pi}{12}$
21) $\csc\frac{5\pi}{12}$
22) $\cot\frac{113\pi}{12}$

23) بيّن أنه يمكن كتابة المقدار $\frac{\sin A + \tan\theta\cos A}{\cos A - \tan\theta\sin A}$ على الصورة $\tan(A + \theta)$، حيث A, θ زاويتان حادتان.

24) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سوف تثبت عدم صحة الفرضية: $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$.

a) **جدوليًا:** أكمل الجدول.

A	B	sin A	sin B	sin (A + B)	sin A + sin B
30°	90°				
45°	60°				
90°	30°				

b) **بيانيًا:** افترض أن B أقل من A بـ $15°$ دائمًا، واستعمل الحاسبة البيانية لتمثل كلًّا من: $y = \sin (x + x - 15°)$ ، $y = \sin x + \sin (x - 15°)$ على الشاشة نفسها .

c) **تحليليًا:** حدّد ما إذا كانت $\sin (A+B) = \sin A + \sin B$ متطابقة أم لا. فسّر إجابتك.

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

25) $\sin (A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{\sec A \sec B}$

26) $\cos (A+B) = \dfrac{1 - \tan A \tan B}{\sec A \sec B}$

27) $\sec (A-B) = \dfrac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$

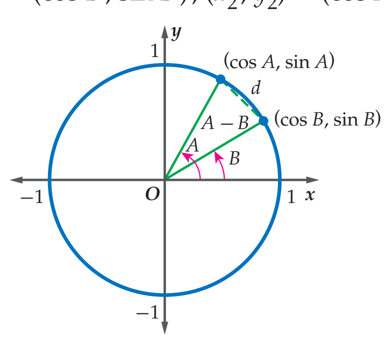
28) $\sin (A+B) \sin (A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

مسائل مهارات التفكير العليا

29) **تبرير:** بسّط العبارة الآتية، دون إيجاد مفكوك المجموع أو الفرق.
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right)$$

30) **تحدٍّ:** اشتق المتطابقة $\cot (A+B)$ بدلالة $\cot A , \cot B$.

31) **برهان:** الشكل أدناه، يُبيّن الزاويتين A, B في الوضع القياسي في دائرة الوحدة. استعمل قانون المسافة ؛ لإيجاد قيمة d ، حيث $(x_1 , y_1) = (\cos B , \sin B) , (x_2 , y_2) = (\cos A , \sin A)$



32) **اكتب:** استعمل المعلومات المعطاة في فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس وفي السؤال 16؛ لتشرح كيف تُستعمل المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما؛ لوصف التداخل في الأمواج اللاسلكية في شبكة الإنترنت. موضحًا الفرق بين التداخل البنّاء، والتداخل الهدّام.

33) **مسألة مفتوحة:** في النظرية الآتية: إذا كانت A, B, C زوايا في مثلث، فإن $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ اختر قيمًا لكلٍّ من A, B, C . وتحقق من صحة المساواة لكل القيم التي تختارها.

تدريب على اختبار

34) ما القيمة الدقيقة للعبارة:
$\sin (60° + \theta) \cos \theta - \cos (60° + \theta) \sin \theta$ ؟

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C $\frac{2}{\sqrt{3}}$

D $\sqrt{3}$

35) **سؤال ذو إجابة قصيرة:** إذا كان $\cos \theta + 0.3 = 0$ ، حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، فأوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$.

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 1-1 إلى 3-1

بسّط كل عبارة مما يأتي: (الدرس 1-1)

1) $\cot\theta \sec\theta$

2) $\dfrac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

3) $\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$

4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\csc\theta$

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي (الدرس 1-1)

5) $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{5}$، $0° < \theta < 90°$

6) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{1}{2}$، $270° < \theta < 360°$

7) $\tan\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $0° < \theta < 90°$

8) **اختيار من متعدد:** أي مما يأتي يكافئ العبارة: $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}$ ؟ (الدرس 1-1)

A) $\cos\theta$ C) $\tan\theta$

B) $\csc\theta$ D) $\sec\theta$

9) **مدينة ألعاب:** ركب سلمان لعبة الأحصنة الدوّارة في مدينة الألعاب. إذا كان طول قطر دائرة هذه اللعبة 16 m، وظل زاوية ميل سلمان تُعطى بالعلاقة $\tan\theta = \frac{v^2}{gR}$، حيث R نصف قطر المسار الدائري، v السرعة بالمتر لكل ثانية، g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي $9.8\ m/s^2$. (الدرس 1-2)

a) إذا كان جيب زاوية ميل سلمان يساوي $\frac{1}{5}$، فأوجد زاوية ميله.

b) أوجد سرعة دوران اللعبة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 1-2)

10) $\cot^2\theta + 1 = \dfrac{\cot\theta}{\cos\theta \cdot \sin\theta}$

11) $\dfrac{\cos\theta\csc\theta}{\cot\theta} = 1$

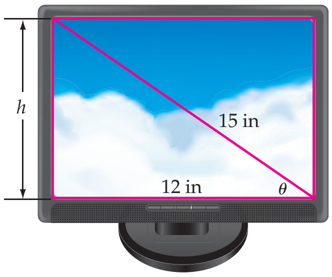
12) $\dfrac{\sin\theta\tan\theta}{1-\cos\theta} = (1+\cos\theta)\sec\theta$

13) $\tan\theta(1-\sin\theta) = \dfrac{\cos\theta\sin\theta}{1+\sin\theta}$

14) **حاسوب:** تُصنَّف شاشات الحاسوب عادة وفقًا لطول قطرها. استعمل الشكل أدناه للإجابة عما يأتي: (الدرس 1-1)

a) أوجد قيمة h.

b) بيّن أن $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$



أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (الدرس 1-2)

15) $\dfrac{\sin\theta \cdot \sec\theta}{\sec\theta - 1} = (\sec\theta + 1)\cot\theta$

16) $\sin^2\theta \cdot \tan^2\theta = \tan^2\theta - \sin^2\theta$

17) $\cot\theta(1-\cos\theta) = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin\theta}{1+\cos\theta}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي: (الدرس 1-3)

18) $\cos 105°$

19) $\sin(-135°)$

20) $\tan 15°$

21) $\cot 75°$

22) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\cos\frac{5\pi}{12}$ ؟ (الدرس 1-3)

A) $\sqrt{2}$ C) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

B) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

23) أثبت صحة المتطابقة الآتية: (الدرس 1-2)

$\cos 30°\cos\theta + \sin 30°\sin\theta = \sin 60°\cos\theta + \cos 60°\sin\theta$

1-4

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
Double-Angle and Half-Angle Identities

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما.

والآن:

- أجد قيم الجيب، وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.
- أجد قيم الجيب وجيب التمام باستعمال المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

لماذا؟

تستعمل النوافير مضخات تضخ الماء بزوايا محددة فتصنع أقواسًا. ويعتمد مسار الماء على سرعة الضخ وزاويته. فعندما يتم ضخ الماء في الهواء بسرعة v، وزاوية مع الخط الأفقي مقدارها θ، فإن المعادلتين الآتيتين تحددان المسافة الأفقية D، وأقصى ارتفاع H:

$D = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta, H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \theta$، حيث تمثل g تسارع الجاذبية الأرضية.

إذا علمت أن نسبة H إلى D تساعد في تحديد ارتفاع النافورة، وعرضها. فعبّر عن النسبة $\frac{H}{D}$ كدالة في θ.

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية: من المفيد أحيانًا أن يكون لديك متطابقات تساعدك على إيجاد قيمة دالة مثلثية لضعف الزاوية.

مفهوم أساسي — **المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية**

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$
$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

ستبرهن بعض هذه الصيغ في السؤال 30

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكنك استعمال متطابقة $\sin (A+B)$ في إيجاد جيب ضعف الزاوية θ، أو $\sin 2\theta$، كما يمكنك استعمال متطابقة $\cos (A+B)$ في إيجاد جيب تمام ضعف الزاوية θ، أو $\cos 2\theta$.

مثال 1 — المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$، $0° < \theta < 90°$.

حيث إن $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$، فإننا نجد $\cos \theta$ أولًا.

الخطوة 1: استعمل المتطابقة $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$؛ لإيجاد $\cos \theta$.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$

$\cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ $\sin \theta = \frac{2}{3}$

$\cos^2 \theta = \frac{5}{9}$ اطرح

$\cos \theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ خذ الجذر التربيعي للطرفين

وبما أن θ تقع في الربع الأول، فإن $\cos \theta$ موجب أي $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

الخطوة 2: أوجد $\sin 2\theta$.

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$= 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $\sin \theta = \frac{2}{3}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{5}}{9}$ اضرب

تحقق من فهمك

1) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 2\theta$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{1}{3}$، $90° < \theta < 180°$.

مثال 2 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3};\ 0° < \theta < 90°$:

a) $\cos 2\theta$

بما أن قيمة كل من $\cos \theta, \sin \theta$ معلومة من المثال 1، فإننا نستطيع أن نستعمل متطابقات جيب تمام ضعف الزاوية. وسوف نستعمل المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$.

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ متطابقة ضعف الزاوية

$= 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ $\sin\theta = \frac{2}{3}$

b) $\tan 2\theta$

الخطوة 1: أوجد $\tan\theta$ ؛ كي تستعمل متطابقة $\tan 2\theta$.

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ تعريف دالة الظل

$= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}$ $\sin\theta = \frac{2}{3}, \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$= \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ بالقسمة وإنطاق المقام

الخطوة 2: أوجد $\tan 2\theta$.

$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ متطابقة ضعف الزاوية

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$ $\tan\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$= \frac{2\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{25}{25}-\frac{20}{25}}$ ربّع المقام

$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}}$ بسّط

$= \frac{4\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{1} = 4\sqrt{5}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

تحقق من فهمك

أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ مما يأتي علمًا بأن $\cos\theta = -\frac{1}{3};\ 90° < \theta < 180°$:

2A) $\cos 2\theta$ **2B)** $\tan 2\theta$

إرشادات للدراسة

اشتقاق الصيغ

يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ في إيجاد جيب نصف الزاوية θ أو $\sin\frac{\theta}{2}$ ، كما يمكن استعمال المتطابقة $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ في إيجاد جيب تمام نصف الزاوية θ أو $\cos\frac{\theta}{2}$.

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية: من المفيد في بعض الأحيان، أن يكون لديك متطابقة ؛ لإيجاد قيمة دالة مثلثية لنصف الزاوية.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات الآتية صحيحة لقيم θ جميعها:

$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$ $\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ $\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

ستبرهن هذه الصيغ في السؤال 31

إرشادات للدراسة

اختيار الإشارة
أول خطوة في الحل، هي تحديد الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء للزاوية $\frac{\theta}{2}$. وعندها تستطيع أن تحدد الإشارة.

مثال 3 المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

a) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos \frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = -\frac{4}{5}$، θ تقع في الربع الثالث.

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ استعمل متطابقة فيثاغورس

$\cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ $\sin \theta = -\frac{4}{5}$

$\cos^2 \theta = 1 - \frac{16}{25}$ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ اطرح

$\cos \theta = \pm\frac{3}{5}$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ تقع في الربع الثالث، فإن $\cos \theta = -\frac{3}{5}$.

$\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ بسّط

$= \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$ بإنطاق المقام

بما أن θ تقع بين $180°$ وَ $270°$، فإن $\frac{\theta}{2}$ تقع بين $90°$ وَ $135°$. إذن، $\cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

b) دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cos 67.5°$.

$\cos 67.5° = \cos \frac{135°}{2}$ $67.5° = \frac{135°}{2}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos 135°}{2}}$ $\cos \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$، $67.5°$ في الربع الأول، فالقيمة موجبة

$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $\cos 135 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$ $1 = \frac{2}{2}$

$= \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{2}}$ اطرح

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}}$ $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ اضرب

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{4}}$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ بسّط

تحقق من فهمك

3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$، علمًا بأن $\sin \theta = \frac{2}{3}$، θ تقع في الربع الثاني.

مثال 4 من واقع الحياة التبسيط باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

نوافير: ارجع إلى المعلومات الموجودة في فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. وأوجد $\frac{H}{D}$.

$$\frac{H}{D} = \frac{\frac{v^2}{2g}\sin^2\theta}{\frac{v^2}{g}\sin 2\theta}$$ المعادلة الأصلية

$$= \frac{\frac{v^2\sin^2\theta}{2g}}{\frac{v^2\sin 2\theta}{g}}$$ بسّط كلًا من البسط والمقام

$$= \frac{v^2\sin^2\theta}{2g}\cdot\frac{g}{v^2\sin 2\theta}$$ $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2\sin 2\theta}$$ بسّط

$$= \frac{\sin^2\theta}{4\sin\theta\cos\theta}$$ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$ بسّط

$$= \frac{1}{4}\tan\theta$$ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

الربط مع الحياة

تستعمل النوافير عادة لأغراض تجميلية وعملية؛ حيث تلطف حرارة الجو، وقد تُزود بأضواء ملونة.

تحقق من فهمك

يعطى تسارع الجاذبية الأرضية عند مستوى سطح البحر (بالسنتمتر لكل ثانية تربيع) تقريبًا بالصيغة: $g = 978 + 5.17\sin^2 L - 0.014\sin L\cos L$، حيث L تمثل زاوية دائرة العرض

4A) بسِّط هذه العلاقة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

4B) استعمل الصيغة المبسطة التي أوجدتها في الفرع 4A، واحسب قيمة g عندما $L = 45°$.

تذكر أنك تستطيع استعمال المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما في إثبات صحة المتطابقات. كما يمكنك استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها في إثبات صحة المتطابقات أيضًا.

مثال 5 إثبات صحة المتطابقات

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1} = \frac{\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta}$.

$$\frac{\cot\theta - 1}{\cot\theta + 1}$$ الطرف الأيمن

$$= \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} - 1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + 1}$$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sin\theta$

$$= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta}$$ اضرب في $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = 1$

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta}$$ اضرب

$$= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta\sin\theta}$$ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$$= \frac{\cos 2\theta}{1 + \sin 2\theta} \checkmark$$ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta;\ 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

= الطرف الأيسر

تحقق من فهمك

5) $4\cos^2 x - \sin^2 2x = 4\cos^4 x$.

تدرب وحل المسائل

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$ ، إذا كان: (الأمثلة 1-3)

1) $\sin \theta = \frac{1}{4}; 0° < \theta < 90°$

2) $\sin \theta = \frac{4}{5}; 90° < \theta < 180°$

3) $\cos \theta = \frac{3}{5}; 270° < \theta < 360°$

4) $\tan \theta = -\frac{8}{15}; 90° < \theta < 180°$

5) $\sin \theta = \frac{2}{3}; 90° < \theta < 180°$

6) $\sin \theta = -\frac{15}{17}; \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

7) $\tan \theta = -2; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

8) $\sin \frac{\pi}{8}$

9) $\cos 15°$

10) $\sin 75°$

11) $\tan 165°$

12) $\tan \frac{5\pi}{12}$

13) **كرة قدم:** ركل لاعب كرة قدم كرة بزاوية قياسها 37° مع سطح الأرض، وبسرعة ابتدائية متجهة مقدارها 52 ft/s. إذا كانت المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. حيث g تسارع الجاذبية الأرضية ويساوي 32 ft/s^2 ، وَ v تُمثّل السرعة الابتدائية المتجهة. (مثال 4)

a) بسّط الصيغة مستعملًا المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

b) ما المسافة الأفقية d التي تقطعها الكرة باستعمال الصيغة المبسّطة؟

أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية: (مثال 5)

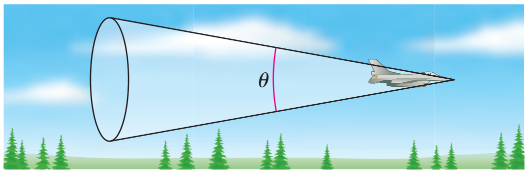
14) $\tan \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$

15) $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$

16) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot \theta - \tan \theta}$

17) $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{2}$

18) **عدد ماخ:** ترتبط زاوية رأس المخروط الذي تشكّله الأمواج الصوتية الناتجة عن اختراق الطائرة لحاجز الصوت بعدد ماخ M (نسبة إلى عالم الفيزياء النمساوي ماخ) وفق العلاقة $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{M}$.



a) عبِّر عن قيمة العدد M بدلالة دالة جيب التمام.

b) إذا كان $\cos \theta = \frac{17}{18}$ ، فاستعمل العبارة التي أوجدتها في **a** لحساب قيمة عدد ماخ.

19) **إلكترونيات:** يمر تيار متردد في دائرة كهربائية. إذا كانت شدة التيار الكهربائي I بالأمبير عند الزمن t ثانية هي $I_0 \sin t\theta$ ، فإن القدرة P المرتبطة بالمقاومة R تُعطى بالصيغة: $P = I_0{}^2 R \sin^2 t\theta$. عبّر عن القدرة بدلالة $\cos 2t\theta$.

20) **كرة قدم:** ركل حسن كرة قدم عدة مرات بسرعة متجهة ابتدائية مقدارها 95 ft/s . برهن أن المسافة الأفقية التي قطعتها الكرة متساوية لكل من الزاويتين $\theta = 45° - A$, $\theta = 45° + A$. استعمل الصيغة المعطاة في التمرين 13 .

أوجد القيم الدقيقة لكلٍّ من $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \tan 2\theta$ ، إذا كان:

21) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

22) $\sin \theta = \frac{1}{3}; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

23) $\tan \theta = -3; 90° < \theta < 180°$

24) $\sec \theta = -\frac{4}{3}; 90° < \theta < 180°$

25) $\cot \theta = \frac{3}{2}; 180° < \theta < 270°$

26) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة كيفية إيجاد متطابقة مثلثية اعتمادًا على التمثيل البياني للدوال المثلثية.

a) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $f(\theta) = 4\left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{4} - \cos \theta \sin \frac{\pi}{4}\right)$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

b) **تحليليًّا:** اعتمد على التمثيل البياني في **(a)** لتخمين دالة بدلالة الجيب تطابق $f(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

c) **بيانيًّا:** استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل الدالة $g(\theta) = \cos^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ بيانيًّا في الفترة $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$.

d) **تحليليًّا:** اعتمد على التمثيل البياني في **(c)** لتخمين دالة بدلالة جيب التمام تطابق $g(\theta)$. ثم أثبت صحتها جبريًّا.

مسائل مهارات التفكير العليا

27) **اكتشف الخطأ:** يحاول سعيد وسلمان حساب القيمة الدقيقة لِـ: $\sin 15°$. هل إجابة أيٍّ منهما صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

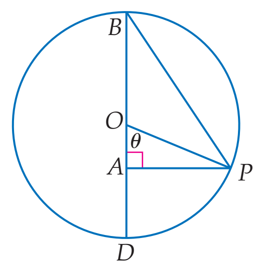
سعيد

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$
$$\sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \cos 45 \sin 30$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{4}}{4}$$

سلمان

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$
$$\sin \frac{30}{2} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}$$
$$= 0.5$$

28) **تحدٍّ:** استعمل دائرة الوحدة أدناه، والشكل المرسوم داخلها.
لتبرهن أن:
$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$.



29) **اكتب:** اكتب فقرة مختصرة تبين الشروط اللازم توافرها؛ كي تستعمل كلًّا من المتطابقات الثلاث لـ $\cos 2\theta$.

30) **برهان:** استعمل الصيغة $\sin(A + B)$ لاشتقاق صيغة لِـ $\sin 2\theta$ ، واستعمل الصيغة $\cos(A + B)$ لاشتقاق صيغة لـ $\cos 2\theta$.

31) **تبرير:** اشتقّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية من المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

32) **مسألة مفتوحة:** ضرب لاعب جولف كرة عدة مرات بسرعة ابتدائية مقدارها 115 ft/s، ولنفترض أن المسافة d التي قطعتها الكرة في كل مرة تُعطى بالصيغة $d = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$. فسِّر لماذا تكون المسافة العظمى عندما $\theta = 45°$. $(g = 32 \text{ ft/s}^2)$

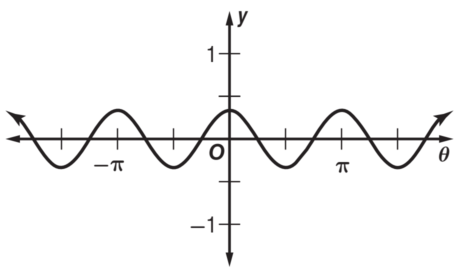
تدريب على اختبار

33) أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\tan \frac{\theta}{2}$ إذا كان $0 < \theta < 90°$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

B $\sqrt{3} - 2$ **D** $\sqrt{3}$

34) معادلة الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه هي :



A $y = 3 \cos 2\theta$ **C** $y = 3 \cos \frac{1}{2}\theta$

B $y = \frac{1}{3} \cos 2\theta$ **D** $y = \frac{1}{3} \cos \frac{1}{2}\theta$

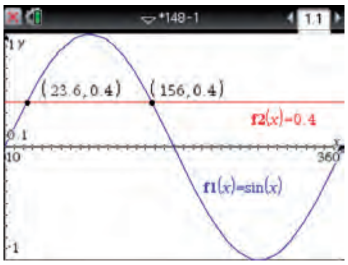
استكشاف 1-5

معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

التمثيل البياني للدالة المثلثية مكوّن من النقط التي إحداثياتها تحقّق الدالة. ولحل المعادلة المثلثية، تحتاج إلى إيجاد قيم المتغيّر التي تحقّق المعادلة جميعها. بإمكانك استعمال الحاسبة البيانية TI–nspire ؛ لحل المعادلات باستعمال التمثيل، وذلك بتمثيل كلٍّ من طرفي المعادلة بوصفها دالة على حدة، ثم إيجاد نقاط التقاطع.

نشاط 1 معادلة مثلثية بحلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة $\sin x = 0.4$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1: **تمثيل الدالتين بيانيًّا**

- اضبط الحاسبة على نظام الدرجات بالضغط على مفتاح on ثم 5: الإعدادات ومنها 2: إعدادات المستند ثم الزاوية: درجة
- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين $f1(x) = \sin x, f2(x) = 0.4$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on ⌂ trig sin x enter tab 0.4 enter

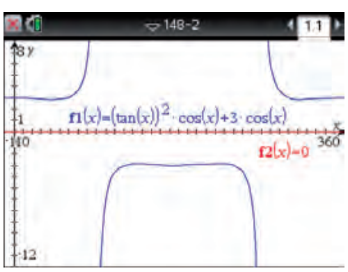
- حدد فترة الرسم المطلوبة بالضغط على menu واختر منها 4: تكبير/تصغير النافذة ثم 1: إعدادات النافذة وحدد القيمة الصغرى لـ x بـ $0°$ ، والقيمة العظمى لـ x بـ $360°$، كذلك حدد القيمة الصغرى لـ y بـ -1 ، والقيمة العظمى لـ y بـ 1

الخطوة 2: **تحديد الحلول**

استعمل ميزة **نقاط التقاطع** في إيجاد قيم تقريبية للحلول بالضغط على مفتاح menu واختر منها 6: تحليل الرسم البياني ثم اختر 4: نقاط التقاطع ، واضغط في أي نقطة على الشاشة وحرك المؤشر مرورًا بكل نقاط التقاطع في $0° \le x < 360°$ ، ستكون الحلول هي: $x \approx 23.6°$, $x \approx 156.0°$

نشاط 2 معادلة مثلثية ليس لها حلول حقيقية

استعمل الحاسبة البيانية لحلّ المعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ ، إذا كانت $0° \le x < 360°$.



الخطوة 1: **تمثيل الدالتين بيانيًّا**

- أعد كتابة المعادلة على شكل دالتين، $f1(x) = \tan^2 x \cos x + 3 \cos x, f2(x) = 0$.
- مثّل الدالتين بيانيًّا بالضغط على المفاتيح:

on ⌂ (trig tan x ^ 2 ▶ ▶ trig cos x + 3 trig cos x enter tab 0 enter

الخطوة 2: **تحديد الحلول**

هاتان الدّالتان لا تتقاطعان؛ لذلك ليس للمعادلة: $\tan^2 x \cos x + 3 \cos x = 0$ حلول حقيقية.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لحل المعادلات الآتية لقيم x جميعها الموضحة بجانب كلٍّ منها:

1) $\sin x = 0.7 ; 0° \le x < 360°$

2) $\tan x = \cos x ; 0° \le x < 360°$

3) $3 \cos x + 4 = 0.5; 0° \le x < 360°$

4) $0.25 \cos x = 3.4; -720° \le x < 720°$

5) $\sin 2x = \sin x ; 0° \le x < 360°$

6) $\sin 2x - 3 \sin x = 0; -360° \le x < 360°$

1-5

حل المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

فيما سبق:

درستُ المتطابقات المثلثية.

والآن:

- أحل المعادلات المثلثية.
- أميز الحلول الدخيلة للمعادلات المثلثية.

المفردات:

المعادلات المثلثية
trigonometric equations

لماذا؟

عند ركوبك عجلة دوارة قطرها 40 m، وتدور بمعدل 1.5 دورة كل دقيقة. فإنه يمكن تمثيل ارتفاع مقعدك فوق سطح الأرض، بالأمتار بعد t دقيقة بالمعادلة:

$h = 21 - 20 \cos 3\pi t$.

بعد كم دقيقة من بدء حركة العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31 m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

حل المعادلات المثلثية: درست نوعًا خاصًا من المعادلات المثلثية هو المتطابقات. والمتطابقات المثلثية معادلات تكون صحيحة للقيم جميعها التي يكون عندها المتغير معرّفًا. وفي هذا الدرس سوف تتعلم حل **المعادلات المثلثية** التي تكون صحيحة عند قيم محدّدة للمتغير.

إرشادات للدراسة

حل المعادلات المثلثية
حل معادلة مثلثية يعني إيجاد قيم المتغير جميعها التي تحقق المعادلة.

مثال 1 حل المعادلات على فترة معطاة

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

a) $\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 180°$.

$\sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = 0$ المعادلة الأصلية

$\cos \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right) = 0$ حلّل

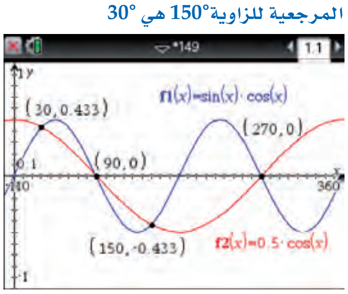
$\cos \theta = 0$ أو $\sin \theta - \frac{1}{2} = 0$ خاصية الضرب الصفري

$\theta = 90°$ أو $270°$ ، $\sin \theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 30°$ أو $150°$ الزاوية المرجعية للزاوية °150 هي °30

الحلول هي $30°, 90°, 150°$ فقط؛ لأن $0 \le \theta \le 180°$

التحقق يمكنك التحقق من صحة الحل بالتمثيل البياني لكلٍّ من: $y = \sin \theta \cos \theta,\ y = \frac{1}{2} \cos \theta$ على المستوى الإحداثي نفسه، ثم إيجاد نقط تقاطع التمثيلين البيانيين. بإمكانك أن تلاحظ أنه يوجد عدد لا نهائي من هذه النقط، ولكننا نهتم بالنقط الموجودة في الفترة بين °0 و °180 فقط.



b) $2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ ، إذا كان $0 \le \theta \le 2\pi$

$2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta - 2 = 0$ المعادلة الأصلية

$(\sin \theta - 2)(2 \sin \theta + 1) = 0$ حلّل

$2 \sin \theta + 1 = 0$ أو $\sin \theta - 2 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$2 \sin \theta = -1$ ، $\sin \theta = 2$

$\sin \theta = -\frac{1}{2}$

$\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

$\sin \theta = 2$ ليس لها حل؛ لأن كل قيمة من قيم $\sin \theta$ يجب أن تقع في الفترة $[-1, 1]$

لذلك يكون للمعادلة حلّان هما : $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

التحقق:

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 &= 0 \\ 2\sin^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 2\left(\frac{1}{4}\right) - 3\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 &\stackrel{?}{=} 0 \\ 0 &= 0 \ \checkmark \end{aligned}$$

تحقق من فهمك

1A) حُلّ المعادلة $\cos x \sin x = 3\cos x$ ، إذا كانت $0 \le \theta \le 2\pi$.

1B) حُلّ المعادلة $4\sin^2\theta + 4\cos^2\theta - 8\ \sin\theta\cos\theta = 0$ إذا كانت $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

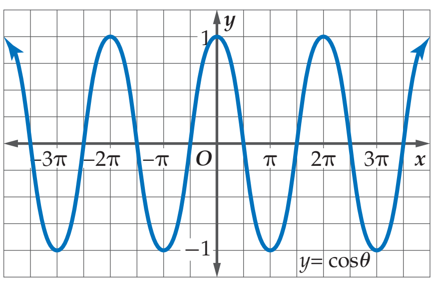
تحل المعادلات المثلثية عادة، لقيم المتغيّر في الفترة $[0\ ,2\pi]$ بالراديان، أو $[0°\ , 360°]$ بالدرجات. كما توجد حلول أخرى تقع خارج الفترات المحددة. لذلك ، فالحلول تختلف باختلاف الفترات.

مثال 2 معادلة مثلثية لها عدد لا نهائي من الحلول

حُلّ المعادلة $\cos\theta + 1 = 0$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

$$\begin{aligned} \cos\theta + 1 &= 0 \\ \cos\theta &= -1 \end{aligned}$$

استعن بالتمثيل البياني لمنحنى $y = \cos\theta$ ؛ لإيجاد حلول المعادلة $\cos\theta = -1$.



الحلول هي $\ldots\ \pi, 3\pi, 5\pi,$ ، وكذلك $\ldots, -5\pi, -3\pi, -\pi$ ، والحل الوحيد في الفترة من 0 إلى 2π هو π . طول الدورة لدالة جيب التمام هو 2π. لذلك، يمكن كتابة الحلول على الشكل $\pi + 2k\pi$ ؛ حيث k أيّ عدد صحيح.

إرشادات للدراسة

التعبير عن الحلول بوصفها مضاعفات

العبارة $\pi + 2k\pi$ هي π مضافًا لها مضاعفات 2π، ولذلك، ليس من الضروري سرد جميع الحلول.

تحقق من فهمك

2A) حُلّ المعادلة $4\sin x = 2\sin x + \sqrt{2}$

2B) حُلّ المعادلة $2\sin\theta = -1$ لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالراديان.

يمكن استعمال المعادلات المثلثية في حلّ مسائل من واقع الحياة.

مثال 3 من واقع الحياة حل معادلات مثلثية

مدينة ألعاب: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية هذا الدرس، بعد كم دقيقة من بدء دوران العجلة يكون مقعدك على ارتفاع 31m عن سطح الأرض للمرة الأولى؟

$h = 21 - 20\cos 3\pi t$	المعادلة الأصلية
$31 = 21 - 20\cos 3\pi t$	عوّض 31 بدلًا من h
$10 = -20\cos 3\pi t$	اطرح 21 من كلا الطرفين.
$-\frac{1}{2} = \cos 3\pi t$	اقسم كلا الطرفين على -20
$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 3\pi t$	خذ معكوس جيب التمام

ومن قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة نعلم أن:

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$، إذن:

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ أو $\frac{4\pi}{3} + 2\pi k = 3\pi t$ ‏ k أي عدد صحيح أكبر من أو يساوي الصفر.

$\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ $\frac{4}{9} + \frac{2}{3}k = t$ ‏ اقسم كلا الطرفين على 3π

إن أقل قيمة لـ t نحصل عليها عندما تكون $k = 0$ في المساواة $\frac{2}{9} + \frac{2}{3}k = t$.

لذلك، $t = \frac{2}{9}$ وهذا يعني أن ارتفاع مقعدك يكون 31 مترًا للمرة الأولى بعد $\frac{2}{9}$ دقيقة.

تحقق من فهمك

3) كم من الوقت تحتاج من بداية دوران العجلة، ليكون ارتفاع مقعدك 41 مترًا فوق سطح الأرض للمرة الأولى؟

الحلول الدخيلة: بعض المعادلات المثلثية ليس لها حل. فعلى سبيل المثال، المعادلة $\cos\theta = 4$ ليس لها حل؛ لأن قيم $\cos\theta$ جميعها تقع في الفترة $[-1, 1]$. كما أن بعض المعادلات المثلثية تعطي حلولًا لا تحقق المعادلة الأصلية، وتسمى مثل هذه الحلول حلولًا دخيلة.

إذا لم تتمكّن من حل معادلة بالتحليل إلى العوامل، فحاول إعادة كتابة العبارات التي تتضمنها باستعمال المتطابقات المثلثية. وقد يقودنا استعمال المتطابقات وبعض العمليات الجبرية، كالتربيع مثلًا إلى حلول دخيلة. لذا، من الضروري التحقق من حلولك باستعمال المعادلات الأصلية.

مثال 4 حل معادلات مثلثية مع وجود حلول دخيلة

حُلّ المعادلة: $\sin\theta = 1 + \cos\theta$ إذا كان $0° \le \theta < 360°$

$\sin\theta = 1 + \cos\theta$ ‏ المعادلة الأصلية

$\sin^2\theta = (1 + \cos\theta)^2$ ‏ ربع

$1 - \cos^2\theta = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta$ ‏ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$0 = 2\cos\theta + 2\cos^2\theta$ ‏ بطرح 1 من الطرفين، وإضافة $\cos^2\theta$ لكلا الطرفين

$0 = 2\cos\theta(1 + \cos\theta)$ ‏ حلّل

$1 + \cos\theta = 0$ أو $2\cos\theta = 0$ ‏ خاصية الضرب الصفري

$\cos\theta = -1$ أو $\cos\theta = 0$

$\theta = 180°$ أو $\theta = 90°, 270°$

التحقق:

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 180° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 180°$$
$$0 \stackrel{?}{=} 1 + (-1)$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 90° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 90°$$
$$1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$1 = 1 \ \checkmark$$

$$\sin\theta = 1 + \cos\theta$$
$$\sin 270° \stackrel{?}{=} 1 + \cos 270°$$
$$-1 \stackrel{?}{=} 1 + 0$$
$$-1 \ne 1 \ \times$$

إذن $270°$ حلًّا دخيلًا

إذن للمعادلة حلان هما $90°, 180°$.

تحقق من فهمك

4) $\cos^2\theta + 3 = 4 - \sin^2\theta$

مثال 5 حل المعادلات المثلثية باستعمال متطابقات

حُلّ المعادلة $2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات.

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta = -1$ المعادلة الأصلية

$2(1+\tan^2\theta) - \tan^4\theta = -1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$2 + 2\tan^2\theta - \tan^4\theta = -1$ خاصية التوزيع

$\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$(\tan^2\theta - 3)(\tan^2\theta + 1) = 0$ حلّل

$\tan^2\theta + 1 = 0$ أو $\tan^2\theta - 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

أولًا: $\tan^2\theta + 1 = 0$

$\tan^2\theta = -1$

لا يوجد لهذا الجزء حلول؛ لأن $\tan^2\theta$ لا يمكن أن يكون سالبًا.

ثانيًا: $\tan^2\theta - 3 = 0$

$\tan^2\theta = 3$

$\tan^2\theta = \pm\sqrt{3}$

لذا، تكون حلول هذا الجزء هي : $\theta = 60° + 180°k, \theta = 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح.

وتكون حلول المعادلة الأصلية هي $60° + 180°k, 120° + 180°k$.

التحقق: $\theta = 60° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(60° + 180°k) - \tan^4(60° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

$\theta \stackrel{?}{=} 120° + 180°k$؛ حيث k هو أي عدد صحيح

$2\sec^2\theta - \tan^4\theta \stackrel{?}{=} -1$

$2\sec^2(120° + 180°k) - \tan^4(120° + 180°k) \stackrel{?}{=} -1$

$8 - 9 = -1$ ✓

تحقق من فهمك

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها ، إذا كان قياس θ بالدرجات:

5A) $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta = 0$

5B) $\frac{\cos\theta}{\cot\theta} + 2\sin^2\theta = 0$

إرشادات حل المسألة

البحث عن نمط

ابحث عن أنماط في حلولك. ابحث عن زوج من الحلول الفرق بينهما هو π تمامًا. واكتب حلولك بأبسط طريقة.

تنبيه!

دالة الظل

تذكر أن طول الدورة لدالة الظل هو π، وهذا يبرر كتابة الحلول في الصورة:

$\theta = 60° + 180°k$

$\theta = 120° + 180°k$

تدرب وحل المسائل

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها : (مثال 1)

1) $\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

2) $2\cos^2\theta + \cos\theta = 1\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

3) $-2\sin^2\theta = 7 - 15\sin\theta\ ;\ 0° \le \theta \le 360°$

4) $\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\ ;\ 0° \le \theta \le 240°$

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالراديان: (مثال 2)

5) $4\sin^2\theta - 1 = 0$

6) $2\cos^2\theta = 1$

7) $\sin\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 0$

8) $2\cos^2\theta + 4\cos\theta = -2$

حل كل معادلة مما يأتي لقيم θ جميعها إذا كان قياس θ بالدرجات: (مثال 2)

9) $\cos 2\theta - \sin^2\theta + 2 = 0$

10) $\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

11) $2\sin^2\theta - 1 = 0$

12) $\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta = 0$

13) **الليل والنهار:** إذا كان عدد ساعات النهار في إحدى المدن هو d، ويمكن تمثيلها بالمعادلة $d = 3\sin\frac{2\pi}{365}t + 12$، حيث t عدد الأيام بعد 21 مارس، فأجب عما يأتي: (مثال 3)

a) في أي يوم سيكون عدد ساعات النهار في المدينة $10\frac{1}{2}$h تمامًا؟

b) باستعمال النتيجة في الفرع a، ما أيام السنة التي يكون فيها عدد ساعات النهار $10\frac{1}{2}$ساعات على الأقل إذا علمت أن أطول نهار في السنة يحدث تقريبًا يوم 22 يونيو؟ فسِّر إجابتك.

حل كل معادلة مما يأتي: (المثالان 4, 5)

14) $\sin^2 2\theta + \cos^2\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

15) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

16) $\tan\theta = 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

17) $\cos^2\theta = \frac{1}{4};\ 0° \le \theta \le 360°$

18) $2\sin^2\theta = 1;\ 90° < \theta < 270°$

19) $\sin 2\theta - \cos\theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

20) $4\sin^2\theta - 1 = 0;\ 180° < \theta < 360°$

21) $\tan\theta - \sin\theta = 0$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

22) $4\sin^2\theta = 4\sin\theta - 1$ لجميع قيم θ إذا كان قياس θ بالدرجات.

23) **أنهار:** تمثل الدالة: $y = 3\sin\left[\frac{\pi}{6}(x-4)\right] + 8$، عمق نهر خلال أحد الأيام ؛ حيث $x = 0, 1, 2, \ldots, 24$، 0 تدل على الساعة الثانية عشرة عند منتصف الليل، 13 تدل على الساعة الواحدة بعد الظهر ، وهكذا....

a) ما أقصى عمق للنهر في ذلك اليوم؟

b) في أي وقت نحصل على أقصى عمق؟

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالراديان:

24) $(\cos\theta)(\sin 2\theta) - 2\sin\theta + 2 = 0$

25) $2\sin^2\theta + \left(\sqrt{2} - 1\right)\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

26) $2\sin\theta = \sin 2\theta$

حل المعادلتين الآتيتين، لقيم θ جميعها، إذا كان قياس θ بالدرجات:

27) $\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$

28) $1 - \sin^2\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

29) **ألماس:** حسب قانون سنيل (snell's law) $n_1 \sin i = n_2 \sin r$، حيث n_1 معامل الانكسار للضوء في الوسط الذي يخرج منه الضوء، و n_2 معامل الانكسار للوسط الذي يدخل فيه الضوء،و i قياس زاوية السقوط،و r قياس زاوية الانكسار.

a) إذا كان معامل الانكسار للماس 2.42، ومعامل الانكسار للهواء 1 ، وقياس زاوية سقوط الضوء على حجر ألماس هو °35، فما قياس زاوية الانكسار؟

b) اشرح كيف يستطيع بائع المجوهرات استعمال قانون سنيل؛ لمعرفة إذا كان هذا ألماسًا حقيقيًا ونقيًا أم لا.

مسائل مهارات التفكير العليا

30) **اكتشف الخطأ:** حلت كل من هلا وليلى المعادلة $2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$ ، $0° \le \theta \le 360°$. أيّ منهما كانت إجابتها صحيحة؟ برِّر إجابتك.

هلا	ليلى
$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$	$2\sin\theta\cos\theta = \sin\theta$
$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$	$-\sin\theta = -\sin\theta$
$2\cos\theta = 1$	$2\cos\theta = 0$
$\cos\theta = \frac{1}{2}$	$\cos\theta = 0$
$\theta = 60°, 300°$	$\theta = 90°, 270°$

31) **تحدٍّ:** حل المتباينة $\sin 2x < \sin x$ ، $0 \le x \le 2\pi$ بدون استعمال الحاسبة.

32) **اكتب:** حدّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين حل المعادلات المثلثية، والمعادلات الخطية والتربيعية. ما الطرق المتشابهة؟ وما الطرق المختلفة؟ وما عدد الحلول المتوقعة؟

33) **تبرير:** اشرح سبب وجود عدد لانهائي من الحلول للمعادلات المثلثية.

34) **مسألة مفتوحة:** اكتب مثالًا على معادلة مثلثية لها حلّان فقط، بحيث تكون $0° \le \theta \le 360°$.

35) **تحدٍّ:** هل للمعادلتين $\cot^2 x + 1 = 2$, $\csc x = \sqrt{2}$ الحلول نفسها في الربع الأول؟ برر إجابتك.

تدريب على اختبار

36) أي مما يأتي ليس حلًّا للمعادلة $\sin\theta + \cos\theta\tan^2\theta = 0$ ؟

A $\frac{5\pi}{2}$ **B** $\frac{7\pi}{4}$ **C** 2π **D** $\frac{3\pi}{4}$

37) ماحَلّ المعادلة $\csc x = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ ، حيث $0° < x < 360°$؟

A $30°$ أو $150°$ **C** $210°$ أو $330°$

B $60°$ أو $120°$ **D** $240°$ أو $300°$

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

المفاهيم الأساسية

المتطابقات المثلثية (الدروس 5–1 ,2–1 ,1–1)

- تصف المتطابقات المثلثية العلاقة بين الدوال المثلثية.
- يمكن استعمال المتطابقات المثلثية في تبسيط العبارات المثلثية، وحل المعادلات المثلثية.

المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الدرس 3–1)

- لجميع قيم A, B:

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الدرس 4–1)

- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

- المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}},\ \cos\theta \neq -1$$

المفردات

- المتطابقة (ص. 10)
- المتطابقة المثلثية (ص. 10)
- المتطابقات النسبية (ص. 10)
- متطابقات المقلوب (ص. 10)
- متطابقات فيثاغورس (ص. 10)
- متطابقات الزاويتين المتتامتين (ص. 10)
- متطابقات الدوال الزوجية والدوال الفردية (ص. 10)
- المعادلات المثلثية (ص. 32)

اختبر مفرداتك

اكتب المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) يمكن استعمال ________ في إيجاد جيب أو جيب تمام الزاوية $75°$ إذا علم الجيب والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$ و $15°$.

2) المتطابقة $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ هي مثال على ________ .

3) ________ هي معادلة تحتوي على دوال مثلثية صحيحة للقيم جميعها التي تجعل كل طرف في المعادلة معرفًا.

4) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\sin 60°$ باستعمال الزاوية $30°$.

5) تكون ________ صحيحة لقيم معينة للمتغيرات.

6) يمكن استعمال ________ في إيجاد $\cos 22\frac{1}{2}°$.

7) المتطابقتان $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ مثالان على ________ .

8) يمكن استعمال ________ في إيجاد كل من $\sin 120°$, $\cos 120°$ إذا عُلم الجيب، والجيب تمام لكل من الزاويتين $90°$, $30°$.

9) $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي مثال على ________ .

مراجعة الدروس

1-1 المتطابقات المثلثية (الصفحات 14 - 10)

أوجد القيمة الدقيقة لكل من النسب المثلثية الآتية:

10) $\sin\theta$ ، إذا كان $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$، $270° < \theta < 360°$

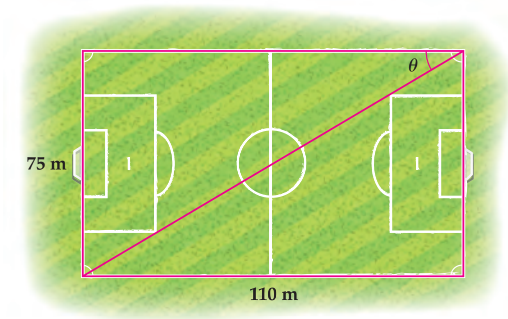
11) $\sec\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$، $90° < \theta < 180°$

12) $\tan\theta$ ، إذا كان $\cot\theta = 2$، $0° < \theta < 90°$

13) $\cos\theta$ ، إذا كان $\sin\theta = -\frac{3}{5}$، $180° < \theta < 270°$

14) $\csc\theta$، إذا كان $\cot\theta = -\frac{4}{5}$، $270° < \theta < 360°$

15) **كرة قدم:** إذا كان بُعدا ملعب كرة القدم هما: 75 m, 110m كما في الشكل أدناه، فأوجد جيب الزاوية θ.



بسّط كل عبارة مما يأتي :

16) $1 - \tan\theta \sin\theta \cos\theta$

17) $\tan\theta \csc\theta$

18) $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$

19) $\cos\theta\,(1 + \tan^2\theta)$

مثال 1

أوجد $\sin\theta$ إذا كان $\cos\theta = \frac{3}{4}$ ، $0° < \theta < 90°$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ متطابقة فيثاغورس

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ اطرح $\cos^2\theta$ من كلا الطرفين.

$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$ عوّض $\frac{3}{4}$ بدلًا عن $\cos\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \frac{9}{16}$ ربع $\frac{3}{4}$

$\sin^2\theta = \frac{7}{16}$ اطرح

$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$ خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

بما أن θ في الربع الأول، فإن $\sin\theta$ موجبة.

إذن ، $\sin\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

مثال 2

بسّط العبارة $\cos\theta \sec\theta \cot\theta$.

$$\cos\theta \sec\theta \cot\theta = \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$

$$= \cot\theta$$

دليل الدراسة والمراجعة

1-2 إثبات صحة المتطابقات المثلثية (الصفحات 19 - 15)

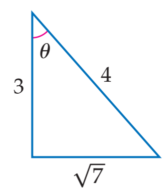
أثبت صحة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

20) $\tan \theta \cos \theta + \cot \theta \sin \theta = \sin \theta + \cos \theta$

21) $\frac{\cos \theta}{\cot \theta} + \frac{\sin \theta}{\tan \theta} = \sin \theta + \cos \theta$

22) $\sec^2 \theta - 1 = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}$

23) **هندسة:** المثلث المجاور قائم الزاوية. استعمل أطواله المعطاة لتتحقّق من أن $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$



مثال 3

أثبت صحة المتطابقة $\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \cot \theta + \csc \theta$.

$\frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta}$ الطرف الأيسر

$= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta}$ بسّط

$= \cot \theta + \csc \theta$ ✓ بسّط

= الطرف الأيمن

1-3 المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما (الصفحات 23 - 20)

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

24) $\cos(-135°)$

25) $\cos 15°$

26) $\sin 210°$

27) $\sin 105°$

28) $\tan 75°$

29) $\cos 105°$

أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية:

30) $\sin(\theta + 90) = \cos \theta$

31) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$

32) $\tan(\theta - \pi) = \tan \theta$

مثال 4

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin 75°$.

دون استعمال الآلة الحاسبة، استعمل المتطابقة $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$.

$$\sin 75° = \sin(30° + 45°)$$

$$= \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45°$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

1-4 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها (الصفحات 25 - 30)

أوجد القيم الدقيقة لكل من: لـ $\sin 2\theta, \cos 2\theta, \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}$، إذا علمت أن:

33) $\cos \theta = \frac{4}{5}; 0° < \theta < 90°$

34) $\sin \theta = -\frac{1}{4}; 180° < \theta < 270°$

35) $\cos \theta = -\frac{2}{3}; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

36) **ملاعب:** ملعب على شكل مربع طول ضلعه 90 ft.

a) أوجد طول قطر الملعب.

b) اكتب النسبة $\sin 45°$ باستعمال أطوال أضلاع الملعب.

c) استعمل الصيغة $\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$؛ لبرهنة صحة النسبة التي كتبتها في الفرع (b) .

مثال 5

أوجد القيمة الدقيقة لِـ $\sin \frac{\theta}{2}$، إذا كان $\cos \theta = -\frac{3}{5}$، وتقع θ في الربع الثاني.

$\sin \frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$ متطابقة نصف الزاوية

$= \pm\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$ $\cos \theta = -\frac{3}{5}$

$= \pm\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}$ اطرح

$= \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ اقسم، بسّط، وأنطق المقام

بما أن θ تقع في الربع الثاني، فإن $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

1-5 حل المعادلات المثلثية (الصفحات 32 - 37)

حل كل معادلة مما يأتي، لقيم θ جميعها الموضحة بجانب كل منها:

37) $2\cos\theta - 1 = 0; 0° \leq \theta < 360°$

38) $4\cos^2\theta - 1 = 0; 0 \leq \theta < 2\pi$

39) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0; 0° \leq \theta < 360°$

40) $\sin^2\theta = 2\sin\theta + 3; 0° \leq \theta < 360°$

41) $4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 = 0; 0 \leq \theta < 2\pi$

مثال 6

حل المعادلة $\sin 2\theta - \cos\theta = 0$، إذا كان $0 \leq \theta < 2\pi$.

$\sin 2\theta - \cos\theta = 0$ المعادلة الأصلية

$2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ متطابقة ضعف الزاوية

$\cos\theta(2\sin\theta - 1) = 0$ حلّل

$2\sin\theta - 1 = 0$ أو $\cos\theta = 0$

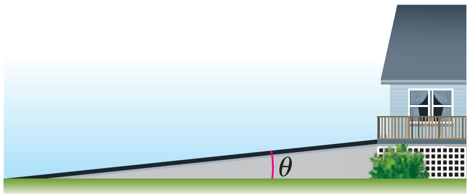
$\sin\theta = \frac{1}{2}$ ، $\theta = \frac{\pi}{2}$ أو $\frac{3\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ أو $\frac{5\pi}{6}$

دليل الدراسة و المراجعة

تطبيقات ومسائل

42) إنشاءات: يبين الشكل أدناه ممرًّا مائلًا لمنزل . (الدرس 1-1)

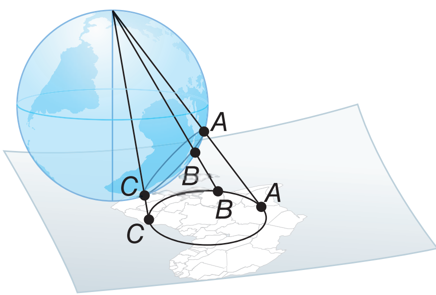


أوجد $\sin\theta, \cos\theta$ إذا كان $\tan\theta = \frac{1}{12}$.

43) ضوء: تعطى شدة الضوء الخارج من عدستين متتاليتين بالصيغة $I = I_0 - \frac{I_0}{\csc^2\theta}$ ؛ حيث I_0 شدة الضوء الخارج من العدسة الأولى ، θ الزاوية بين محوري العدستين. اكتب الصيغة السابقة بحيث لا تظهر فيها نسب مثلثية سوى $\tan\theta$. (الدرس 1-1)

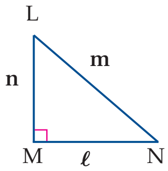
44) خرائط: يستعمل إسقاط الستيروجرافيك (Stereographic Projection) لتحويل مسار ثلاثي الأبعاد على الكرة الأرضية إلى مسار في المستوى (على الخريطة)، بحيث ترتبط النقاط على الكرة الأرضية بالنقاط المقابلة لها على الخريطة بالمعادلة $r = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$.

أثبت أن $r = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$. (الدرس 1-2)



45) موجات: يُسمى تداخل موجتين بنّاءً إذا كانت سعة الموجة الناتجة أكبر من سعة مجموع الموجتين المتداخلتين. هل يكون تداخل الموجتين الآتيتين معادلتاهما بنّاء؟
$y_1 = 20\sin(3t + 225°)$ ، $y_2 = 20\sin(3t + 45°)$
(الدرس 1-3)

46) هندسة: استعمل المثلث LMN أدناه لإثبات أن $\sin 2N = \frac{2n\ell}{m^2}$.
(الدرس 1-4)



أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثّل متطابقة: (الدرس 1-4)

47) $\frac{\sin 2\theta}{2\sin^2\theta} = \cot\theta$

48) $1 + \cos 2\theta = \frac{2}{1+\tan^2\theta}$

49) مقذوفات: إذا قُذفت كرة بسرعة متجهة مقدارها v وزاوية قياسها θ ، فقطعت مسافة أفقية مقدارها d ft، ويعطى زمن تحليقها t بالصيغة $t = \frac{d}{v\cos\theta}$ ، فأوجد الزاوية التي قُذفت بها الكرة ، إذا علمت أن $v = 50$ft/s، وكانت المسافة الأفقية 100ft ، وزمن التحليق 4 ثوانٍ.
(الدرس 1-5)

اختبار الوحدة

1) **اختيار من متعدد:** أي من العبارات الآتية تكافئ $\sin\theta + \cos\theta \cot\theta$؟

A $\cot\theta$ **C** $\sec\theta$

B $\tan\theta$ **D** $\csc\theta$

أثبت أن كلًّا من المعادلتين الآتيتين تمثِّل متطابقة:

2) $\cos(30° - \theta) = \sin(60° + \theta)$.

3) $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$.

4) **اختيار من متعدد:** ما القيمة الدقيقة لـ $\sin\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{3}{5}$، $90° < \theta < 180°$؟

A $\frac{5}{3}$ **C** $-\frac{4}{5}$

B $\frac{\sqrt{34}}{8}$ **D** $\frac{4}{5}$

دون استعمال الآلة الحاسبة، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

5) $\cot\theta$، إذا كان $\sec\theta = \frac{4}{3}$، $270° < \theta < 360°$

6) $\tan\theta$، إذا كان $\cos\theta = -\frac{1}{2}$، $90° < \theta < 180°$

7) $\sec\theta$، إذا كان $\csc\theta = -2$، $180° < \theta < 270°$

8) $\sec\theta$، إذا كان $\sin\theta = \frac{1}{2}$، $0° < \theta < 90°$

أثبت أن كل معادلة مما يأتي تمثِّل متطابقة:

9) $\sin\theta(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$

10) $\frac{\cos^2\theta}{1 - \sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta}$

11) $(\tan\theta + \cot\theta)^2 = \csc^2\theta \sec^2\theta$

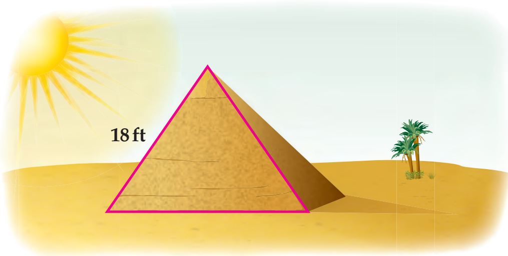
12) $\frac{1 + \sec\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\tan\frac{\pi}{8}$؟

A $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$ **C** $1 - \sqrt{2}$

B $\sqrt{2} - 1$ **D** $-\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

14) **تاريخ:** يُرجِّح بعض المؤرخين أن الذين بنوا أهرامات مِصر ربما حاولوا أن يبنوا الواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، ثمّ غيروها إلى أنواع مختلفة من المثلثات. افترض أنّه تم بناء هرم بواجهة على شكل مثلث متطابق الأضلاع، طول ضلعه 18 ft.



a) أوجد ارتفاع المثلث المتطابق الأضلاع.

b) استعمل الصيغة $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$، وطول ضلع المثلث وارتفاعه لتبيّن أن $\sin 2(30°) = \sin 60°$، ثم أوجد القيمة الدقيقة للنسبة المثلثية $\sin 60°$.

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

15) $\cos(-225°)$

16) $\sin 480°$

17) $\cos 75°$

18) $\sin 165°$

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين لقيم θ جميعها، إذاكان قياس θ بالراديان:

19) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

20) $2\sin 3\theta - 1 = 0$

حُلّ المعادلتين الآتيتين، حيث $0° \le \theta \le 360°$:

21) $\cos 2\theta + \cos\theta = 2$

22) $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = 0$

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2=4p(x-h)$ أو $(x-h)^2=4p(y-k)$	الدائرة	$x^2+y^2=r^2$ أو $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta=\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\csc\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cot\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$		$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الهندسة الإحداثية

المسافة	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	نقطة المنتصف	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
الميل	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_2\neq x_1$		

كثيرات الحدود

القانون العام	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ a\neq 0$	مربع الفرق	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
مربع المجموع	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	الفرق بين مربعين	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

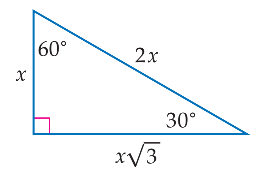
الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

$30°-60°-90°$

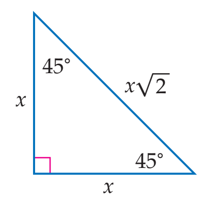
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan 60° = \sqrt{3}$



$45°-45°-90°$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\tan 45° = 1$

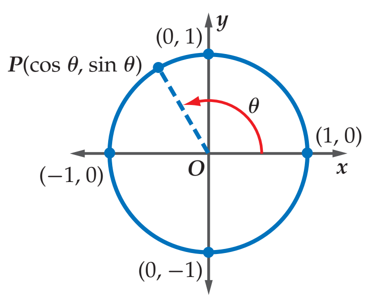


دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$،

فإن $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$، أي أن: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل