الرياضيات

المستوى الثالث - الفصلان الدراسيان (2,3)

طبعة تجريبية

١٤٣٨ هـ - ٢٠١٧ م

Original Title:

Precalculus
Algebra 2

By:
John A. Carter, Ph. D
Prof. Gilbert J. Cuevas
Roger Day, Ph. D
Carol E. Malloy, Ph. D
Luajean Bryan
Berchie Holliday, Ed. D
Prof. Viken Hovsepian
Ruth M.Casey

CONSULTANTS

Mathematical Content
Prof. Viken Hovsepian
Grant A. Fraser, Ph.D
Arthur K. Wayman, Ph.D

Gifted and talented
Shelbi K. Cole

Mathematical Fluency
Robert M. Capraro

Reading and Writing
Releah Cossett Lent
Lynn T. Havens

Graphing Calculator
Ruth M. Casey
Jerry J. Cummins

Test Preperation
Christopher F. Black

Science/Physics
Jane Bray Nelson
Jim Nelson

الرياضيات - المستوى الثالث

أعدَّ النسخة العربية : شركة العبيكان للتعليم

التحرير والمراجعة والمواءمة
محمد بن عبدالله البصيص
عبدالحكيم عبدالله سليمان

www.glencoe.com

www.obeikaneducation.com

McGraw Hill Education

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومتنا الرشيدة بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان التوجه نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز كتب الرياضيات بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلًّا متكاملًا، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف إستراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تحوز على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق

الفهرس

الوحدة 1 المتطابقات والمعادلات المثلثية

الوحدة 2 القطوع المخروطية

الوحدة 3 المتجهات

الفهرس

الوحدة 4 الإحداثيات القطبية والأعداد المركبة

الوحدة 5 النهايات والاشتقاق

الوحدة 5

النهايات والاشتقاق
Limits and Differentiation

فيما سبق:

درستُ النهايات ومُعدلات التغيّر.

والآن:

- أَحسبُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية.
- أَجِدُ مُعدلات التغيّر اللحظية.
- أَجِدُ مشتقات دوال كثيرات الحدود، وأحسب قيمها.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمالِ التكامل المحدد.
- أجد الدالة الأصلية، وأستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل في إيجاد التكامل المحدد.

لماذا؟

الأفعوانية: يُعد الاشتقاق وسيلة فاعلة ومهمة عند دراسة مُعدلات التغيّر غير الثابتة ، فإذا ركبت الأفعوانية يومًا ، فإن سرعتك وتسارعك يتغيران باستمرار مع الزمن بالاعتماد على موقعك ، وستدرس في هذا الفصل مسائل تحتوي مواقف مشابهة.

قراءة سابقة: استعمل أسئلة اختبار منتصف الوحدة؛ لتساعدك على توقّع محتوى النصف الأول من الوحدة.

التهيئة للوحدة 5

أجب عن أسئلة الاختبار السريع الآتي:

اختبار سريع

أوجد قيمة كل من الدوال الآتية عند القيمة المعطاة للمتغير بجانبها:

1) $f(x) = x^2 + 2x - 3,\ x = -4$

2) $f(z) = 5z - 2z^2 + 1,\ z = 5$

3) $f(c) = -4c^2 + 7,\ c = 2$

4) $f(p) = 2 + 3p^3,\ p = -5$

حلِّل كل مقدار مما يأتي:

5) $x^2 + 11x + 30$

6) $x^2 - 13x + 36$

7) $2x^2 - 3x - 5$

8) $6x^2 + 13x - 5$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية والأفقية (إن وجدت) لكل دالة مما يأتي:

9) $f(x) = \dfrac{4x^2}{2x^2 + 1}$

10) $h(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 10}$

11) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+5)}{(x+2)(x-4)}$

12) $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{(x-2)(x+4)}$

أوجد الحدود الأربعة التالية في كل متتابعة مما يأتي:

13) $8, 3, -2, -7, \ldots$

14) $5, -1, -7, -13, \ldots$

15) $5, -10, 20, -40, \ldots$

16) $-28, -21, -14, -7, \ldots$

مراجعة المفردات

القانون العام (quadratic formula):

تعطى حلول المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ بالصيغة:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ، حيث $a \neq 0$

الميل (slope):

نسبة التغير في الإحداثي y إلى التغير في الإحداثي x .

كثيرة الحدود بمتغير واحد (polynomial in one variable):

هي عبارة جبرية على الصورة:

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ ،

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ أعداد حقيقية، $a_n \neq 0$ ،

n عدد كلي.

الدالة النسبية (rational function):

هي دالة على الصورة $f(x) = \dfrac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x), b(x)$ كثيرتا حدود،

و $b(x) \neq 0$

الجذر النوني (nth root):

العملية العكسية لرفع عدد لقوة (n) هي إيجاد الجذر النوني للعدد.

ويشير الرمز $\sqrt[n]{\ }$ إلى الجذر النوني.

الدليل

رمز الجذر

$$\sqrt[n]{81}$$

ما تحت الجذر

5-1

تقدير النهايات بيانيًّا
Estimating Limits Graphically

فيما سبق:

درستُ إيجاد قيم الدالة عند نقاط محددة.

والآن:

- أقدِّر نهاية الدالة عند قيم محددة.
- أقدِّر نهاية الدالة عند المالانهاية .

المفردات:

النهاية من جهة واحدة
one-sided limit

النهاية من جهتين
two-sided limit

لماذا؟

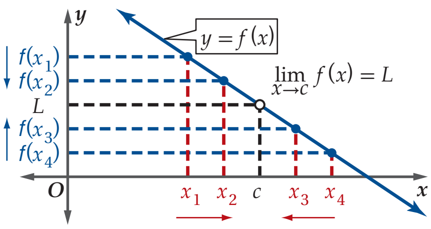
هل هناك نهايات للأرقام المسجَّلة في المسابقات الرياضية لا يمكن تجاوزها؟ لقد كان الرقم القياسي المسجَّل في دورة الألعاب المقامة في بكين عام 2008 م لمسابقة الوثب بالزانة $5.05\ m$. ويمكن استعمال الدالة:

$f(x) = \dfrac{5.334}{1 + 62548.213\,(2.7)^{-0.129x}}$ لتقدير الرقم القياسي الذي تم تسجيله في هذه الرياضة للأعوام بين 1996 م و2008 م، حيث x عدد السنوات منذ عام 1900 م، يمكنك استعمال نهاية هذه الدالة عندما تقترب x من المالانهاية؛ للتنبؤ بأكبر رقم يمكن تسجيله.

تقدير النهايات عند قيم محددة: يتمحور علمُ التفاضلِ والتكاملِ حول مسألتين أساسيتين:

- إيجاد معادلة مماس منحنى دالة عند نقطة واقعة عليه.
- إيجاد مساحة المنطقة الواقعة بين التمثيل البياني لدالة والمحور x.

وتُعدُّ مفاهيم النهايات أساسية لحل هاتين المسألتين.



إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L، كلما اقتربت قيم x من العدد c من كلا الجهتين ، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L ، وتكتب على الصورة $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

يمكنك تطبيق مفهوم النهاية لتقدير نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c؛ أي $\lim\limits_{x\to c} f(x)$، وذلك من خلال تمثيل الدالة بيانيًّا، أو إنشاء جدولٍ لقيم $f(x)$.

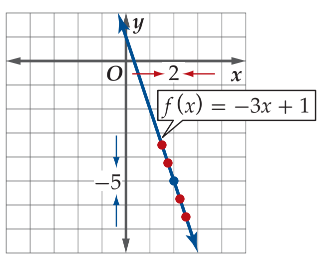
مثال 1 تقدير النهاية (النهاية تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim\limits_{x\to 2} (-3x + 1)$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا: مثِّل الدالة الخطية $y = -3x+1$ بيانيًّا باستعمال النقطتين $(0, 1), (1, -2)$.

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -3x + 1$، أنه كلما اقتربت x من العدد 2، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من العدد -5 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن :

$\lim\limits_{x\to 2}(-3x + 1) = -5$.



التعزيز عدديًّا: كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ⟵ ⟶ x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	−4.7	−4.97	−4.997		−5.003	−5.03	−5.3

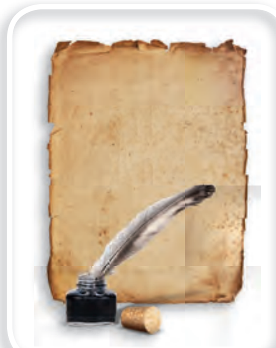
يبيِّن نمط قيم $f(x)$ أنه كلما اقتربت x من العدد 2 من اليمين أو من اليسار، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد -5 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

1A) $\lim\limits_{x\to -3} (1 - 5x)$

1B) $\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1)$



تاريخ الرياضيات

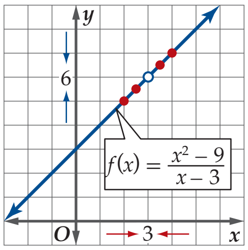
ثابت بن قرة
(221هـ–288هـ)
من أوائل من فكروا بعلم التفاضل والتكامل، حيث أوجد حجم الجسم الناتج عن دوران القطع المكافئ حول محوره.

في المثال 1 ، لاحظ أن $\lim\limits_{x\to 2}(-3x+1)$ هي نفسها $f(2)$، إلا أن نهاية الدالة لا تساوي دائمًا قيمة الدالة.

مثال 2 تقدير النهاية (النهاية لا تساوي قيمة الدالة)

قدِّر $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

التحليل بيانيًّا:



مجال الدالة $R-\{3\}$

بما أن $\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$

لذا فالتمثيل البياني للدالة $f(x)$ هو نفسه التمثيل البياني للمستقيم $y=x+3$ مع وجود دائرة صغيرة غير مظللة (o) عند $x=3$

يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ المجاور، أنه كلما اقتربت x من العدد 3 ، فإن قيمة $f(x)$ المقابلة لها تقترب من العدد 6 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير أن:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

التعزيز عدديًّا:

كوّن جدولًا لقيم $f(x)$، وذلك باختيار قيم x القريبة من العدد 3 من كلا الجهتين.

x تقترب من 3 ⟵ ⟶ x تقترب من 3

x	2.9	2.99	2.999	3	3.001	3.01	3.1
$f(x)$	5.9	5.99	5.999		6.001	6.01	6.1

يُبيّن نمط قيم $f(x)$ ، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 3 ، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 ، وذلك يعزِّز تحليلنا البياني.

تحقق من فهمك

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.

(2A $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2-4}$

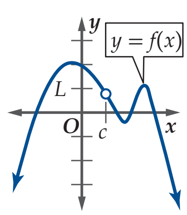
(2B $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{x-5}$

في المثال 2 ، لاحظ أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 6 عند اقتراب قيم x من العدد 3، على الرغم من أن $f(3)\neq 6$. فالعبارة $\dfrac{x^2-9}{x-3}$ غير معرّفة عندما $x=3$. وهذه الملاحظة توضِّح مفهومًا مهمًّا في النهايات.

مفهوم أساسي عدم اعتماد النهاية على قيمة الدالة عند نقطة

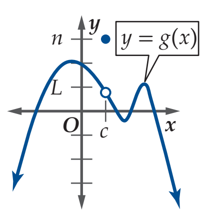
التعبير اللفظي: لا تعتمد نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من العدد c على قيمة الدالة عند c.

الأمثلة:



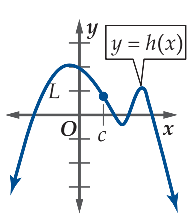
$\lim\limits_{x\to c}f(x)=L$

$f(c)$ غير معرفة



$\lim\limits_{x\to c}g(x)=L$

$g(c)=n$



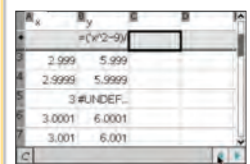
$\lim\limits_{x\to c}h(x)=L$

$h(c)=L$

إن النهاية عند عدد لا تعني قيمة الدالة عند ذلك العدد، وإنما قيمة الدالة عندما تقترب x من ذلك العدد.

إرشاد تقني

جداول لإنشاء جدول باستعمال الحاسبة البيانية TI-nspire ، أدخل الدالة إلى الحاسبة باستعمال قائمة ، ثم اختيار الجدول بالضغط على . ثم اكتب قيم x للاقتراب من قيمة محددة .



لاحظ أننا عندما نقدِّر النهاية باستعمال التمثيل البياني أو جدول القيم، فإننا نبحث عن قيمة $f(x)$ عندما تقترب x من c من كلا الجهتين. ويمكننا إيجاز وصف سلوك التمثيل البياني عن يمين عدد أو عن يساره بمفردة **النهاية من جهةٍ واحدة**.

مفهوم أساسي: النهايات من جهة واحدة

النهاية من اليمين

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_1، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين، فإن:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L_1$$ وتقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليمين هي L_1

النهاية من اليسار

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L_2، عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار، فإن:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L_2$$ وتقرأ:

نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c من اليسار هي L_2

يمكننا باستعمال هذين التعريفين إيجاز ما تعنيه مفردة **النهاية من جهتين**، وما يعنيه كونها موجودة.

مفهوم أساسي: النهاية عند نقطة

تكون نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من c، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين، أي أنه:

إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$

تنبيه!

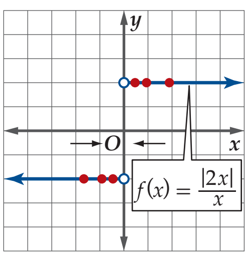
النهاية من اليمين والنهاية من اليسار للدالة

لمناقشة النهاية من اليمين لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرَّفة على يمين c على فترة (c, b).
ولمناقشة النهاية من اليسار لدالة عند c يجب أن نضمن أن الدالة معرَّفة على يسار c على فترة (a, c).

مثال 3 تقدير النهاية من جهة واحدة ومن جهتين

قدِّر – إن أمكن – كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

a) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x}, \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x}, \lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$



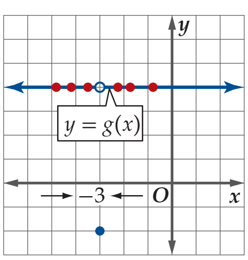
يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{|2x|}{x}$ أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = -2 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = 2$$

وبما أن النهايتين من اليسار واليمين غير متساويتين، فإن $\lim_{x\to 0} \frac{|2x|}{x}$ غير موجودة.

b) $\lim_{x\to -3^-} g(x)\ ,\ \lim_{x\to -3^+} g(x)\ ,\ \lim_{x\to -3} g(x)$، حيث

$$g(x) = \begin{cases} 4 & , \ x \neq -3 \\ -2 & , \ x = -3 \end{cases}$$



يُبيّن التمثيل البياني للدالة $g(x)$ أن:

$$\lim_{x\to -3^-} g(x) = 4 \quad , \quad \lim_{x\to -3^+} g(x) = 4$$

وبما أن النهايتين من اليسار ومن اليمين متساويتان، فإن $\lim_{x\to -3} g(x)$ موجودة وتساوي 4.

إرشادات للدراسة

وصف النهاية

إذا كانت النهايتان من اليسار ومن اليمين غير متساويتين، فإننا نقول: إن النهاية غير موجودة.

إرشادات للدراسة

التمثيل البياني للدوال

يمكنك استعمال الآلة الحاسبة البيانية لتمثيل الدوال بيانيًّا في جميع الأمثلة.

✓ تحقق من فهمك

قدِّر –إن أمكن– كلًّا من النهايات الآتية باستعمال التمثيل البياني للدالة:

3A) $\lim_{x\to 1^-} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 1} f(x)$، حيث:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & , \ x < 1 \\ 2x + 1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$$

3B) $\lim_{x\to -2^-} g(x),\ \lim_{x\to -2^+} g(x)\ ,\ \lim_{x\to -2} g(x)$، حيث:

$$g(x) = \begin{cases} -0.5x + 2 & , \ x < -2 \\ -x^2 & , \ x \geq -2 \end{cases}$$

إن عدم مقدرتنا على إيجاد قيمة نهاية للدالة f كعدد حقيقي عند الاقتراب من نقطة ثابتة ليس ناتجًا بالضرورة عن عدم تساوي النهايتين من اليسار واليمين؛ إذ من الممكن أن تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، وفي هذه الحالة نشير إلى النهاية بالرمز ∞، أما إذا تناقصت قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من c، فإننا نشير إلى النهاية بالرمز $-\infty$.

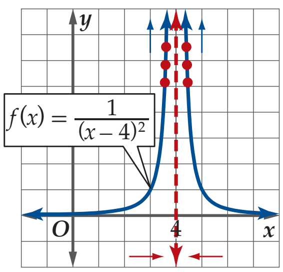
قراءة الرياضيات

السلوك غير المحدود
$f(x)$ تعني زيادة أو نقصان $f(x)$ بصورة غير محدودة عندما $x \to c$، أنه باختيار قيمة لـ x قريبة من c بالقدر الذي نريد، فإنه يمكننا الحصول على قيمة كبيرة لـ $|f(x)|$ بالقدر الذي نريد، وكلما كانت x قريبة من c كانت $|f(x)|$ أكبر.

مثال 4 النهايات والسلوك غير المحدود

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$

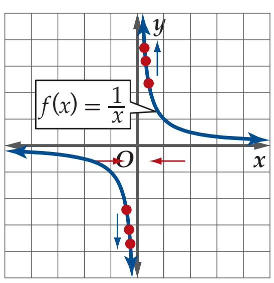


التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ المجاور أن:

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 4، ازدادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، وبما أن كلًّا من النهايتين من اليسار ومن اليمين ∞. لذا فإن $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2}$ لا تساوي عددًا حقيقيًّا، إلا أنه وبسبب كون كلتا النهايتين ∞، فإننا نصف سلوك $f(x)$ عند العدد 4 بكتابة $\lim\limits_{x \to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = \infty$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$



التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad , \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

فكلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليسار، قلَّت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود، في حين تزداد قيم $f(x)$ كلما اقتربت قيم x من العدد 0 من اليمين. وبسبب سلوك الدالة المختلف عن يمين ويسار العدد 0. لذا فإن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ غير موجودة، لذلك لا يمكننا وصف سلوك الدالة عندما $x = 0$ بعبارة واحدة، بمعنى أنه لا يمكن أن نكتب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$، وذلك بسبب سلوك الدالة غير المحدود من اليمين واليسار.

تنبيه!

النهايات غير المحدودة
من الضروري أن نفهم أن العبارتين $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$، $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$ هما فقط وصف للحالة التي بسببها $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ غير موجودة، إذ لا يمثل الرمزان ∞ و $-\infty$ عددين حقيقيين.

✓ تحقق من فهمك

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني:

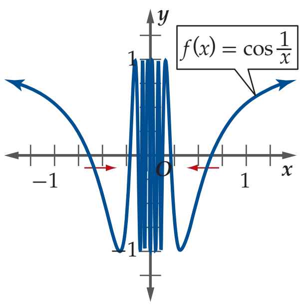
4A) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-4}{x-3}$

4B) $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\frac{2}{x^4}\right)$

لا تكون النهاية موجودة أيضًا عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من العدد c.

مثال 5 النهايات والسلوك التذبذبي

قدِّر –إن أمكن– $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ باستعمال التمثيل البياني للدالة.



يُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ المجاور أن قيم $f(x)$ تتذبذبُ بشكل مستمر بين العددين $1-$ ، 1 كلما اقتربت قيم x من العدد 0 ، مما يعني أنه لأي قيمة x_1 قريبة من الصفر ، بحيث $f(x_1) = 1$ ، يمكنك إيجاد قيمة قريبة جدًّا من الصفر مثل x_2 ، بحيث $f(x_2) = -1$ ، وبالمثل لأي قيمة قريبة من الصفر x_3 ، بحيث $f(x_3) = -1$ ، يمكنك إيجاد قيمة مثل x_4 قريبة جدًّا من الصفر، بحيث $f(x_4) = 1$.

أي أن $\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ غير موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة:

(5A $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

(5B $\lim_{x \to 0} (x^2 \sin x)$

نلخِّص فيما يأتي أهم ثلاثة أسباب تجعل نهاية الدالة عند نقطة غير موجودة.

ملخص المفهوم أسباب عدم وجود نهاية عند نقطة

تكون $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة في الحالات الآتية:

- **عندما تقترب قيم $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين.**
- **عندما تزداد قيم $f(x)$ بشكلٍ غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار وتتناقص قيمها بشكل غير محدود عند اقترابٍ x من العدد c من اليمين، أو العكس.**
- **عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c.**

تقدير النهاية عند المالانهاية: درست فيما سبق استعمال النهايات لوصف سلوك $f(x)$ عندما تقترب قيم x من عدد ثابت c ، و تستعمل النهايات أيضًا لوصف سلوك طرفي التمثيل البياني للدالة . وهو سلوك الدالة عند ازدياد أو نقصان قيم x بشكل غير محدود. وفيما يأتي ملخّص لرموز هذه النهايات.

مفهوم أساسي النهايات عند المالانهاية

- **إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_1 عند ازدياد قيم x بشكل غير محدود، فإن:**
  $\lim_{x \to \infty} f(x) = L_1$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من موجب مالانهاية هي L_1 »
- **إذا اقتربت قيم $f(x)$ من عدد وحيد L_2 عند نقصان قيم x بشكل غير محدود، فإن:**
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L_2$ ، وتُقرأ « نهاية $f(x)$ عندما تقترب قيم x من سالب مالانهاية هي L_2 »

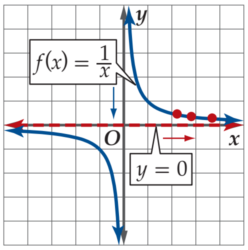
درست سابقًا أنه إذا اقتربت قيم الدالة من ∞ أو $-\infty$ عند اقتراب قيم x من عدد ثابت c ، فإن ذلك يعني وجود خط تقارب رأسي للدالة، كما درست أن خط التقارب الأفقي يحدث عندما تقترب قيم الدالة من عدد حقيقي كلما اقتربت قيم x من ∞ أو $-\infty$ ، بمعنى:

- المستقيم $x = c$ هو خط تقارب رأسي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty$ أو كليهما.
- المستقيم $y = c$ هو خط تقارب أفقي للدالة f ، إذا كانت $\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ أو $\lim_{x \to \infty} f(x) = c$

مثال 6 تقدير النهاية عند المالانهاية

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة:

(a $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$



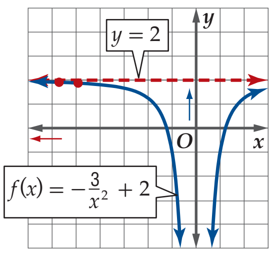
التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ المجاور أن $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ ، فكلما زادت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 0.

إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

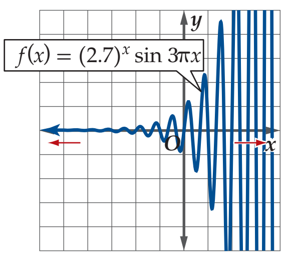
تشير النهاية في المثال 6a إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 0$ ، وتشير النهاية في مثال 6b إلى وجود خط تقارب أفقي $y = 2$.

(b $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right)$



التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = -\frac{3}{x^2} + 2$ المجاور أن $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\frac{3}{x^2} + 2\right) = 2$ ، فكلما قلَّت قيم x ، اقتربت قيم $f(x)$ من العدد 2.

(c $\lim\limits_{x \to \infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$, $\lim\limits_{x \to -\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$



التحليل بيانيًّا: يُبيّن التمثيل البياني للدالة

$f(x) = (2.7)^x \sin 3\pi x$ المجاور أن:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2.7)^x \sin 3\pi x = 0$ ، فكلما قلَّت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ مقتربة من العدد 0 .

في حين يبيّن التمثيل البياني أن $\lim\limits_{x \to \infty} (2.7)^x \sin 3\pi x$ غير موجودة ، فكلما ازدادت قيم x ، تذبذبت قيم $f(x)$ متباعدةً.

تنبيه!

السلوك المتذبذب

إن التذبذب اللانهائي للدالة لا يعني بالضرورة عدم وجود النهاية عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. فإذا كان التذبذب بين قيمتين مختلفتين، فالنهاية غير موجودة، أما إذا كان التذبذب متقاربًا نحو عدد معين، فالنهاية موجودة.

تحقق من فهمك

قدِّر – إن أمكن – كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة:

(6A $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x^4} - 3\right)$ (6B $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x$ (6C $\lim\limits_{x \to \infty} \sin x$

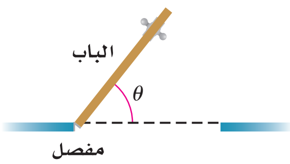
يمكنك استعمال التمثيل البياني أو جدول قيم لتقدير النهايات عند المالانهاية في كثير من المواقف الحياتية.

الربط مع الحياة

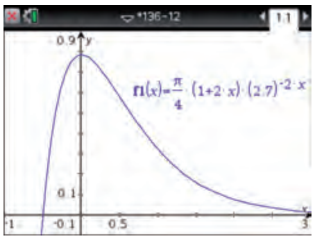
الأنظمة الهيدروليكية هي أحد أنظمة نقل القدرة التي تستعمل طاقة السوائل لقيادة أو تحريك الأجزاء المتحركة في النظام الهيدروليكي. وتستعمل في العديد من المجالات، ومنها فرامل السيارات والأبواب الثقيلة وغيرها.

مثال 7 من واقع الحياة — تقدير النهاية عند المالانهاية

a) هيدروليك: تستعمل نوابض لإغلاق الأبواب الثقيلة، وآلية هيدروليكية للتحكم في سرعة حركتها، إذا فُتح باب بزاوية $\frac{\pi}{4}$ ثم تُرِكَ لتغلقه النوابض، فإن الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)(2.7)^{-2t}$ تمثّل زاوية فتحته θ بعد t ثانية.
قدِّر $\lim\limits_{t \to \infty} \theta(t)$، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.



قدِّر النهاية:



[−1, 3] scl: 0.5 by [−0.1, 0.9] scl: 0.1

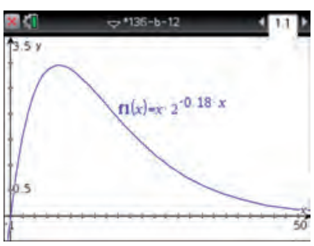
مَثِّل الدالة $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1 + 2t)(2.7)^{-2t}$ بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية.
لاحظ أنه كلما زادت قيم t، فإن قيم الدالة $\theta(t)$ تقترب من العدد 0.
أي أن $\lim\limits_{t \to \infty} \theta(t) = 0$.

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية 0 في هذه المسألة، تعني أن الزاوية التي يصنعها الباب مع وضع الإغلاق مع مرور الزمن هي 0 درجة بالراديان. بمعنى أنه بعد مرور زمن أطول ، فإن الباب سيقترب من وضع الإغلاق التام.

b) دواء: يُعطى تركيز دواء في دم مريض بوحدة ملجرام لكل مللتر بالعلاقة $C(t) = t2^{-0.18t}$ ، حيث t الزمن بالساعات بعد حقن المريض.
قدِّر $\lim\limits_{t \to \infty} C(t)$ ، وفسِّر معناها إذا كانت موجودة.

قدِّر النهاية:



[−1, 50] scl: 2 by [−0.5, 3.5] scl: 0.5

مَثِّل الدالة $C(t) = t2^{-0.18t}$ بيانيًا باستعمال الحاسبة البيانية. يتضح من التمثيل البياني أنه كلما زادت قيمة t فإن منحنى الدالة يقترب من 0، أي أن $\lim\limits_{t \to \infty} C(t) = 0$.

فسِّر النتيجة:

إن قيمة النهاية هي 0 ، وتعني في هذه المسألة أنه مع مرور الزمن، فإن تركيز الدَّواء سيصبح قريبًا من الصفر في دم المريض.

إرشاد تقني

استعمل الآلة الحاسبة للوصول إلى شكل مناسب للتمثيل البياني للدالة في الآلة الحاسبة، يمكنك استعمال بعض ميزات الآلة. بدءًا من مفتاح menu يمكنك استعمال خاصية 4: تكبير/تصغير النافذة واختيار 1: إعدادات النافذة ؛ لتحديد مدى القيم وطول فترة التدريج لكلٍّ من x, y ، كذلك يمكن اختيار 3: تكبير ، 4: تصغير لتصغير وتكبير التمثيل البياني، حتى يمكن الحصول على شكل مناسب للدالة. كما يمكن استعمال خاصية 5: تتبع المسار لتتبع قيم الدالة؛ مما يساعد على التوصل لتقدير قيمة النهاية.

تحقق من فهمك

7A) كهرباء: يزوّد مقبس في منطقة ما بفرق جهد كهربائي يُعطى بالعلاقة $V(t) = 165 \sin 120\pi t$ ، حيث t الزمن بالثواني. قدِّر $\lim\limits_{t \to \infty} V(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

7B) أحياء: عند وضع عدد من ذبابات الفاكهة في وعاء يحوي حليبًا وفاكهةً وخميرةً فإن عدد الذبابات بعد t يوم يُعطى بالعلاقة $P(t) = \frac{230}{1 + 56.5(2.7)^{-0.37t}}$ ، قدِّر $\lim\limits_{t \to \infty} P(t)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر معناها.

تدرب وحل المسائل

قدِّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك عدديًّا.
إرشاد:" يمكنك استعمال الآلة البيانية للتمثيل البياني". (المثالان 1, 2)

1) $\lim\limits_{x\to 5}(4x-10)$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{2}x^5-2x^3+3x^2\right)$

3) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+2x-15)$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}[5(\cos^2 x-\cos x)]$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

7) $\lim\limits_{x\to 6}(x+\sin x)$

8) $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+x-20}{x+5}$

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني: (مثال 3)

9) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x}$

10) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|4x|}{x}$

11) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}$

12) $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

13) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{|2x+1|}{x}$

14) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+5x+6}{|x+2|}$

15) $\lim\limits_{x\to 0^-}(\sqrt{-x}-7)$

16) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

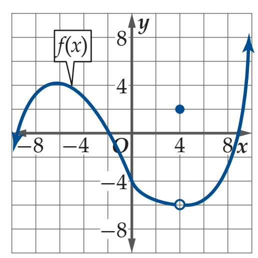
17) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|3x|}{2x}$

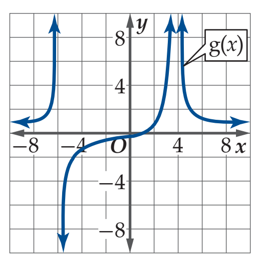
18) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x^2-1}$

19) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ ,\ f(x)=\begin{cases} x-5 & ,\ x<0 \\ x^2+5 & ,\ x\geq 0\end{cases}$

20) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ ,\ f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & ,\ x<0 \\ \frac{2x}{x} & ,\ x\geq 0\end{cases}$

استعمل التمثيل البياني لتقدير كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:
(الأمثلة 1-4)





21) $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$

22) $\lim\limits_{x\to 4} g(x)$

23) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

24) $\lim\limits_{x\to -6} g(x)$

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني:
(الأمثلة 4-6)

25) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{-17}{x^2+8x+16}$

26) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{|x|}{x-4}$

27) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2}{x^2-10x+25}$

28) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{5}{(x-6)^2}$

29) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x^5-7x^4-4x+1)$

30) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+x-22}{4x^3-13}$

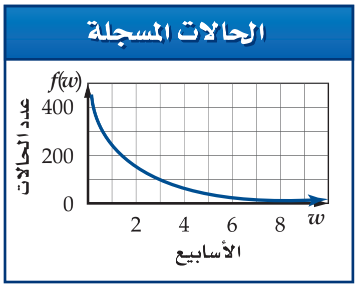
31) $\lim\limits_{x\to \infty} x\cos x$

32) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

33) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin|x|}{x}$

34) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$

35) **دواء:** تم توزيع لقاح للحدِّ من عدوى مرض ما. ويُبيّن التمثيل البياني أدناه عدد الحالات المصابة بالمرض بعد w أسبوع من توزيع اللقاح. (مثال 7)



a) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{w\to 1} f(w)$ ، $\lim\limits_{w\to 3} f(w)$.

b) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{w\to\infty} f(w)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

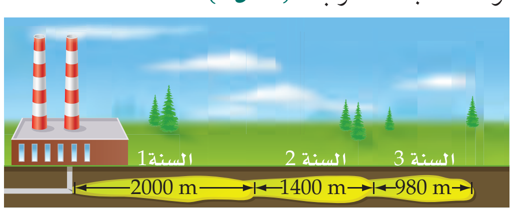
36) **برامج تلفزيونية:** يُقدَّر عدد مشاهدي أحد البرامج التلفزيونية اليومية بالدالة $f(d)=12(1.25012)^d-12$ ، حيث d رقم اليوم منذ أول يوم للبرنامج. (مثال 7)

a) مَثِّل الدالة $f(d)$ بيانيًّا باستعمال الآلة الحاسبة البيانية في الفترة $0\leq d\leq 20$.

b) ما عدد مشاهدي البرنامج في اليوم: الخامس، العاشر ، العشرين، الستين؟

c) قدِّر $\lim\limits_{d\to\infty} f(d)$ إذا كانت موجودة، وفسِّر النتيجة.

37) **كيمياء:** تتسرَّب مادة سامة من أنبوب غاز تحت الأرض كما في الشكل أدناه. ويعبِّر عن المسافة الأفقية بالأمتار التي تقطعها المادة المتسرِّبة بالدالة $d(t)=2000(0.7)^{t-1}, t\geq 1$ ، حيث t عدد السنوات منذ بدء التسرُّب. (مثال 7)



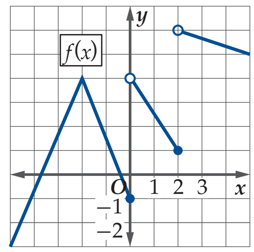
a) مَثِّل باستعمال الآلة البيانية الدالة بيانيًّا في الفترة $1\leq t\leq 15$.

b) استعمل التمثيل البياني وخاصية تتبع المسار في الحاسبة البيانية لإيجاد قيم d عندما $t=5, 10, 15$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t\to\infty} d(t)$.

d) هل من الممكن أن تصل المادة المتسرِّبة لمستشفى يقع على بُعد $7000\ m$ من موقع التسريب؟ تذكَّر أن مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هو $\frac{a_1}{1-r}$.

للدالة الممثَّلة بيانيًّا أدناه، قدِّر كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة:



38) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$

39) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

40) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

41) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$

42) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

43) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

حاسبة بيانية: حدِّد ما إذا كانت النهاية موجودة أو غير موجودة في كل مما يأتي. وإذا لم تكن موجودة، فصف التمثيل البياني للدالة عند نقطة النهاية:

44) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

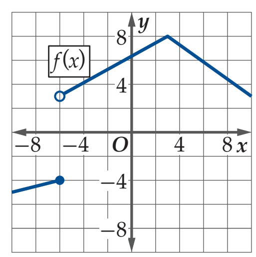
45) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$

46) $\lim\limits_{x \to 0} 3 \cos \frac{\pi}{x}$

47) $\lim\limits_{x \to -5} \frac{|x + 5|}{x + 5}$

مسائل مهارات التفكير العليا

48) **اكتشف الخطأ:** قال علي: إن نهاية الدالة الممثَّلة بيانيًّا في الشكل أدناه عندما تقترب x من -6 هي -4. في حين قال محمد: إنها 3. هل أي منهما إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.



49) **مسألة مفتوحة:** أعطِ مثالًا على $f(x)$، بحيث تكون $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ موجودة، و $f(0)$ غير معرفة، ومثالًا على دالة أخرى $g(x)$، بحيث تكون $g(0)$ معرفة، ولكن $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ غير موجودة.

50) **تحدٍّ:** إذا كان $g(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. فقدِّر كلًّا من $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. وإذا كانت $h(x), j(x)$ كثيرتي حدود بحيث: $h(a) = 0$, $j(a) \neq 0$، فماذا يمكنك القول عن $\lim\limits_{x \to a} \frac{j(x)}{h(x)}$ ؟

برِّر إجابتك.

51) **تبرير:** حَدِّد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا أو صحيحة أحيانًا أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك.

إذا كان $f(c) = L$، فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.

52) **مسألة مفتوحة:** مَثِّل بيانيًّا دالة تحقق كلًّا مما يأتي:
$f(0) = 2, f(2) = 5$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -3$، و $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة.

53) **تحدٍّ:** قدِّر كلًّا من النهايات الآتية للدالة f إذا كانت موجودة:

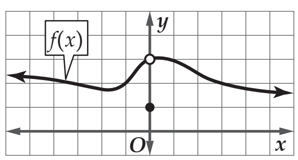
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x \le 0 \\ x^2 & , \quad 1 < x \le 2 \\ x - 3 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

54) **اكتب:** من خلال ما لاحظته في حل التمارين، اذكر طريقة لتقدير نهاية دالة متصلة.

تدريب على اختبار

55) باستعمال التمثيل البياني للدالة $y = f(x)$ أدناه، ما قيمة $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ (إن وجدت)؟



A 0

B 1

C 3

D النهاية غير موجودة

5-2

حساب النهايات جبريًّا
Evaluating Limits Algebraically

فيما سبق:
درستُ كيفية تقدير النهايات بيانيًا وعدديًا.

والآن:
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند قيم محددة.
- أجدُ نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية عند المالانهاية .

المفردات:
التعويض المباشر
direct substitution
الصيغة غير المحددة
indeterminate form

لماذا ؟


إذا أُعطيت اتساع البؤبؤ بالملمترات لعين حيوان بالعلاقة $d(x) = \frac{152x^{-0.45}+85}{4x^{-0.45}+10}$،
حيث x الاستضاءة الساقطة على البؤبؤ مقيسة بوحدة اللوكس (lux)،
فإنه يمكنك استعمال النهاية عندما تقترب x من 0 أو ∞ لإيجاد اتساع البؤبؤ عندما تكون الاستضاءة في حدِّها الأدنى أو الأعلى.

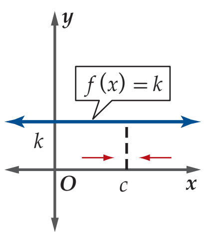
حساب النهاية عند نقطة: تعلمتَ في الدرس 5-1 تقدير النهايات بيانيًّا، وباستعمال جداول قيم . وستكتشف في هذا الدرس طرائق جبرية لحساب النهايات.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات الدوال الثابتة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة الثابتة عند أي نقطة c هي القيمة الثابتة للدالة.

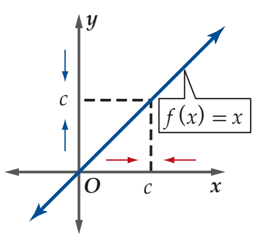
الرموز: $\lim_{x \to c} k = k$



نهايات الدالة المحايدة

التعبير اللفظي: نهاية الدالة المحايدة عند النقطة c هي c .

الرموز: $\lim_{x \to c} x = c$



تظهر أهمية نهايات الدوال الثابتة والدالة المحايدة واضحة في خصائص النهايات.

مفهوم أساسي — خصائص النهايات

إذا كان k , c عددين حقيقيين، n عددًا صحيحًا موجبًا، وكانت النهايتان $\lim_{x \to c} f(x)$, $\lim_{x \to c} g(x)$ موجودتين ، فإن كلًّا من الخصائص الآتية صحيحة:

خاصية المجموع: $\lim_{x \to c}[f(x)+g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الفرق: $\lim_{x \to c}[f(x)-g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية الضرب في ثابت: $\lim_{x \to c}[k\, f(x)] = k \lim_{x \to c} f(x)$

خاصية الضرب: $\lim_{x \to c}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$

خاصية القسمة: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$ ، حيث $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

خاصية القوة: $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = [\lim_{x \to c} f(x)]^n$

خاصية الجذر النوني: $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ، إذا كان $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ ، حيث n عدد زوجي.
وإذا كان n عددًا فرديًّا، فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$ ،

تنبيه!
إذا كانت $\lim_{x \to c} f(x) \le 0$ وَ n عددًا زوجيًا فإن $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)}$ غير موجودة.

مثال 1 استعمال خصائص النهايات

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)$

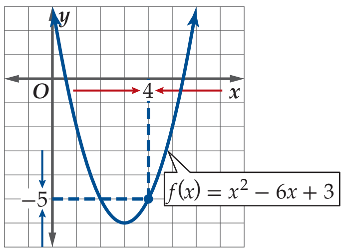
$\lim\limits_{x\to 4}(x^2-6x+3)=\lim\limits_{x\to 4}x^2-\lim\limits_{x\to 4}6x+\lim\limits_{x\to 4}3$ خاصيتا المجموع والفرق

$=\left(\lim\limits_{x\to 4}x\right)^2-6\cdot\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}3$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=4^2-6\cdot 4+3$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=-5$ بسّط

تحقق يعزّز التمثيل البياني للدالة $f(x)=x^2-6x+3$ هذه النتيجة.



b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+1}{x-5}$

$\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^3+1}{x-5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}(4x^3+1)}{\lim\limits_{x\to -2}(x-5)}$ خاصية القسمة $\left(\lim\limits_{x\to -2}(x-5)\neq 0\right)$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to -2}4x^3+\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}5}$ خاصيتا المجموع والفرق

$=\dfrac{4\left(\lim\limits_{x\to -2}x\right)^3+\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}x-\lim\limits_{x\to -2}5}$ خاصيتا القوة والضرب في ثابت

$=\dfrac{4(-2)^3+1}{-2-5}$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

≈ 4.4 بسّط

تحقق كوّن جدولاً لقيم x التي تقترب من -2 من الجهتين.

x تقترب من -2 ⟶ ⟵ x تقترب من -2

x	−2.1	−2.01	−2.001	−2	−1.999	−1.99	−1.9
$f(x)$	5.08	4.49	4.43		4.42	4.37	3.83

من الواضح أنه كلما اقترب x من العدد -2، فإن $f(x)$ تقترب من العدد 4.4

c) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{8-x}$

$\lim\limits_{x\to 3}(8-x)=\lim\limits_{x\to 3}8-\lim\limits_{x\to 3}x$ خاصية الفرق

$=8-3$ نهايتها الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=5>0$ بسّط

$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{8-x}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(8-x)}$ خاصية الجذر النوني

$=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}8-\lim\limits_{x\to 3}x}$ خاصية الفرق

$=\sqrt{8-3}$ نهايتا الدالة الثابتة والدالة المحايدة

$=\sqrt{5}$ بسّط

✓ تحقق من فهمك

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

1A) $\lim\limits_{x\to 2}(-x^3+4)$

1B) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{2x^2-x-15}$

1C) $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+3}$

لاحظ أن نهاية كل دالة في المثال أعلاه عندما تقترب x من c تساوي قيمة $f(c)$. ومع أن هذه الملاحظة ليست صحيحة في جميع الدوال، إلا أنها صحيحة في دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية التي مقاماتها لا تساوي صفرًا عندما $x=c$. كما هو موضح فيما يأتي:

إرشادات للدراسة

خصائص النهايات
تبقى خصائص النهايات صحيحة في حال كون النهايات من جهة واحدة، وفي حال كونها عند المالانهاية، شريطة وجود هذه النهايات.

تنبيه!
خاصية الجذر النوني الزوجي تستخدم فقط إذا كان $\lim\limits_{x\to c}f(x)>0$

إرشادات للدراسة

الدوال الجيدة السلوك تُعدُّ الدوال المتصلة مثل دوال كثيرات الحدود ودالتي الجيب وجيب التمام دوالّ جيدة السلوك، إذ يمكن حساب نهاياتها من خلال التعويض المباشر، ويمكن إيجاد نهاية الدوال من خلال التعويض المباشر حتى وإن لم تكن الدالة جيدة السلوك على مجالها، بشرط أن تكون متصلة عند النقطة التي تحسب عندها النهاية.

مفهوم أساسي — نهايات الدوال

نهايات دوال كثيرات الحدود

إذا كانت $p(x)$ دالة كثيرة حدود ، وكان c عددًا حقيقيًّا ، فإن $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(c)$.

نهايات الدوال النسبية

إذا كانت $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ دالةً نسبية، وكان c عددًا حقيقيًّا، حيث $q(c) \neq 0$، فإن $\lim\limits_{x\to c} r(x) = r(c) = \dfrac{p(c)}{q(c)}$.

وبشكل مختصر، فإنه يمكن حساب نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية من خلال **التعويض المباشر** ، شريطة ألا يساوي مقام الدالة النسبية صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية.

مثال 2 — استعمال التعويض المباشر لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

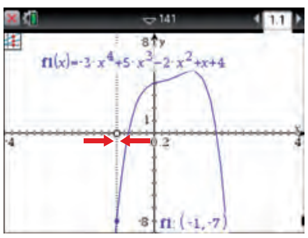
a) $\lim\limits_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4)$

بما أن هذه نهاية دالة كثيرة حدود، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to -1} (-3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4) = -3(-1)^4 + 5(-1)^3 - 2(-1)^2 + (-1) + 4$$

$$= -3 - 5 - 2 - 1 + 4 = -7$$

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x) = -3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + x + 4$ هذه النتيجة.



[−4, 4] scl: 0.2 by [−8, 8] scl: 1

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^3 - 6}{x - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامُها ليس صفرًا عندما $x = 3$ ، فيمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^3 - 6}{x - x^2} = \frac{2(3)^3 - 6}{3 - (3)^2}$$

$$= \frac{48}{-6}$$

$$= -8$$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها صفر عندما $x = 1$ ، فلا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

d) $\lim\limits_{x\to -6} \sqrt{x + 5}$

بما أن $\lim\limits_{x\to -6} (x+5) = -6+5 = -1 < 0$ ، فلا يمكننا حساب $\lim\limits_{x\to -6}\sqrt{x+5}$ بالتعويض المباشر.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

2A) $\lim\limits_{x\to 4} (x^3 - 3x^2 - 5x + 7)$

2B) $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

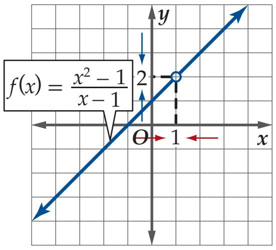
2C) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$

2D) $\lim\limits_{x\to -8} \sqrt{x + 6}$

لنفترض أنك استعملت خاصية القسمة أو التعويض المباشر لحساب النهاية $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ بشكل خاطئ كما يلي:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim\limits_{x\to 1} (x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to 1} (x - 1)} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

وهذا ليس صحيحًا؛ لأن نهاية المقام تساوي 0 .



يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ **الصيغة غير المحددة**؛ لأنه لا يمكنك تحديد نهاية الدالة مع وجود صفر في المقام، ومثل هذه النهايات قد تكون موجودة ولها قيمة حقيقية، أو غير موجودة، ويُبيِّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ أن $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1}$ موجودة وتساوي 2 .

على الرغم من أن الصيغة غير المحددة تظهر من خلال تطبيق خاطئ لخصائص النهايات، إلا أن الحصول على هذه الصيغة قد يرشدنا إلى الطريقة الأنسب لإيجاد النهاية.

إذا قمت بحساب نهاية دالة نسبية، ووصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ، فبسِّط العبارة جبريًّا من خلال تحليل كل من البسط والمقام واختصار العوامل المشتركة.

مثال 3 استعمال التحليل لحساب النهايات

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x\to-4} \frac{x^2-x-20}{x+4}$

ينتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{(-4)^2-(-4)-20}{-4+4}$ ؛ لذا فإن علينا تحليل المقدار جبريًّا، واختصار أي عوامل مشتركة بين البسط والمقام.

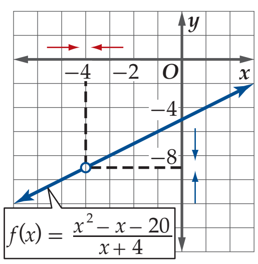
$$\lim_{x\to-4} \frac{x^2-x-20}{x+4} = \lim_{x\to-4} \frac{(x-5)(x+4)}{x+4}$$ حلِّل البسط

$$= \lim_{x\to-4} \frac{(x-5)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}}$$ اختصر العامل المشترك

$$= \lim_{x\to-4} (x-5)$$ بسِّط

$$= (-4)-5 = -9$$ عوِّض وبسِّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x^2-x-20}{x+4}$ هذه النتيجة.



b) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21}$

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0} = \frac{3-3}{3^3-3(3)^2-7(3)+21}$.

$$\lim_{x\to3} \frac{x-3}{x^3-3x^2-7x+21} = \lim_{x\to3} \frac{x-3}{(x^3-3x^2)+(-7x+21)}$$ أعد تجميع المقام

$$= \lim_{x\to3} \frac{x-3}{x^2(x-3)-7(x-3)}$$ أخرج العامل المشترك من الحدود المجمعة في المقام

$$= \lim_{x\to3} \frac{x-3}{(x^2-7)(x-3)}$$ أخرج العامل المشترك في المقام

$$= \lim_{x\to3} \frac{\cancel{x-3}}{(x^2-7)\cancel{(x-3)}}$$ اختصر

$$= \lim_{x\to3} \frac{1}{x^2-7}$$ بسِّط

$$= \frac{1}{(3)^2-7} = \frac{1}{2}$$ عوِّض وبسِّط

تنبيه!

التحليل

عند اختصار البسط بأكمله، فإنه يصبح **1** وليس **0** .

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

3A) $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3-3x^2-4x+12}{x+2}$

3B) $\lim\limits_{x\to6} \frac{x^2-7x+6}{3x^2-11x-42}$

ينتج عن اختصار العامل المشترك بين بسط ومقام الدالة النسبية دالة جديدة، ففي المثال 3a ينتج عن الاختصار بين بسط ومقام الدالة f دالة جديدة g، حيث:

$$f(x)=\frac{x^2-x-20}{x+4}\ ,\ g(x)=x-5$$

إن قيم هاتين الدالتين متساوية لجميع قيم x إلا عندما $x=-4$، فإذا تساوت قيم دالتين إلا عند قيمة وحيدة c، فإن نهايتيهما عندما تقترب x من c متساويتان؛ لأن قيمة النهاية لا تعتمد على قيمة الدالة عند النقطة التي تُحسبُ النهاية عندها؛ لذا فإن $\lim\limits_{x\to-4}(x-5)=\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2-x-20}{x+4}$.

والطريقة الأخرى لإيجاد نهايات ناتج التعويضِ فيها صيغة غير محددة، هي إنطاق البسط أو المقام أولًا، ثم اختصار العوامل المشتركة.

مثال 4 استعمال إنطاق البسط أو المقام لحساب النهايات

احسب $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$.

يَنتج عن التعويض المباشر $\frac{0}{0}=\frac{\sqrt{9}-3}{9-9}$ ؛ لذا أنطق البسط، ومن ثم اختصر العوامل المشتركة.

$$\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\cdot\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$ اضرب كلًا من البسط والمقام في $\sqrt{x}+3$، والذي يمثل مرافق $\sqrt{x}-3$

$$=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$ بسِّط

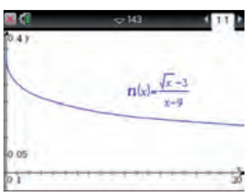
$$=\lim_{x\to9}\frac{\cancel{x-9}}{\cancel{(x-9)}(\sqrt{x}+3)}$$ اختصر العامل المشترك

$$=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$ بسِّط

$$=\frac{1}{\sqrt{9}+3}$$ عوِّض

$$=\frac{1}{6}$$ بسِّط

تحقق يعزِّز التمثيل البياني بالآلة البيانية للدالة $f(x)=\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ في الشكل المجاور هذه النتيجة.



[−0.1, 20] scl: 1 by [−0.05, 0.4] scl: 0.05

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

(4A $\lim\limits_{x\to25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$

(4B $\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{x}$

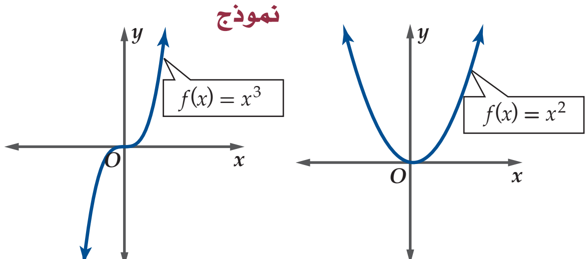
حساب النهايات عند المالانهاية: درست سابقًا أن لجميع الدوال الزوجية سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه، وكذلك الدوال الفردية لها جميعًا سلوك طرفي التمثيل البياني نفسه.

مفهوم أساسي نهايات دوال القوى عند المالانهاية

لأي عدد صحيح موجب n،

- $\lim\limits_{x\to\infty}x^n=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=\infty$ ، إذا كان n عددًا زوجيًا.
- $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ ، إذا كان n عددًا فرديًا.

نموذج



إن سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة كثيرة الحدود هو ذاته سلوك طرفي التمثيل البياني لدالة القوة الناتجة عن الحد الرئيس في كثيرة الحدود، وهو الحد ذو القوة الكبرى، ويمكننا وصف ذلك أيضًا باستعمال النهايات.

إرشادات للدراسة

الضرب في المالانهاية

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$

تعني أن الدالة تأخذ قيمًا موجبة ومتزايدة بشكل غير محدود، كلما اقتربت قيم x من العدد c؛ لذا فإن ضرب هذه القيم في عدد موجب لا يغير هذا السلوك، أما ضربها في عدد سالب، فإنه يعكس إشاراتها، وبذلك تقترب النهاية من $-\infty$ ، أي أنه إذا كان $a > 0$ فإن:

$a(\infty) = \infty,$

$-a(\infty) = -\infty$

مفهوم أساسي: نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

إذا كانت $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ دالة كثيرة حدود ، فإن

$$\lim_{x \to \infty} p(x) = \lim_{x \to \infty} a_n x^n \ , \ \lim_{x \to -\infty} p(x) = \lim_{x \to -\infty} a_n x^n$$

يمكنك استعمال هاتين الخاصيتين لحساب نهايات دوال كثيرات حدود عند المالانهاية. تذكَّر أن كون نهاية الدالة ∞ أو $-\infty$ لا يعني أنها موجودة، ولكنه وصف لسلوك منحناها؛ فإما أن يكون متزايدًا بلاحدود أو متناقصًا بلا حدود.

مثال 5: نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= -\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2)$

$\lim\limits_{x \to \infty} (4 + 3x - x^2) = \lim\limits_{x \to \infty} -x^2$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= -\lim\limits_{x \to \infty} x^2$ — خاصية الضرب في ثابت

$= -\infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5x^4 - 3x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 5x^4$ — نهاية دالة كثيرة الحدود عند المالانهاية

$= 5 \lim\limits_{x \to -\infty} x^4$ — خاصية الضرب في ثابت

$= 5 \times \infty = \infty$ — نهاية دالة القوة عند المالانهاية

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

5A) $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^3 - 4x^2 + 9)$ **5B)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$ **5C)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 6x^2 + 4x^5)$

ولحساب نهاية دالة نسبية عند المالانهاية نحتاج إلى خصائص أخرى للنهايات.

مراجعة المفردات

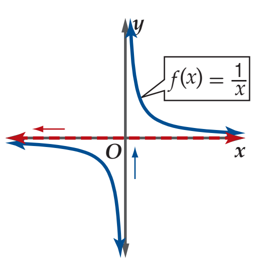
دالة المقلوب

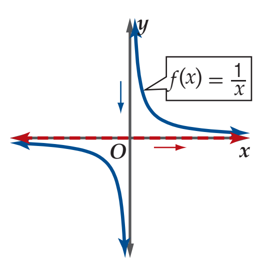
تذكر أن دالة المقلوب هي دالة $a(x)$ حيث ، $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ خطية ، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي: نهايات دالة المقلوب عند المالانهاية

إن نهاية دالة المقلوب عند موجب أو سالب مالانهاية هي صفر.

مثال: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$





نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

ويمكننا استعمال هذه الخاصية لحساب نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية ، وذلك بقسمة كل حد في بسط ومقام الدالة النسبية على أعلى قوة لمتغير الدالة.

مثال 6 نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

احسب كل نهاية مما يأتي إن أمكن:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+5}{8x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4x}{x}+\frac{5}{x}}{\frac{8x}{x}-\frac{3}{x}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{8-\frac{3}{x}}$$ بسّط

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 8 - 3\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{4+5\cdot 0}{8-3\cdot 0} = \frac{1}{2}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2-x}{3x^3+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^3

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}{3+\frac{1}{x^3}}$$ بسّط

$$= \frac{6\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والفرق، والضرب في ثابت

$$= \frac{6\cdot 0 - 0}{3+0} = 0$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{9x^3+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{9}{x}+\frac{2}{x^3}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي x^4

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 5}{9\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + 2\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{9\cdot 0 + 2\cdot 0} = \frac{5}{0}$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

وحيث إن نهاية المقام صفر، فإننا نكون قد طبقنا خطأً خاصية القسمة، إلا أننا نعلم أنه عند قسمة العدد 5 على قيم صغيرة موجبة تقترب من الصفر، فإن الناتج سيكون كبيرًا بشكلٍ غير محدود، أي أن النهاية هي ∞.

تحقق من فهمك

احسب كل نهاية مما يأتي:

6A) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x-10}$

6B) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-3x^2+7}{5x+1}$

6C) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^3-3x^2+1}{2x^3+4x}$

إرشادات للدراسة

نهاية الدوال النسبية

توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية إما ∞ أو $-\infty$، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

درست سابقًا أن المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة من الأعداد الطبيعية، ومداها مجموعة من الأعداد الحقيقية؛ لذا فإن نهاية المتتابعة غير المنتهية هي نهاية دالة عندما $n \to \infty$. إذا كانت النهاية موجودة، فإن قيمة هذه النهاية هي العدد الذي تقترب منه المتتابعة . فمثلًا يمكن وصف المتتابعة $\dots , \frac{1}{4} , \frac{1}{3} , \frac{1}{2} , a_n = 1$ بـ $f(n) = \frac{1}{n}$ ، حيث n عدد صحيح موجب . وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ، فإن المتتابعة تقترب من الصفر.

مثال 7 نهايات المتتابعات

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+5}$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$$ خصائص القسمة، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{3+0}{1+5 \cdot 0} = 3$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 3 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 3 .

تحقق كوّن جدولًا، واختر قيمًا متعددة لـ n.

n	1	20	40	60	80	90	100	1000	10000
a_n	0.6667	2.44	2.6889	2.7846	2.8353	2.8526	2.8667	2.9861	2.9986

نلاحظ أن حدود المتتابعة تقترب من العدد 3 كلما كبرت n .

b) $b_n = \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$

لحساب نهاية المتتابعة، أوجد:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n^4}\left[\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}\right]$$ ربّع ثنائية الحد

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$$ اضرب

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 5 + 10\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + 5\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 4}$$ اقسم كل حد على أعلى قوة، وهي n^4 ، ثم استعمل خصائص القسمة ، والمجموع، والضرب في ثابت

$$= \frac{5}{4} = 1.25$$ نهايتا الدالة الثابتة ودالة المقلوب عند المالانهاية

أي أن نهاية المتتابعة هي 1.25 ، بمعنى أن حدود المتتابعة تقترب من 1.25.

تحقَّق كوّن جدول قيم، واختر قيمًا كبيرة لـ n . قيم b_n في الجدول أدناه مقربة إلى أقرب جزء من مئة)

n تقترب من ∞

n	10	100	1000	10000	100000
b_n	1.51	1.28	1.25	1.25	1.25

تحقق من فهمك

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إن وجدت:

7A) $a_n = \frac{4}{n^2+1}$

7B) $b_n = \frac{2n^3}{3n+8}$

7C) $c_n = \frac{9}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$

تدرب وحل المسائل

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي: (مثال 1)

(1 $\lim_{x \to -3} (5x - 10)$

(2 $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 + 4x + 13}{x - 3}$

(3 $\lim_{x \to 9} \left(\frac{1}{x} + 2x + \sqrt{x}\right)$

(4 $\lim_{x \to -4} [x^2(x + 1) + 2]$

(5 $\lim_{x \to 12} \frac{x^2 - 10x}{\sqrt{x + 4}}$

(6 $\lim_{x \to -6} \frac{x^4 - x^3}{x^2}$

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب: (مثال 2)

(7 $\lim_{x \to 16} \frac{x^2 + 9}{\sqrt{x} - 4}$

(8 $\lim_{x \to 2} (4x^3 - 3x^2 + 10)$

(9 $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 + 9x + 6}{x^2 + 5x + 6}$

(10 $\lim_{x \to 3} \sqrt{2 - x}$

(11 $\lim_{x \to 9} (3x^2 - 10x + 35)$

(12 $\lim_{x \to 10} (-x^2 + 3x + \sqrt{x})$

(13 **فيزياء:** بحسب نظرية آينشتاين النسبية، فإن كتلة جسم يتحرك بسرعة v تُعطى بالعلاقة $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$، حيث c سرعة الضوء، m_0 كتلة الجسم الابتدائية أو كتلته عندالسكون.
أوجد $\lim_{v \to 0} m$ ، ووضّح العلاقة بين هذه النهاية و m_0 . (مثال 2)

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 3, 4)

(14 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

(15 $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$

(16 $\lim_{x \to -5} \frac{4x^2 + 21x + 5}{3x^2 + 17x + 10}$

(17 $\lim_{x \to 0} \frac{2x}{3 - \sqrt{x + 9}}$

(18 $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3}$

(19 $\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{x + 3} - 3}{x - 6}$

احسب كل نهاية مما يأتي: (المثالان 5, 6)

(20 $\lim_{x \to \infty} (5 - 2x^2 + 7x^3)$

(21 $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 10x + 2}{4x^3 + 20x^2}$

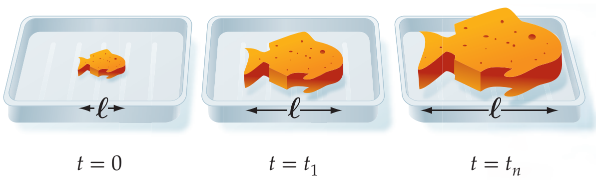
(22 $\lim_{x \to \infty} (10x + 14 + 6x^2 - x^4)$

(23 $\lim_{x \to \infty} \frac{14x^3 - 12x}{4x^2 + 13x - 8}$

(24 $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^3 + 2x - 11}{-x^5 + 17x^3 + 4x}$

(25 $\lim_{x \to \infty} \frac{10x^4 - 2}{5x^4 + 3x^3 - 2x}$

(26 **إسفنج:** تحتوي مادة هلامية على حيوان الإسفنج، وعند وضع المادة الهلامية في الماء، فإن حيوان الإسفنج يبدأ بامتصاص الماء والتضخم. ويمكن تمثيل ذلك بالدالة $\ell(t) = \frac{105t^2}{10 + t^2} + 25$ ، حيث ℓ طول حيوان الإسفنج بالملمترات بعد t ثانية من وضعه في الماء. (مثال 6)



a) ما طول حيوان الإسفنج قبل وضعه في الماء؟

b) ما نهاية الدالة عندما $t \to \infty$؟

c) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة ℓ وطول حيوان الإسفنج.

احسب نهاية كل متتابعة مما يأتي إذا كانت موجودة: (مثال 7)

(27 $a_n = \frac{8n + 1}{n^2 - 3}$

(28 $a_n = \frac{-4n^2 + 6n - 1}{n^2 + 3n}$

(29 $a_n = \frac{12n^2 + 2}{6n^2 - 1}$

(30 $a_n = \frac{8n^2 + 5n + 2}{3 + 2n}$

(31 $a_n = \frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n + 1)^2}{4}\right]$

(32 $a_n = \frac{12}{n^2}\left[\frac{n(2n + 1)(n + 1)}{6}\right]$

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة مستخدمًا التعويض المباشر لحساب النهايتين من اليمين واليسار:

(33 $\lim_{x \to -2} \begin{cases} x - 3, & x \le -2 \\ 2x - 1, & x > -2 \end{cases}$

(34 $\lim_{x \to 0} \begin{cases} 5 - x^2, & x \le 0 \\ 5 - x, & x > 0 \end{cases}$

(35 $\lim_{x \to 2} \begin{cases} (x - 2)^2 + 1, & x \le 2 \\ x - 6, & x > 2 \end{cases}$

احسب كل نهاية مما يأتي، إذا كانت موجودة:

36) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x}$

37) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x + 2^x - \cos x)$

38) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x}$

39) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}$

أوجد $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ لكل دالة مما يأتي:

40) $f(x) = 2x - 1$

41) $f(x) = 7 - 9x$

42) $f(x) = \sqrt{x}$

43) $f(x) = \sqrt{x + 1}$

44) $f(x) = x^2$

45) $f(x) = x^2 + 8x + 4$

46) **فيزياء:** يمتلك الجسم المتحرك طاقةً تُسمى الطاقة الحركية؛ لأن بإمكانه بذل شغل عند تأثيره على جسم آخر. وتُعطى الطاقة الحركية لجسم متحرك بالعلاقة $k(t) = \frac{1}{2} m \cdot (v(t))^2$، حيث $v(t)$ سرعة الجسم عند الزمن t، و m كتلته بالكيلوجرام. إذا كانت سرعة جسم $v(t) = \dfrac{50}{1 + t^2}$ لكل $t \geq 0$، وكتلته $1\,\text{kg}$، فما الطاقة الحركية التي يمتلكها عندما يقترب الزمن من $100\,\text{s}$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

47) **برهان:** استعمل خصائص النهايات؛ لإثبات أنه لأي كثيرة حدود

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ولأي عدد حقيقي c، فإن $\lim\limits_{x \to c} p(x) = p(c)$

48) **برهان:** استعمل الاستقراء الرياضي؛ لإثبات أنه إذا كان $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$، فإنه لأي عدد صحيح n

$\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to c} f(x)]^n = L^n$.

49) **تحدٍّ:** احسب النهاية الآتية إذا كانت $a_n \neq 0 , b_m \neq 0$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

(إرشاد: افترض كلًّا من الحالات $m < n, m = n, m > n$)

50) **تبرير:** إذا كانت $r(x)$ دالة نسبية، فهل العلاقة $\lim\limits_{x \to c} r(x) = r(c)$ صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا؟ برِّر إجابتك.

51) **اكتب:** استعمل جدولًا لتنظيم خصائص النهايات، وضمِّنه مثالًا على كل خاصية.

تدريب على اختبار

52) ما قيمة $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2h^3 - h^2 + 5h}{h}$ ؟

A 3

B 4

C 5

D غير موجودة

53) ما القيمة التي تقترب منها $g(x) = \dfrac{x + \pi}{\cos (x + \pi)}$ عندما تقترب x من 0 ؟

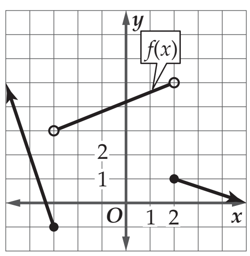
A $-\pi$

B $-\frac{3}{4}$

C $-\frac{1}{2}\pi$

D 0

54) باستعمال التمثيل البياني للدالة f أدناه، ما قيمة $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ؟



A 0

B 1

C 5

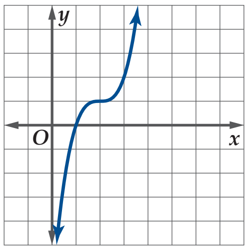
D غير موجودة

استكشاف
5-3

معمل الحاسبة البيانية :
ميل المنحنى
The Slope of a Curve

الهدف
استعمال الحاسبة البيانية TI — nspire ؛ لتقدير ميل منحنى.

يعتبر ميل المستقيم بوصفه معدلًا ثابتًا للتغير مفهومًا واضحًا، إلا أن الميل ليس واضحًا بالنسبة للمنحنيات بصورة عامة؛ إذ يتغير ميل المنحنى عند كل نقطة عليه.



وبشكل عام فإن التمثيلات البيانية لمعظم الدوال تبدو خطيةً عند تفحُّصها على فترةٍ قصيرة جدًّا.

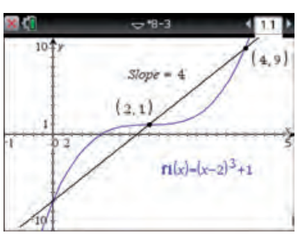
وبالنظر إلى القواطع المتتالية، يكون من الممكن تطبيق فكرة الميل على المنحنيات.

نشـاط 1 خطوط القاطع

قدّر ميل منحنى الدالة $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة (3, 2).

خطوة 1 أدخل $y = (x-2)^3 + 1$ في **f1**، ثم احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ ، عندما $x = 4$, $x = 2$. كما يلي:

- مثِّل الدالة بالضغط على on، ثم اكتب الدالة واضغط. enter
- حدِّد نقطتين على منحنى الدالة بالضغط على مفتاح menu واختيار 8: الهندسة ، ثم 1: النقاط والمستقيمات واختيار 2: نقطة على المستقيم ، ثم الضغط على المنحنى مرتين وستظهر نقطتان.
- ظلِّل إحداثيِّي x لكلا النقطتين واستبدلها بالإحداثيين $x = 2, x = 4$.
- ارسم القاطع المار بالنقطتين بالضغط على menu، واختيار 8: الهندسة ، ثم 1: النقاط والمستقيمات ثم اختيار 4: مستقيم واضغط على النقطتين ثم اضغط esc.

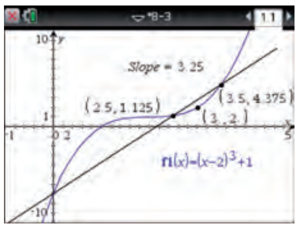


[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

- أوجد ميل القاطع بالضغط على menu، واختيار 8: الهندسة ، ثم 3: الميل ، ثم اضغط على القاطع وسيظهر أن ميله يساوي 4.

خطوة 2 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 3.5$, $x = 2.5$.

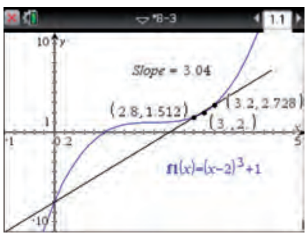
ظلّل إحداثيّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 2.5, x = 3.5$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.25



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

خطوة 3 احسب ميل القاطع المار بمنحنى: $y = (x-2)^3 + 1$ عندما $x = 3.2$, $x = 2.8$.

ظلّل إحداثيّي x لكلا النقطتين واستبدلهما بالإحداثيين $x = 2.8, x = 3.8$، فيكون ميل القاطع يساوي 3.04



[−1, 5] scl: 0.2 by [−10, 10] scl: 1

خطوة 4 أوجد ميل 3 قواطع أخرى في فترات متناقصة حول النقطة $(3, 2)$.

كلّما نقص طول الفترة حول النقطة $(3, 2)$، فإن ميل القاطع يقترب أكثر من العدد 3؛ لذا فإن ميل منحنى $y = (x-2)^3 + 1$ عند النقطة $(3, 2)$ هو 3 تقريبًا.

تمارين :

قدِّر ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(1 $y = (x+1)^2, (-4, 9)$

(2 $y = x^3 - 5, (2, 3)$

(3 $y = 4x^4 - x^2, (0.5, 0)$

(4 $y = \sqrt{x}, (1, 1)$

حلِّل النتائج

(5 **حلّل:** صف ما يحدث لقاطع منحنى دالة عندما تقترب نقاط التقاطع من نقطة معطاة (a, b) على المنحنى.

(6 **خمّن:** صِف كيف يمكنك إيجاد القيمة الفعلية لميل منحنى عند نقطة معطاةٍ عليه.

5-3

المماس والسرعة المتجهة
Tangent Line and Velocity

فيما سبق:
درست ميل المستقيم وطريقة إيجاده

والآن:
- أجدُ مُعدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بحساب ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- أجدُ السرعة المتوسطة المتجهة والسرعة المتجهة اللحظية.

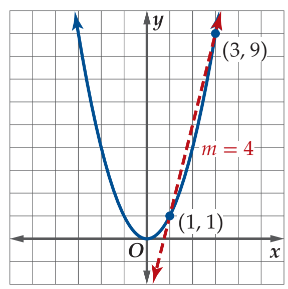
المفردات:
المماس
tangent line
مُعدل التغيّر اللحظي
instantaneous rate of change
قسمة الفرق
difference quotient
السرعة المتجهة اللحظية
instantaneous velocity

www.obeikaneducation.com

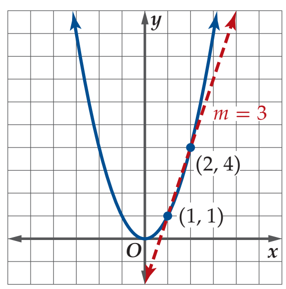
لماذا؟

عندما يقفز المظلي من ارتفاع 15000 ft، فإن سرعته في اتجاه الأرض تزداد مع مرور الزمن؛ بسبب تسارع الجاذبية الأرضية، وتستمر سرعته في الازدياد حتى يفتح مظلته عند ارتفاع 2500 ft ، أو عندما يصل إلى السرعة المتجهة الحدية، وهي السرعة المتجهة التي ينعدم عندها تسارع المظلي، ويحدث هذا عندما تصبح محصلة القوى عليه صفرًا.

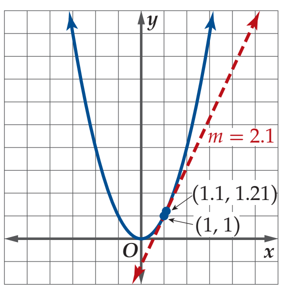
المماسات: تعلمت سابقًا أن مُعدّل تغيّر منحنى دالة غير خطية يتغير من نقطة إلى أخرى عليه، ويمكن حساب متوسط مُعدّل تغيّر الدالة غير الخطية على فترة باستعمال ميل القاطع. ففي التمثيلات البيانية أدناه للدالة $y = x^2$ والقاطع الذي يقطعه مارًّا بالنقطة $(1, 1)$ ، وبنقطة أخرى مثل $(3, 9)$ ، أو $(2, 4)$، أو $(1.1, 1.21)$ ، تجد أن القاطع يتخذ أوضاعًا مختلفة يتغير خلالها ميله.



الشكل (1)

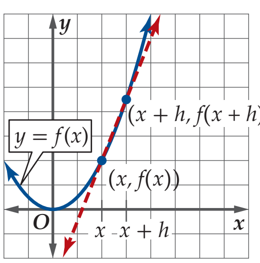


الشكل (2)



الشكل (3)

لاحظ أنه كلما قصُر طولُ الفترة بين نقطتي التقاطع ، زادت دِقَّةُ تقريب ميل القاطع لميل المنحنى في هذه الفترة. إذا واصلنا تقصير الفترة إلى درجة تكون فيها نقطة التقاطع الأخرى قريبة جدًا من النقطة $(1, 1)$ كما في الشكل (3) أعلاه، وتستمر حتى حدّ الانطباق، فإننا نحصل على **مماس** للمنحنى، وهو مستقيم يتقاطع مع المنحنى، ولكنه لا يعبره عند نقطة التماس. ويمثِّل ميل هذا المستقيم ميل المنحنى عند نقطة التماس.



ولتعريف ميل المماس لمنحنى عند النقطة $(x, f(x))$ فإنه يمكننا الرجوع إلى صيغة ميل القاطع المار بالنقطتين $(x, f(x))$ و $(x + h, f(x + h))$ كما في الشكل المجاور، ومنه يمكن كتابة ميل القاطع بالصيغة:

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتُسَمَّى هذه الصيغة **قسمة الفرق**.

فكلما اقتربت النقطة $(x+h, f(x+h))$ من النقطة $(x, f(x))$ ؛ أي كلما اقتربت قيمة h من الصفر، فإن القاطع يقترب من مماس المنحنى عند النقطة $(x, f(x))$؛ لذا يمكننا حساب ميل المماس وهو **مُعدل التغيّر اللحظي** للدالة عند تلك النقطة على أنه نهاية ميل القاطع عندما $h \to 0$.

قراءة الرياضيات
اختصارات
يمكن اختصار الجملة ميل المماس لمنحنى الدالة بميل المنحنى.

مفهوم أساسي — مُعدل التغيّر اللحظي

مُعدل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$ ، ويُعطى بالصيغة $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ، بشرط أن تكون النهاية موجودة.

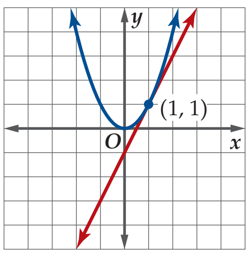
إرشادات للدراسة

مُعدل التغيّر اللحظي
عند حساب نهاية ميل المستقيم القاطع عندما $h \to 0$، فإن الحدود الباقية بعد إجراء الاختصارات، والتي تحتوي المتغير h ستصبح أصفارًا.

يمكنك استعمال صيغة معدل التغيّر اللحظي لإيجاد ميل مماس منحنى عند نقطة عليه.

مثال 1 ميل المماس لِلمنحنى عند نقطة عليه

أوجد ميل مماس منحنى الدالة $y = x^2$ الممثّلة بالشكل أدناه عند النقطة$(1, 1)$.



$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدّل التغيّر اللحظي

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$ $x = 1$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h}$$ $f(1+h) = (1+h)^2 ,\ f(1) = 1^2$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$ فك المقدار $(1+h)^2$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2+h)}{h}$$ بسّط

$$= \lim_{h\to 0} (2+h)$$ اقسم على h

$$= 2 + 0 = 2$$ عوّض وبسّط

أي أن ميل منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(1, 1)$ هو 2.

تحقق: من خلال التمثيل البياني للمنحنى ومماسه عند النقطة $(1, 1)$ نلاحظ أن ميل المستقيم الذي يمثِّل المماس يساوي 2 .

تحقق من فهمك

أوجد ميل مماس كل منحنى مما يأتي عند النقطة المعطاة:

(1A $y = x^2, (3, 9)$ **(1B** $y = x^2 + 4, (-2, 8)$

كما يمكنك استعمال صيغة مُعدل التغيّر اللحظي لإيجاد معادلة ميل المنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه .

مثال 2 ميل المنحنى عند أي نقطة عليه

أوجد معادلة ميل منحنى $y = \frac{4}{x}$ عند أي نقطة عليه.

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة مُعدل التغيّر اللحظي

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$ $f(x+h) = \frac{4}{x+h} ,\ f(x) = \frac{4}{x}$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-4h}{x(x+h)}}{h}$$ اطرح الكسرين في البسط، ثم بسّط

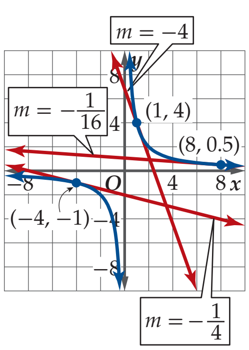
$$m = \lim_{h\to 0} \frac{-4h}{xh(x+h)}$$ بسّط

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{-4}{x^2 + xh}$$ اقسم على h، ثم اضرب

$$m = \frac{-4}{x^2 + x(0)}$$ عوّض

$$m = \frac{-4}{x^2}$$ بسّط

أي أن ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة $(x, f(x))$ عليه هو $m = -\frac{4}{x^2}$، والشكل المجاور يبين ميل المنحنى عند ثلاث نقط مختلفة.



تحقق من فهمك

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه:

(2A $y = x^2 - 4x + 2$ **(2B** $y = x^3$

السرعة المتجهة اللحظية: تعلمت طريقة حساب السرعة المتوسطة لجسم يقطع مسافة $f(t)$ في زمن مقداره t، من خلال قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي استغرقه الجسم لقطع تلك المسافة. والسرعة المتجهة هي سرعة لها اتجاه. ويمكنك إيجاد السرعة المتوسطة المتجهة بالطريقة نفسها التي أوجدت بها السرعة المتوسطة مع توضيح اتجاهها باستعمال الإشارة في الناتج، فالإشارة الموجبة للناتج تعني اتجاه الأمام أو الأعلى، أما الإشارة السالبة فتعني اتجاه الخلف أو الأسفل.

إرشادات للدراسة

موقع الجسم

موقع الجسم عادة يعطى بالعلاقة $y = f(x)$ وذلك لتحديد الموقع في المستوى بدلالة الإحداثيين x, y، أما إذا أعطي بوصفه دالة في الزمن t، فهذا يعني الإزاحة (محصلة المركبة x والمركبة y) لموقع الجسم عند اللحظة t، وإذا كانت الحركة على خط مستقيم فإن دالة الموقع تكون نفسها دالة المسافة مع أخذ الاتجاه بعين الاعتبار.

مفهوم أساسي — السرعة المتوسطة المتجهة

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$، فإن السرعة المتوسطة المتجهة للجسم v_{avg} في الفترة الزمنية من a إلى b تُعطى بالصيغة

$$v_{avg} = \frac{\text{التغيّر في المسافة}}{\text{التغيّر في الزمن}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

مثال 3 من واقع الحياة — السرعة المتوسطة المتجهة

جري: تمثِّل المعادلة $f(t) = -1.3t^2 + 12t$ المسافة بالأميال، والتي قطعها عدّاء بعد t ساعة باتجاه خط النهاية. ما سرعته المتوسطة المتجهة بين الساعتين الثانية والثالثة من زمن السباق؟

أوجد أولًا المسافة الكلية التي قطعها العدَّاء عند الزمن 3 ، $a = 2 , b = 3$.

$f(t) = -1.3t^2 + 12t$	المعادلة الأصلية	$f(t) = -1.3t^2 + 12t$
$f(3) = -1.3(3)^2 + 12(3)$	$a = 2 , b = 3$	$f(2) = -1.3(2)^2 + 12(2)$
$f(3) = 24.3$	بسّط	$f(2) = 18.8$

استعمل الآن صيغة السرعة المتوسطة المتجهة.

$$v_{avg} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$ صيغة السرعة المتوسطة المتجهة

$$= \frac{24.3 - 18.8}{3 - 2}$$ $f(b) = 24.3 ,\ f(a) = 18.8,\ b = 3 ,\ a = 2$

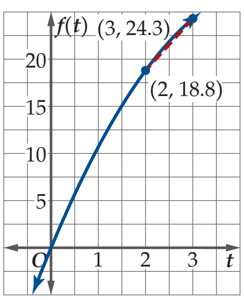
$$= 5.5$$ بسّط

أي أن السرعة المتوسطة المتجهة للعدّاء بين الساعتين الثانية والثالثة هي 5.5 mi/h إلى الأمام.

✓ تحقق من فهمك

3) **بالون:** تمثِّل $h(t) = 5 + 65t - 16t^2$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لبالون يصعد رأسيًّا، ما السرعة المتوسطة المتجهة للبالون بين $t = 1$ s ، $t = 2$ s؟

إذا أمعنَّا النظر في إجابة المثال 3، نجد أنه تم حساب السرعة المتوسطة المتجهة من خلال إيجاد ميل القاطع الذي يمر بالنقطتين (2, 18.8) ، (3, 24.3) كما في الشكل المجاور. والسرعة المتجهة التي تم حسابها هي السرعة المتوسطة المتجهة خلال فترة زمنية، وليست **السرعة المتجهة اللحظية**، والتي تساوي سرعة الجسم المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة.



ولإيجاد سرعة العدّاء المتجهة عند لحظةٍ زمنيةٍ محددة t، فإننا نجد مُعدّل التغير اللحظي لمنحنى $f(t)$ عند تلك اللحظة.

إرشادات للدراسة

سبق أن عرفت عند دراسة الإحداثيات القطبية أن الاتجاه له دلالة خاصة في المسافة المتجهة والزاوية المتجهة، كذلك فإن الاتجاه في السرعة المتجهة له دلالة خاصة.

مفهوم أساسي — السرعة المتجهة اللحظية

إذا أُعطي موقع جسم متحرك بوصفه دالة في الزمن $f(t)$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لذلك الجسم عند الزمن t تعطى بالصيغة

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h}$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية عند لحظة زمنية معينة

سقطت كرة من قمة بناية ارتفاعها 2000 ft ، وتمثِّل الدالة $f(t) = 2000 - 16t^2$ ارتفاع الكرة عن سطح الأرض بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للكرة بعد 5 s.

لإيجاد السرعة المتجهة اللحظية، افترض أن $t = 5$ ، وطبق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$v(5) = \lim_{h \to 0} \frac{2000 - 16(5+h)^2 - [2000 - 16(5)^2]}{h}$$ $f(5+h) = 2000 - 16(5+h)^2,\ f(5) = 2000 - 16(5)^2$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-160h - 16h^2}{h}$$ فك المقدار $(5+h)^2$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(-160 - 16h)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (-160 - 16h)$$ اقسم على h

$$= -160 - 16(0) = -160$$ عوّض وبسّط

أي أن سرعة الكرة بعد 5 s هي 160 ft/s، أما الإشارة السالبة فتعني أن الكرة تهبط لأسفل.

تحقق من فهمك

4) سقطت علبة مادة التنظيف من يد عامل في أثناء قيامه بتنظيف نافذة بناية على ارتفاع 1400 ft عن سطح الأرض، وتمثل الدالة $f(t) = 1400 - 16t^2$ ارتفاع العلبة بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها. أوجد السرعة المتجهة اللحظية للعلبة $v(t)$ بعد 7 s .

تنبيه!

التعويض

تذكر أن توزِّع الإشارة السالبة إلى يسار $f(t)$ على كل حد فيها.

يمكن إيجاد معادلة للسرعة المتجهة اللَّحظية عند أي زمن.

مثال 5 السرعة المتجهة اللحظية عند أي لحظة زمنية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن .

طبِّق صيغة السرعة المتجهة اللحظية.

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$ صيغة السرعة المتجهة اللحظية

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1 - [18t - 3t^3 - 1]}{h}$$ $s(t+h) = 18(t+h) - 3(t+h)^3 - 1,\ s(t) = 18t - 3t^3 - 1$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{18h - 9t^2h - 9th^2 - 3h^3}{h}$$ فك المقدار $(t+h)^3$ واضرب وبسّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)}{h}$$ حلّل

$$= \lim_{h \to 0} (18 - 9t^2 - 9th - 3h^2)$$ اقسم على h

$$= 18 - 9t^2 - 9t(0) - 3(0)^2$$ عوّض

$$= 18 - 9t^2$$ بسّط

أي أنَّ معادلة سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند أي زمن هي $v(t) = 18 - 9t^2$.

تحقق من فهمك

5) تمثِّل الدالة $s(t) = 90t - 16t^2$ ارتفاع صاروخ بعد t ثانية من إطلاقه رأسيًّا من مستوى سطح البحر ، حيث الارتفاع بالأقدام. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ عند أي زمن .

تدرب وحل المسائل

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $y = x^2 - 5x$, $(1, -4)$, $(5, 0)$

2) $y = 6 - 3x$, $(-2 , 12)$, $(6, -12)$

3) $y = \frac{3}{x}$, $(1, 3)$, $(3, 1)$

4) $y = x^3 + 8$, $(-2, 0)$, $(1, 9)$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالة مما يأتي عند أي نقطة عليه: (مثال 2)

5) $y = 4 - 2x$

6) $y = -x^2 + 4x$

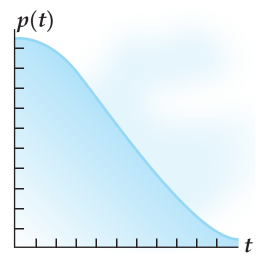
7) $y = 8 - x^2$

8) $y = \frac{1}{x^2}$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

10) $y = -2x^3$

11) **تزلج:** تمثِّل الدالة $p(t) = 0.06t^3 - 1.08t^2 + 51.84$ موقع متزلج على سفح جليدي بعد t ثانية من انطلاقه. (مثال 2)



a) أوجد معادلة ميل السفح الجليدي عند أي زمن.

b) أوجد الميل عندما $t = 2s, 5s, 7s$.

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأميال بعد t دقيقة. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم بالميل لكل ساعة في الفترة الزمنية المعطاة. (تذكر بأن تحوِّل الدقائق إلى ساعات): (مثال 3)

12) $s(t) = 0.4t^2 - \frac{1}{20}t^3$, $3 \leq t \leq 5$

13) $s(t) = 1.08t - 30$, $4 \leq t \leq 8$

14) $s(t) = 0.01t^3 - 0.01t^2$, $4 \leq t \leq 7$

15) $s(t) = -0.5(t - 5)^2 + 3$, $4 \leq t \leq 4.5$

16) تمثِّل المعادلة $f(t) = -16t^2 + 65t + 12$ الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قذفت إلى أعلى، ما السرعة المتوسطة المتجهة للكرة بين $t = 15, 2t$. (مثال 3)

تمثِّل $f(t)$ في كلٍّ مما يأتي بُعد جسم متحرك عن نقطة ثابتة بالأقدام بعد t ثانية. أوجد السرعة المتجهة اللَّحظية لهذا الجسم عند الزمن المُعطى: (مثال 4)

17) $f(t) = 100 - 16t^2, t = 3$

18) $f(t) = 38t - 16t^2, t = 0.8$

19) $f(t) = -16t^2 - 400t + 1700, t = 3.5$

20) $f(t) = 1275 - 16t^2, t = 3.8$

21) $f(t) = 73t - 16t^2, t = 4.1$

22) $f(t) = -16t^2 + 1100, t = 1.8$

تمثِّل $s(t)$ في كلٍّ مما يأتي المسافة التي يقطعها جسم متحرك. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن: (مثال 5)

23) $s(t) = 14t^2 - 7$

24) $s(t) = t - 3t^2$

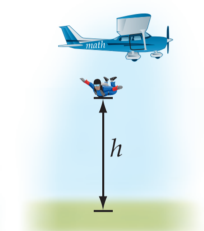
25) $s(t) = 5t + 8$

26) $s(t) = 18 - t^2 + 4t$

27) $s(t) = 12t^2 - 2t^3$

28) $s(t) = 3t^3 - 20 + 6t$

29) **قفز مظلي:** يمكنُ وصفُ ارتفاع مظلي بالأقدام عن سطح الأرض بعد t ثانية من قفزه بالدالة $f(t) = 15000 - 16t^2$. (الأمثلة 3, 4, 5)



a) أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للمظلي بين الثانيتين الثانية والخامسة من القفز.

b) كم بلغت السرعة المتجهة اللحظية للمظَلِّي عند الثانية الثانية، وعند الثانية الخامسة؟

c) أوجد معادلة سرعة المظلي المتجهة اللحظية عند أي زمن.

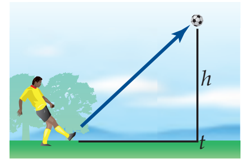
30) **غوص:** يُبيِّنّ الجدول أدناه ارتفاع غواص d مقربًا لأقرب جزء من عشرة بالأمتار عن سطح الماء بعد t ثانية من قفزه من مكان مرتفع نحو الماء.

t	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
d	43.8	42.3	40.1	34	25.3	14.3	0.75

a) احسب السرعة المتوسطة المتجهة للغواص في الفترة الزمنية $0.5 \leq t \leq 1.0$.

b) إذا كانت معادلة المنحنى لنقاط الجدول هي $d(t) = -4.91t^2 - 0.04t + 45.06$، فأوجد معادلة سرعة الغواص المتجهة اللحظية $v(t)$ بعد t ثانية، ثم استعمل $v(t)$ لحساب سرعته بعد 3s.

31) **كرة القدم:** ركل سلمان كرة بسرعة رأسية قدرها $75\ ft/s$.
افترض أن ارتفاع الكرة بالأقدام بعد t ثانية مُعطى بالدالة
$f(t) = -16t^2 + 75t + 2.5$.



a) أوجد معادلة سرعة الكرة المتجهة اللحظية $v(t)$.

b) ما سرعة الكرة المتجهة بعد $0.5\,s$ من ركلها؟

c) إذا علمت أن السرعة المتجهة اللحظية للكرة لحظة وصولها إلى أقصى ارتفاع هي صفر، فمتى تصل إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟

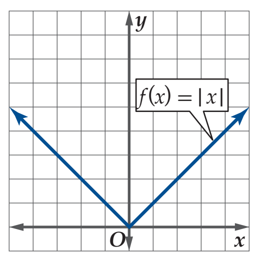
32) **فيزياء:** تعطى المسافة التي يقطعها جسم يتحرك على مسار مستقيم بالمعادلة $d(t) = 3t^3 + 8t + 4$ ، حيث t الزمن بالثواني ، و d المسافة بالأمتار.

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للجسم $v(t)$ عند أي زمن.

b) استعمل $v(t)$ لحساب سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2\,s, 4\,s, 6\,s$

مسائل مهارات التفكير العليا

33) **اكتشف الخطأ:** سُئل علي وجميل أن يصفا معادلة ميل مماس منحنى الدالة الممثَّلة بيانيًا في الشكل المجاور عند أي نقطة على منحناها. فقال علي: إن معادلة الميل ستكون متصلة ؛ لأن الدالة الأصلية متصلة ، في حين قال جميل: إن معادلة الميل لن تكون متصلة. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.



34) **تحدٍّ:** أوجد معادلة ميل مماس منحنى $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x$ عند أي نقطة عليه.

35) **تبرير:** هل العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة " يقطع المماس منحنى الدالة عند نقطة التماس فقط"؟ برِّر إجابتك.

36) **تبرير:** صح أم خطأ: إذا أُعطيت المسافة التي يقطعها جسم بعد t ثانية بـ $s(t) = at + b$ ، فإن السرعة المتجهة اللحظية للجسم تساوي a دائمًا. برِّر إجابتك.

37) **اكتب** بيِّن لماذا تكون السرعة المتجهة اللحظية لجسم متحرك صفرًا عند نقطة القيمة العظمى والصغرى لدالة المسافة.

تدريب على اختبار

38) ما معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند أي نقطة عليه؟

A $m = 4x$
B $m = 2x$
C $m = x$
D $m = -4x$

39) سقطت كرة بشكل رأسي، فكانت المسافة التي تقطعها بالأقدام بعد t ثانية تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$. إذا كانت $\lim\limits_{h \to 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h}$ تمثِّل السرعة المتجهة للكرة بعد $2\,s$ ، فكم تساوي هذه السرعة ؟

A $46\ ft/s$
B $58\ ft/s$
C $64\ ft/s$
D $72\ ft/s$

40) ماميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة $(3, 34)$؟

A -9
B 9
C 27
D 34

الوحدة 5

اختبار منتصف الوحدة

الدروس من 5-1 إلى 5-3

قدِّر –إن أمكن– كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني للدالة: (الدرس 5-1)

1) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$

2) $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$

3) $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2-18}{x-3}$

4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos x - 1}{x}$

5) $\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x^2+1}$

6) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x^3+3}$

7) $\lim_{x\to -4} \frac{\sqrt{x+20}}{x}$

8) $\lim_{x\to 3} \frac{|4-x|}{\sqrt{3x}}$

9) تزداد قيمة تحفة فنية فريدة سنويًّا بحيث تُعطى قيمتها بآلاف الدراهم بعد t سنة بالعلاقة $v(t)=\frac{400t+2}{2t+15}$. (الدرس 5-1)

a) مثِّل الدالة $v(t)$ بيانيًّا في الفترة $0 \le t \le 10$.

b) استعمل التمثيل البياني؛ لتقدير قيمة التحفة الفنية عندما $t = 2, 5, 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

d) وضّح العلاقة بين النهاية وسعر التحفة الفنية.

احسب كل نهاية مما يأتي بالتعويض المباشر، إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب. (الدرس 5-2)

10) $\lim_{x\to 9} \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-3}$

11) $\lim_{x\to -2} (2x^3+x^2-8)$

12) **حياة بريَّة:** يمكن تقدير عدد الغزلان بالمئات في محمية بالعلاقة $P(t)=\frac{10t^3-40t+2}{2t^3+14t+12}$ ، وذلك بعد t سنة، حيث $t \ge 3$. ما أكبر عدد للغزلان يمكن أن يوجد في هذه المحمية؟ (الدرس 5-2)

احسب كل نهاية مما يأتي إذا كانت موجودة: (الدرس 5-2)

13) $\lim_{x\to\infty} (15-x^2+8x^3)$

14) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x-2}{4x^3+5x^2}$

15) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-1}{2x^4-14x^2+2}$

16) $\lim_{x\to\infty} (10x^3-4+x^2-7x^4)$

17) **اختيار من متعدد:** قدِّر $\lim_{x\to 0} \frac{2x^2+5}{10-(2.7)^{\frac{16}{x}}}$ (الدرس 5-1)

A غير موجودة

B $\frac{1}{2}$

C ∞

D $-\infty$

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة: (الدرس 5-3)

18) $y = x^2 - 3x$, $(2, -2)$, $(-1, 4)$

19) $y = 2 - 5x$, $(-2, 12)$, $(3, -13)$

20) $y = x^3 - 4x^2$, $(1, -3)$, $(3, -9)$

21) **ألعاب نارية:** انطلقت قذيفة ألعاب نارية رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 90 ft/s، وتمثِّل الدالة $h(t) = -16t^2 + 90t + 3.2$ الارتفاع الذي تبلغه القذيفة بعد t ثانية من إطلاقها. (الدرس 5-3)

a) أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للقذيفة.

b) ما السرعة المتجهة للقذيفة بعد 0.5 s من الإطلاق؟

c) ما أقصى ارتفاع تبلغه القذيفة؟

22) **اختيار من متعدد:** أيٌّ مما يأتي يمثِّل معادلة ميل منحنى $y = 7x^2 - 2$ عند أي نقطة عليه؟ (الدرس 5-3)

A $m = 7x$

B $m = 14x$

C $m = 7x - 2$

D $m = 14x - 2$

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم متحرك بالأميال بعد t دقيقة بالدالة $s(t)$. أوجد السرعة المتوسطة المتجهة للجسم في كل مما يأتي بالميل لكل ساعة على الفترة الزمنية المعطاة. تذكَّر أن تحول الدقائق إلى ساعات. (الدرس 5-3)

23) $s(t) = 12 + 0.7t$, $2 \le t \le 5$

24) $s(t) = 2.05t - 11$, $1 \le t \le 7$

25) $s(t) = 0.9t - 25$, $3 \le t \le 6$

26) $s(t) = 0.5t^2 - 4t$, $4 \le t \le 8$

أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالعلاقة $h(t)$ في كل مما يأتي: (الدرس 5-3)

27) $h(t) = 4t^2 - 9t$

28) $h(t) = 2t - 13t^2$

29) $h(t) = 2t - 5t^2$

30) $h(t) = 6t^2 - t^3$

5-4 المشتقات

Derivatives

فيما سبق:

درستُ حساب ميل المماسات لإيجاد مُعدَّل التغيُّر اللحظي.

والآن:

- أجدُ ميل منحنى دالة غير خطية باستعمال المشتقات.
- أستعملُ قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.

المفردات:

المشتقة
derivative

الاشتقاق
differentiation

المعادلة التفاضلية
differential equation

المؤثر التفاضلي
differential operator

لماذا؟

ركل أحمد كرةً رأسيًّا إلى أعلى من ارتفاع 3 ft، فانطلقت بسرعة 65 ft/s. يمكنك استعمال معادلات الحركة بتسارع ثابت، التي درستها في الفيزياء لكتابة دالة تصف ارتفاع الكرة بعد t ثانية، ومن ثم تحديد ما إذا كانت الكرة ستبلغ ارتفاع 68 ft أم لا.

قواعد أساسية للاشتقاق: استعملت النهايات في الدرس 3-5 لتحديد ميل مماس منحنى الدالة $f(x)$ عند أي نقطة عليه ، وتُسمى هذه النهاية **مشتقة الدالة** ويرمز لها بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود هذه النهاية، وتُسمَّى عملية إيجاد المشتقة **الاشتقاق**، وتُسمَّى النتيجة **معادلة تفاضلية**.

مثال 1 مشتقة دالة عند أي نقطة

أوجد مشتقة $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عندما $x = 1, 5$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ صيغة المشتقة

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8 - (4x^2 - 5x + 8)}{h}$$ $f(x+h) = 4(x+h)^2 - 5(x+h) + 8$ ، $f(x) = 4x^2 - 5x + 8$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8xh + 4h^2 - 5h}{h}$$ بسِّط

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(8x + 4h - 5)}{h}$$ حلِّل

$$= \lim_{h \to 0} (8x + 4h - 5)$$ اقسم على h

$$= [8x + 4(0) - 5] = 8x - 5$$ عوِّض وبسِّط

أي أن مشتقة $f(x)$ هي $f'(x) = 8x - 5$. احسب $f'(x)$ عندما $x = 1, 5$.

$f'(x) = 8x - 5$	المعادلة الأصلية	$f'(x) = 8x - 5$
$f'(5) = 8(5) - 5$	$x = 1, x = 5$	$f'(1) = 8(1) - 5$
$f'(5) = 35$	بسِّط	$f'(1) = 3$

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة $f(x)$ باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند قيم x المعطاة:

1A) $f(x) = 6x^2 + 7, x = 2, 5$

1B) $f(x) = -5x^2 + 2x - 12, x = 1, 4$

يُرمز لمشتقة $y = f(x)$ أيضًا بالرموز $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{df}{dx}$ ، y' ، وإذا سبق الدالة **المؤثر التفاضلي** $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

قراءة الرياضيات

المشتقات

يُقرأ الرمز $f'(x)$ مشتقة f بالنسبة للمتغير x، أو **f prime of x**.

تاريخ الرياضيات

شرف الدين الطوسي

العالم المسلم شرف الدين الطوسي (المتوفى عام 610هـ) من خلال دراسته المعادلات التي درجتها ≤3 استعمل في حل هذه المعادلات، القيمة العظمى للعبارات الجبرية، وأخذ "المشتق الأول" لهذه العبارات من دون أن يستعمل اسمه (المشتق الأول)، وبرهن على أن جذر المعادلة التي يحصل عليها إذا ما عُوِّض به في العبارة الجبرية، أعطى القيمة العظمى للعبارة.

حتى هذه اللحظة استعملت النهاية؛ لإيجاد كلٍّ من المشتقة وميل المماس والسرعة المتجهة اللحظية. وتُعدُّ قاعدة مشتقة القوة من أكثر القواعد فعالية لإيجاد المشتقات من دون اللجوء إلى استعمال النهايات، مما يجعل عملية إيجاد المشتقات أكثر سهولةً ودقة.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة دالة القوة

التعبير اللفظي: في مشتقة دالة القوة تكون قوة x أقل بواحد من قوة x في الدالة الأصلية، ومعامل x في المشتقة يساوي قوة x في الدالة الأصلية.

الرموز: إذا كان $f(x) = x^n$ ، حيث n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$.

مثال 2 — قاعدة مشتقة دالة القوة

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = x^9$

$f(x) = x^9$ الدالة المعطاة

$f'(x) = 9x^{9-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= 9x^8$ بسِّط

b) $g(x) = \sqrt[5]{x^7}$

$g(x) = \sqrt[5]{x^7}$ الدالة المعطاة

$g(x) = x^{\frac{7}{5}}$ أعد كتابة الدالة كقوّة نسبية

$g'(x) = \frac{7}{5}x^{\frac{7}{5}-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= \frac{7}{5}x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$ بسِّط

c) $h(x) = \frac{1}{x^8}$

$h(x) = \frac{1}{x^8}$ الدالة المعطاة

$h(x) = x^{-8}$ أعد كتابة الدالة كقوّة سالبة

$h'(x) = -8x^{-8-1}$ قاعدة مشتقة القوة

$= -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$ بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

2A) $j(x) = x^4$ 2B) $k(x) = \sqrt{x^3}$ 2C) $m(x) = \frac{1}{x^5}$

تنبيه!

مشتقات القوى السالبة

مشتقة $f(x) = x^{-4}$ ليست $f'(x) = -4x^{-3}$. تذكر بأننا يجب أن نطرح واحدًا من الأس ؛ لنحصل على: $-4-1=-4+(-1)=-5$؛ لذا فإن $f'(x) = -4x^{-5}$.

هناك العديد من قواعد الاشتقاق الأخرى المهمة التي تفيد في إيجاد مشتقات الدوال التي تحوي أكثر من حدٍّ.

مفهوم أساسي — قواعد أخرى للاشتقاق

مشتقة الثابت: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفرًا؛ أي أنه إذا كانت $f(x) = c$، حيث c عدد ثابت ، فإن $f'(x) = 0$.

مشتقة مضاعفات القوّة: إذا كان $f(x) = cx^n$ ، حيث c ثابت، و n عدد حقيقي، فإن: $f'(x) = cnx^{n-1}$.

مشتقة المجموع أو الفرق: إذا كانت: $f(x) = g(x) \pm h(x)$ ، فإن: $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$.

مثال 3 قواعد الاشتقاق

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 5x^3 + 4$

$f(x) = 5x^3 + 4$	الدالة المعطاة
$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} + 0$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع
$= 15x^2$	بسِّط

b) $g(x) = x^5(2x^3 + 4)$

$g(x) = x^5(2x^3 + 4)$	الدالة المعطاة
$g(x) = 2x^8 + 4x^5$	خاصية التوزيع
$g'(x) = 2 \cdot 8x^{8-1} + 4 \cdot 5x^{5-1}$	قاعدتا مشتقتَي مضاعفات القوى، والمجموع
$= 16x^7 + 20x^4$	بسِّط

c) $h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$

$h(x) = \dfrac{5x^3 - 12x + 6\sqrt{x^5}}{x}$	الدالة المعطاة
$h(x) = \dfrac{5x^3}{x} - \dfrac{12x}{x} + \dfrac{6\sqrt{x^5}}{x}$	اقسم كل حدٍّ في البسط على x
$h(x) = 5x^2 - 12 + 6\,x^{\frac{3}{2}}$	$x^{\frac{5}{2}} \cdot x^{-1} = x^{\frac{3}{2}}$
$h'(x) = 5 \cdot 2\,x^{2-1} - 0 + 6 \cdot \frac{3}{2}\,x^{\frac{3}{2}-1}$	قواعد مشتقات الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع والفرق
$= 10x + 9x^{\frac{1}{2}} = 10x + 9\sqrt{x}$	بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

3A) $f(x) = 2x^5 - x^3 - 102$ 3B) $g(x) = 3x^4(x + 2)$ 3C) $h(x) = \dfrac{4x^4 - 3x^2 + 5x}{x}$

الآن ، وبعد أن درست القواعد الأساسية للاشتقاق، يمكنك حل المسائل التي تتطلب حساب ميل مماس المنحنى، أو إيجاد السرعة المتجهة اللحظية بخطوات أقل، ففي مثال 5 من الدرس 3—4 ، أوجدنا معادلة السرعة المتجهة اللحظية لجسمٍ متحركٍ، وستلاحظ الآن سهولة حل المسألة نفسها بتطبيق قواعد الاشتقاق.

مثال 4 السرعة المتجهة اللحظية

تُعطى المسافة التي يقطعها جسم بالسنتمترات بعد t ثانية بالدالة: $s(t) = 18t - 3t^3 - 1$ ، أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم.

السرعة المتجهة اللحظية للجسم هي $s'(t)$.

$s(t) = 18t - 3t^3 - 1$	الدالة المعطاة
$s'(t) = 18 - 3 \cdot 3t^{3-1} - 0$	قواعد مشتقات الثابت، ودالة القوة، والدالة $f(x) = cx$، والفرق
$= 18 - 9t^2$	بسِّط

أي أن سرعة الجسم المتجهة اللحظية هي: $v(t) = 18 - 9t^2$ ، لاحظ أن هذه الإجابة مكافئة لتلك التي حصلت عليها في المثال 5 من الدرس 3-4 .

تحقق من فهمك

4) الدالة: $h(t) = 55t - 16t^2$ تمثِّل الارتفاع بالأقدام بعد t ثانية لكرة قُذِفت رأسيًّا إلى أعلى. أوجد معادلة السرعة المتجهة اللحظية للكرة عند أي زمن .

إرشادات للدراسة

المشتقات

إذا كانت $f(x) = x$ ، فإن $f'(x) = 1$ ، و إذا كانت $f(x) = cx$ ، فإن $f'(x) = c$.

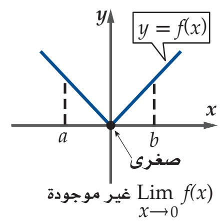
تنبيه!

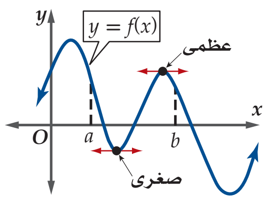
للتسهيل يمكنك إيجاد كلٍّ من ميل المماس لمنحنى الدالة، والسرعة المتجهة اللحظية، ومشتقة الدالة، باستخدام القواعد ما لم يُطلب منك استخدام النهايات لإيجاد أيٍّ منها.

النقطة التي تكون عندها مشتقة الدالة صفرًا أو غير موجودة تُسمَّى نقطةً حرجةً للدالة، والنقطة الحرجة قد تشير إلى وجود نقطة قيمة عظمى أو صغرى للدالة ، وتحدثُ عندما يكون ميل منحنى الدالة صفرًا أو غير موجود.

مفهوم أساسي — نظرية القيمة القصوى

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$ ، وذلك إما عند أحد طرفَي الفترة أو عند إحدَى النقاط الحرجة.





لتعيين نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة على فترة مغلقة، لا بد من حساب قيم الدالة عند أطراف الفترة، وعند النقاط الحرجة في تلك الفترة.

الربط مع الحياة

ازدادت سرعة الأفعوانيات حديثًا لتصل إلى 120 mi/h ، وكذلك ازدادت ارتفاعاتها لتبلغ 450 ft.

مثال 5 من واقع الحياة — القيمتان العظمى والصغرى لدالة

أفعوانية: الدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ تمثِّل ارتفاع إبراهيم بالأقدام في أثناء ركوبه أفعوانية، حيث t الزمن بالثواني في الفترة الزمنية $[1, 12]$ ، أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه إبراهيم.

أوجد مشتقة $h(t)$.

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3} \quad \text{الدالة المعطاة}$$

$$h'(t) = -\frac{1}{3} \cdot 3\,t^{3-1} + 4 \cdot 2t^{2-1} + 0 \quad \text{قواعد اشتقاق الثابت، ومضاعفات القوى، والمجموع، والفرق}$$

$$= -t^2 + 8t \quad \text{بسِّط}$$

أوجد النقاط الحرجة بحل المعادلة $h'(t) = 0$.

$$h'(t) = 0 \quad \text{اكتب المعادلة}$$

$$-t^2 + 8t = 0 \quad h'(t) = -t^2 + 8t$$

$$-t(t-8) = 0 \quad \text{حلّل}$$

إذن: $t = 8$ أو $t = 0$ ، وحيث إن $t = 0$ لا تقع في الفترة $[1, 12]$ ، فإن للدالة نقطة حرجة واحدة عند $t = 8$ ؛ لذا نحسب قيم $h(t)$ عندما $t = 1, 8, 12$.

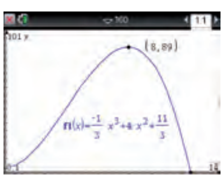
$$h(1) = -\frac{1}{3}(1)^3 + 4(1)^2 + \frac{11}{3} \approx 7.33$$

$$h(8) = -\frac{1}{3}(8)^3 + 4(8)^2 + \frac{11}{3} = 89 \quad \text{قيمة عظمى}$$

$$h(12) = -\frac{1}{3}(12)^3 + 4(12)^2 + \frac{11}{3} \approx 3.67 \quad \text{قيمة صغرى}$$

أي أن أقصى ارتفاع يبلغه إبراهيم هو 89 ft، وذلك بعد 8 s، في حين أن أدنى ارتفاع هو 3.67 ft تقريبًا بعد 12 s.

التحقق من الحل التمثيل البياني للدالة: $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + \frac{11}{3}$ المجاور على الفترة $[1, 12]$ باستعمال الآلة البيانية يعزِّز هذه النتيجة ، حيث يبيِّن التمثيل البياني أن أعلى ارتفاع يساوي 89 ft ، ويكون عندما $t = 8$ s. وأدنى ارتفاع يساوي 3.67، ويكون عندما $t = 12$ s ✓



إرشادات للدراسة

دالة كثيرة الحدود

مجال تعريف دالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية لذلك إذا كانت المشتقة دالة كثيرة حدود، فإن النقاط الحرجة توجد فقط عندما تكون المشتقة صفرًا.

ولذلك عند إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة كثيرة حدود $f(x)$ على فترة $[a, b]$، نجد قيم الدالة عند طرفَي الفترة وعند أي قيمة لـ x تكون عندها $f'(x)=0$.

تحقق من فهمك

5) **رياضة القفز:** الدالة: $h(t) = 20t^2 - 160t + 330$ تمثِّل ارتفاع سعد بالأقدام في أثناء مشاركته في قفزة البنجي (القفز من أماكن مرتفعة، بحيث تكون القدمان موثقتين بحبلٍ مطاطيٍّ)، حيث t الزمن بالثواني في الفترة $[0, 6]$. أوجد أقصى وأدنى ارتفاع يبلغه سعد في هذه الفترة الزمنية.

قاعدتا مشتقَّتَي الضرب والقسمة : تعلَّمت في هذا الدرس أن مشتقة مجموع دالَّتين تساوي مجموع مشتقَّتَي الدالَّتين، فهل تكون مشتقة ناتج ضرب دالتين مساويةً لناتج ضرب مشتقتَي الدالتين؟ افترض أن: $f(x) = x\,,\, g(x) = 3x^3$.

مشتقة الضرب

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[x \cdot 3x^3]$$
$$= \frac{d}{dx}(3x^4) = 12\,x^3$$

ضرب المشتقات

$$\frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \frac{d}{dx}(3x^3)$$
$$= 1 \cdot 9x^2 = 9x^2$$

يتضح من هذا المثال أن مشتقة ناتج ضرب دالَّتين لا تساوي بالضرورة ناتج ضرب مشتقتَي الدالتين، ويمكننا استعمال القاعدة الآتية لإيجاد مشتقة ناتج ضرب دالَّتين.

مفهوم أساسي — قاعدة مشتقة الضرب

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f وَ g موجودة عند x ، فإن: $\frac{d}{dx}[f(x)\, g(x)] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

ستبرهن قاعدة مشتقة الضرب في التمرين 48

مثال 6 — قاعدة مشتقة الضرب

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = (x^3 - 2x + 7)(3x^2 - 5)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 2x + 7\,,\, g(x) = 3x^2 - 5$ ، أي أن: $h(x) = f(x)g(x)$.

$f(x) = x^3 - 2x + 7$ — من الفرض

$f'(x) = 3\,x^2 - 2$ — قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 3\,x^2 - 5$ — من الفرض

$g'(x) = 6\,x$ — قواعد مشتقات مضاعفات القوى، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ — قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 2)(3x^2 - 5) + (x^3 - 2x + 7)(6x)$ — عوِّض

$= 9x^4 - 15x^2 - 6x^2 + 10 + 6x^4 - 12x^2 + 42x$ — خاصية التوزيع

$= 15x^4 - 33x^2 + 42x + 10$ — بسِّط

b) $h(x) = (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(6x^2 - x - 2)$

افترض أن: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64\,,\, g(x) = 6x^2 - x - 2$.

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 48x - 64$ — من الفرض

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 48$ — قواعد مشتقات القوة، ومضاعفات القوى، والثابت، والمجموع والفرق

$g(x) = 6x^2 - x - 2$ — من الفرض

$g'(x) = 12x - 1$ — قواعد مشتقات ومضاعفات القوى، والقوة، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ — قاعدة مشتقة الضرب

$= (3x^2 - 8x + 48)(6x^2 - x - 2) + (x^3 - 4x^2 + 48x - 64)(12x - 1)$ — عوِّض

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

6A) $h(x) = (x^5 + 13x^2)(7x^3 - 5x^2 + 18)$

6B) $h(x) = (x^2 + x^3 + x)(8x^2 + 3)$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة الضرب

يعد تبسيط ناتج مشتقة الضرب مهمًا في كثير من التمارين.

بطريقة التبرير نفسها في مشتقة الضرب، يمكنك ملاحظة أن مشتقة ناتج قسمة دالتين لا تساوي ناتج قسمة مشتقتَي الدالتين، ويمكن استعمال القاعدة الآتية لحساب مشتقة قسمة دالتين.

مفهوم أساسي **قاعدة مشتقة القسمة**

إذا كانت مشتقة كلٍّ من الدالتين f, g موجودة عند x ، وكان $g(x) \neq 0$ ، فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ستبرهن قاعدة مشتقة القسمة في التمرين 50

مثال 7 قاعدة مشتقة القسمة

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

a) $h(x) = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 - 6}$

افترض أن: $f(x) = 5x^2 - 3,\ g(x) = x^2 - 6$ ؛ أي أن: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

$f(x) = 5x^2 - 3$ من الفرض

$f'(x) = 10x$ قواعد مشتقات مضاعفات القوى ، والثابت، والفرق

$g(x) = x^2 - 6$ من الفرض

$g'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت ، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{10x(x^2 - 6) - (5x^2 - 3)(2x)}{(x^2 - 6)^2}$ عوِّض

$= \dfrac{10x^3 - 60x - 10x^3 + 6x}{(x^2 - 6)^2}$ خاصية التوزيع

$= \dfrac{-54x}{(x^2 - 6)^2}$ بسِّط

b) $h(x) = \dfrac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$

افترض أن: $f(x) = x^2 + 8,\ g(x) = x^3 - 2$.

$f(x) = x^2 + 8$ من الفرض

$f'(x) = 2x$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والمجموع

$g(x) = x^3 - 2$ من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ قواعد مشتقات القوة ، والثابت، والفرق

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \dfrac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$ قاعدة مشتقة القسمة

$= \dfrac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$ عوِّض

$= \dfrac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$ فك الأقواس، ثم بسِّط

تحقق من فهمك

أوجد مشتقة كل دالةٍ مما يأتي:

7A) $j(x) = \dfrac{7x - 10}{12x + 5}$

7B) $k(x) = \dfrac{6x}{2x^2 + 4}$

إرشادات للدراسة

قاعدة مشتقة القسمة

يُعدَ تبسيط ناتج مشتقة القسمة مهمًّا في كثير من التمارين ، إلا أنه ليس من الضروري فك أقواس المقام، ما لم ينتج عن ذلك تبسيط أكثر.

تدرب وحل المسائل

أوجد مشتقةَ كلِّ دالة مما يأتي باستعمال النهايات، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة: (مثال 1)

1) $f(x) = 4x^2 - 3 , x = 2 , -1$

2) $g(t) = -t^2 + 2t + 11 , t = 5 , 3$

3) $m(j) = 14j - 13 , j = -7 , -4$

4) $v(n) = 5n^2 + 9n - 17 , n = 7 , 2$

5) $r(b) = 2b^3 - 10b , b = -4 , -3$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (المثالان 2 , 3)

6) $y(f) = -11f$

7) $z(n) = 2n^2 + 7n$

8) $g(h) = 2h^{\frac{1}{2}} + 6h^{\frac{1}{3}} - 2h^{\frac{3}{2}}$

9) $b(m) = 3m^{\frac{2}{3}} - 2m^{\frac{3}{2}}$

10) $n(t) = \frac{1}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3} + 4$

11) $f(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}$

12) $q(c) = c^9 - 3c^5 + 5c^2 - 3c$

13) $p(k) = k^{5.2} - 8k^{4.8} + 3k$

14) **درجات حرارة:** تُعطى درجة حرارة إحدى المدن بالفهرنهايت في أحد الأيام بالدالة:
$f(h) = -0.0036h^3 - 0.01h^2 + 2.04h + 52$ ، حيث h عدد الساعات التي انقضت من ذلك اليوم. (مثال 4)

a) أوجد معادلة تمثل مُعدّل التغيّر اللّحظي لدرجة الحرارة.

b) أوجد مُعدَّل التغيّر اللحظي لدرجة الحرارة عندما: $h = 2, 14, 20$.

c) أوجد درجة الحرارة العظمى في الفترة: $0 \leq h \leq 24$

استعمل الاشتقاق لإيجاد النقاط الحرجة، ثم أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى لكل دالة مما يأتي على الفترة المعطاة. (مثال 5)

15) $f(x) = 2x^2 + 8x, [-5, 0]$

16) $r(t) = t^4 + 6t^2 - 2, [1, 4]$

17) $t(u) = u^3 + 15u^2 + 75u + 115, [-6, -3]$

18) $f(x) = -5x^2 - 90x, [-11, -8]$

19) $z(k) = k^3 - 3k^2 + 3k, [0, 3]$

20) $c(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - 6n + 8, [-5, 5]$

21) **رياضة:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. الدالة: $h(t) = 65t - 16t^2 + 3$ تمثل ارتفاع الكرة h بالأقدام بعد t ثانية، عندما $0 \leq t \leq 4$. (مثال 5)

a) أوجد $h'(t)$.

b) أوجد نقاط القيم العظمى والصغرى للدالة $h(t)$ في الفترة $[0, 4]$.

c) هل يمكن لأحمد ركل الكرة لتصل إلى ارتفاع 68 ft ؟

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي: (مثال 6)

22) $f(x) = (4x + 3)(x^2 + 9)$

23) $g(x) = (3x^4 + 2x)(5 - 3x)$

24) $s(t) = (\sqrt{t} + 2)(3t^{11} - 4t)$

25) $g(x) = \left(x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)(0.5x^4 - 3x)$

26) $c(t) = (t^3 + 2t - t^7)(t^6 + 3t^4 - 22t)$

27) $q(a) = \left(a^{\frac{9}{8}} + a^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{5}{4}} - 13a\right)$

28) $f(x) = (1.4x^5 + 2.7x)(7.3x^9 - 0.8x^5)$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة لإيجاد مشتقة كل دالةٍ ممّا يأتي: (مثال 7)

29) $f(m) = \frac{3 - 2m}{3 + 2m}$

30) $r(t) = \frac{t^2 + 2}{3 - t^2}$

31) $m(q) = \frac{q^4 + 2q^2 + 3}{q^3 - 2}$

32) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{-x^2 + 3}$

33) $q(r) = \frac{1.5r^3 + 5 - r^2}{r^3}$

34) $t(w) = \frac{w + w^4}{\sqrt{w}}$

35) قام بائع ملابس بإيجاد العلاقة بين سعر قميص، وعدد القطع المبيعة منه يوميًّا، فوجد أنه عندما يكون سعر القميص d درهمًا ، فإن عدد القطع المبيعة يوميًّا يساوي $80 - 2d$.

a) أوجد $r(d)$ التي تمثل إجمالي المبيعات اليومية، عندما يكون سعر القميص d درهمًا.

b) أوجد $r'(d)$.

c) أوجد السعر d الذي تكون عنده قيمة المبيعات اليومية أكبر ما يمكن.

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي، ثم مَثِّل الدالة والمشتقة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه.
(إرشاد: يمكنك استعمال الحاسبة البيانية في التمثيل البياني)

36) $f(x) = 3x^2 + 2x - 7$

37) $g(x) = \sqrt{x} + 4$

38) $f(x) = 4x^5 - 6x^3 + 10x - 11$

39) $g(x) = \frac{1}{x}$

40) **المشتقات العليا:** لتكن $f'(x)$ مشتقة $f(x)$، إذا كانت مشتقة $f'(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثانية للدالة f، ويُرمز لها بالرمز $f''(x)$ ، أو الرمز $f^{(2)}(x)$ ، وكذلك إذا كانت مشتقة $f''(x)$ موجودة، فإنها تسمى المشتقة الثالثة للدالة f، ويرمز لها بالرمز $f'''(x)$ أو $f^{(3)}(x)$، وتسمى المشتقات على هذا النحو المشتقات العليا للدالة f. أوجد كلًّا مما يأتي:

a) المشتقة الثانية للدالة: $f(x) = 4x^5 - 2x^3 + 6$

b) المشتقة الثالثة للدالة: $g(x) = -2x^7 + 4x^4 - 7x^3 + 10x$

c) المشتقة الرابعة للدالة: $h(x) = 3x^{-3} + 2x^{-2} + 4x^2$

مَثِّل منحنى دالة لها الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

41) المشتقة تساوي 0، عندما $x = -1, 1$.

42) المشتقة غير معرَّفة، عندما $x = 4$.

43) المشتقة تساوي -2 ، عندما $x = -1, 0, 2$.

44) المشتقة تساوي 0، عندما $x = -1, 2, 4$.

45) **تمثيلات متعددة:** في هذا التمرين ستستكشف علاقة المشتقات ببعض الخصائص الهندسية للدوال.

a) **تحليليًّا:** أوجد مشتقة صيغة مساحة الدائرة بالنسبة لنصف القطر r.

b) **لفظيًّا:** وضِّحِ العلاقةَ بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **a**.

c) **بيانيًّا:** ارسم مربعًا طول ضلعه $2a$ ، ومكعبًا طول ضلعه $2a$.

d) **تحليليًّا:** اكتب صيغةً تمثِّل مساحة المربع، وأخرى تمثِّل حجم المكعب بدلالة a ، ثم أوجد مشتقتَي الصيغتين.

e) **لفظيًّا:** وَضِّح العلاقة بين المعادلة الأصلية ومشتقتها في الفرع **d**.

مسائل مهارات التفكير العليا

46) **اكتشف الخطأ:** قام كلٌّ من أحمد وعبدالله بإيجاد $[f'(x)]^2$ للدالة $f(x) = 6x^2 + 4x$ ، حيث كانت إجابة عبد الله: $144x^2 + 96x + 16$ ، في حين كانت إجابة أحمد: $144x^3 + 144x^2 + 32x$ ، فأيهما كانت إجابته صحيحة؟ برِّر إجابتك.

47) **تحدٍّ:** أوجد $f'(y)$ علمًا بأن:
$$f(y) = 10x^2y^3 + 5xz^2 - 6xy^2 + 8x^5 - 11x^8yz^7$$

48) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة الضرب، بإثبات أن:
$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، وأضف $f(x)g(x+h)$ إلى البسط واطرحه منه).

49) **تبرير:** بيِّن ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أو خاطئة، وبرِّر إجابتك.
"إذا كانت: $f(x) = x^{5n+3}$ ، فإن $f'(x) = (5n+3)\, x^{5n+2}$"

50) **برهان:** برهن صحة قاعدة مشتقة القسمة، وذلك بإثبات أن:
$$\frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$
(إرشاد: ابدأ بالطرف الأيمن، ووحِّد المقامات في البسط، ثم أضف $f(x)\,g(x)$ إلى البسط واطرحه منه).

51) **اكتب:** هل من الممكن أن يكون لدالَّتين مختلفتين المشتقة نفسها؟ عزِّز إجابتك بأمثلة.

تدريب على اختبار

52) ما مشتقة: $h(x) = (-7x^2 + 4)(2-x)$ ؟

A $h'(x) = -14x$

B $h'(x) = 14x$

C $h'(x) = -21x^2 - 28x + 4$

D $h'(x) = 21x^2 - 28x - 4$

53) ما ميل مماس منحنى $y = 2x^2$ عند النقطة $(1, 2)$؟

A 1 **C** 4

B 2 **D** 8

54) ما مشتقة: $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$ ؟

A $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{5}{3}}$ **C** $f'(x) = 225\,x^{\frac{5}{3}}$

B $f'(x) = \frac{40}{3}x^{\frac{8}{3}}$ **D** $f'(x) = 225\,x^{\frac{8}{3}}$

5-5

المساحة تحت المنحنى والتكامل
Area Under the Curve and Integration

فيما سبق:

درستُ حساب النهايات جبريًا باستعمال خصائصها.

والآن:

- أقرّب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- أجد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.

المفردات:

التجزيء المنتظم
regular partition

التكامل المحدد
definite integral

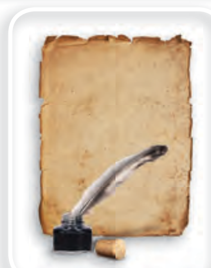
الحد الأدنى
lower limit

الحد الأعلى
upper limit

مجموع ريمان الأيمن
right Riemann sum

التكامل
integration

www.obeikaneducation.com



تاريخ الرياضيات

ثابت بن قرة (221 هـ — 288 هـ) من أوائل من وضع نواة علم التكامل من خلال نظريته" إذا ضوعف عدد أضلاع المضلع المنتظم، المرسوم بين محيطين أو مساحتين إلى ما لا نهاية، صغر الفرق تدريجيًا بين الأضلاع كلما اقترب من المركز، واقترب من الصفر حتى يفنى".

لماذا؟

التكلفة الحدية (الهامشية) هي التكلفة الإضافية المترتبة على إنتاج وحدة إضافية واحدة من منتج ما، ويمكن إيجاد معادلة التكلفة الحدية باشتقاق معادلة التكلفة الحقيقية للمنتج. تُمثل الدالة $f(x) = 10 - 0.002x$ التكلفة الحدية لطباعة x نسخة من كتاب ما بالدرهم .

المساحة تحت منحنى سبق أن درست في الهندسة طريقة حساب مساحات الأشكال الأساسية كالمثلث والمستطيل وشبه المنحرف، كما درست حساب مساحات بعض الأشكال المركبة التي تتكون من أشكال أساسية، إلا أن العديد من الأشكال المركبة لا تتكون من أشكال أساسية، مما يستدعي الحاجة إلى طريقة عامة لحساب مساحة أي شكل ثنائي الأبعاد.

يمكننا تقريب مساحة شكل غير منتظم من خلال استعمال شكل أساسي معلوم المساحة كالمستطيل. فمثلًا يمكننا تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال مستطيلات متساوية العرض.

مثال 1 المساحة تحت منحنى باستعمال مستطيلات

قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 12x$ والمحور x على الفترة $[0, 12]$ باستعمال 4، 6، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

مثّل الدالة والمستطيلات كما في الأشكال التالية، باتباع الخطوات التالية:

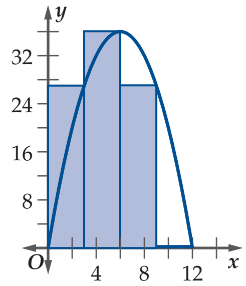
1) أوجد طول الفترة $[0, 12]$ بطرح بدايتها من نهايتها.

2) أوجد عرض كل مستطيل بقسمة طول الفترة على عدد المستطيلات، فمثلًا إذا كان عدد المستطيلات 4 نقسم: $12 \div 4 = 3$

3) قسِّم الفترة $[0, 12]$ إلى 4 فترات (لأربعة مستطيلات) طول كل منها يساوي 3

4) ارسم على كل فترة جزئية مستطيلًا أحد بعديه يساوي طول هذه الفترة، والبعد الآخر يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن للفترة.

فمثلًا ارتفاعات المستطيلات في الشكل (1) هي $f(3), f(6), f(9), f(12)$. ويمكننا استعمال ارتفاعات المستطيلات وأطوال قواعدها لتقريب المساحة المطلوبة.



الشكل (1)

المساحة باستعمال 4 مستطيلات

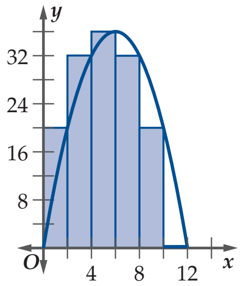
$R_1 = 3 \cdot f(3) = 81$

$R_2 = 3 \cdot f(6) = 108$

$R_3 = 3 \cdot f(9) = 81$

$R_4 = 3 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 270 وحدة مربعة.



الشكل (2)

المساحة باستعمال 6 مستطيلات

$R_1 = 2 \cdot f(2) = 40$

$R_2 = 2 \cdot f(4) = 64$

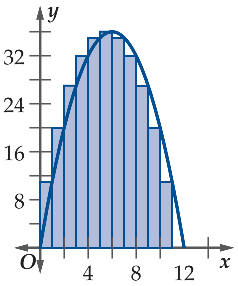
$R_3 = 2 \cdot f(6) = 72$

$R_4 = 2 \cdot f(8) = 64$

$R_5 = 2 \cdot f(10) = 40$

$R_6 = 2 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 280 وحدة مربعة.



الشكل (3)

المساحة باستعمال 12 مستطيلًا

$R_1 = 1 \cdot f(1) = 11$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 20$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 27$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 32$

$R_5 = 1 \cdot f(5) = 35$

$R_6 = 1 \cdot f(6) = 36$

$R_7 = 1 \cdot f(7) = 35$

$R_8 = 1 \cdot f(8) = 32$

$R_9 = 1 \cdot f(9) = 27$

$R_{10} = 1 \cdot f(10) = 20$

$R_{11} = 1 \cdot f(11) = 11$

$R_{12} = 1 \cdot f(12) = 0$

المساحة الكلية 286 وحدة مربعة.

أي أن المساحة التقريبية باستعمال 4 ، 6 ، 12 مستطيلًا هي بالترتيب: 270 وحدة مربعة، 280 وحدة مربعة، 286 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

1) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2 + 24x$ والمحور x على الفترة $[0, 24]$ باستعمال 6، 8، 12 مستطيلًا على الترتيب. استعمل الطرف الأيمن لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعه.

لاحظ أن المستطيلات الأقل عرضًا تمثِّل المساحة المطلوبة بصورة أفضل، وتعطي تقريبًا أدق للمساحة الكلية. وكما استعملنا الأطراف اليمنى لقاعدة كل مستطيل لتحديد ارتفاعاتها ، فإنه يمكننا أيضًا استعمال أطرافها اليسرى لتحديد ارتفاعاتها وهذا قد ينتج عنه تقريب مختلف للمساحة.

إن استعمال الأطراف اليمنى أو اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها قد يؤدي إلى إضافة أجزاء لا تقع بين المنحنى والمحور x ، أو حذف أجزاء تقع بين المنحنى والمحور x . ومن الممكن الحصول على تقريب أفضل للمساحة في بعض الأحيان باستعمال كل من الأطراف اليمنى واليسرى لقواعد المستطيلات ، ثم أخذ الوسط للتقريبين.

مثال 2 المساحة تحت المنحنى باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى للمستطيلات

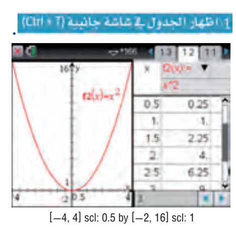
قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحدٍ منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها ، ثم احسب الوسط للتقريبين.

إن استعمال مستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة ينتج عنه 4 مستطيلات سواء أكانت الأطراف اليمنى أو اليسرى للمستطيلات هي التي تحدد ارتفاعاتها. ويوضح الشكل (1) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليمنى، في حين يوضح الشكل (2) أدناه المستطيلات باستعمال الأطراف اليسرى.

إرشاد تقني

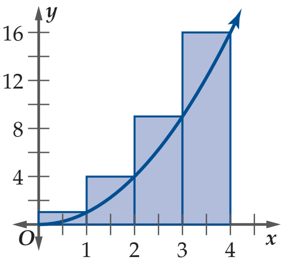
جداول: للحصول على ارتفاعات متعددة للمستطيلات، والتي تمثل بعض قيم $f(x)$ باستعمال الآلة الحاسبة البيانية. مثِّل الدالة باستعمال تطبيق الرسوم البيانية، وذلك بالضغط على on ثم كتابة الدالة $f(x) = x^2$. ويمكن توضيح ارتفاعات المستطيلات $f(x)$ باستعمال جدول، وذلك بالضغط على menu ومنها اختيار 7: الجدول

1: اظهار الجدول في شاشة جانبية (Ctrl + T)



[−4, 4] scl: 0.5 by [−2, 16] scl: 1

ويمكنك تعديل فترات قيم x في الجدول بالضغط على menu ومنها 2: الجدول ، ثم 5: تحرير إعدادات الجدول... ثم حدد بداية الجدول والخطوة أو تدريج قيم x.



الشكل (1)

المساحة باستعمال الأطراف اليمنى

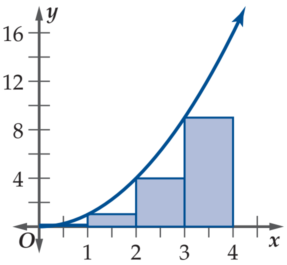
$R_1 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_2 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_3 = 1 \cdot f(3) = 9$

$R_4 = 1 \cdot f(4) = 16$

المساحة الكلية 30 وحدة مربعة



الشكل (2)

المساحة باستعمال الأطراف اليسرى

$R_1 = 1 \cdot f(0) = 0$

$R_2 = 1 \cdot f(1) = 1$

$R_3 = 1 \cdot f(2) = 4$

$R_4 = 1 \cdot f(3) = 9$

المساحة الكلية 14 وحدة مربعة

أي أن المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليمنى هي 30 وحدة مربعة، بينما المساحة الناتجة عن استعمال الأطراف اليسرى هي 14 وحدة مربعة، وهذان تقديران تقع المساحة بينهما، وبحساب الوسط للقيمتين نحصل على تقريب أفضل للمساحة، وهو 22 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

2) قرِّب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{12}{x}$ والمحور x في الفترة $[1, 5]$ باستعمال مستطيلات عرض كل واحد منها وحدة واحدة . استعمل الأطراف اليمنى ثم اليسرى لقواعد المستطيلات لتحديد ارتفاعاتها، ثم احسب الوسط للتقريبين.

عند تقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x ، فإنه يمكننا استعمال أي نقطة على قاعدة المستطيل لتحديد ارتفاعه، إلا أن النقاط الأكثر شيوعًا هي نقطتا الطرفين الأيمن والأيسر، ونقطة المنتصف.

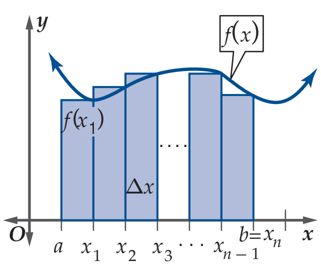
التكامل لاحظت في مثال 1 أنه كلما قل عرض المستطيلات، فإن مساحتها الكلية تقترب من المساحة الفعلية تحت المنحنى، ومن ذلك نستنتج أن المساحة المطلوبة هي نهاية مجموع مساحات المستطيلات عندما يقترب عرض كل مستطيل من الصفر.

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

تُقرأ العبارة $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$ كالآتي مجموع حواصل ضرب Δx في $f(x_i)$ من $i = 1$ إلى $i = n$.

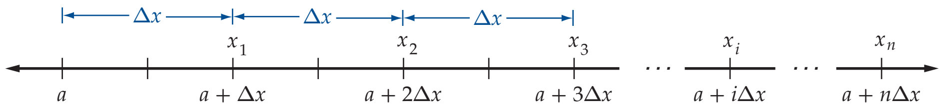
في الشكل المجاور، قُسِّمت الفترة من a إلى b إلى n من الفترات الجزئية المتساوية الطول، وتُسمَّى هذه التجزئة **التجزيء المنتظم**. إن طول الفترة الكلية من a إلى b هو $b - a$ ، وبذلك يكون طول كل فترة جزئية (عرض كل مستطيل من المستطيلات التي عددها n) هو $\frac{b-a}{n}$ ، ويُرمز له بالرمز Δx. وبما أن ارتفاع كل مستطيل يساوي قيمة الدالة عند الطرف الأيمن لقاعدة المستطيل، فإن ارتفاع المستطيل الأول هو $f(x_1)$، وارتفاع المستطيل الثاني هو $f(x_2)$، وهكذا يكون ارتفاع المستطيل الأخير $f(x_n)$.



يمكن الآن حساب مساحة كل مستطيل من خلال ضرب Δx في ارتفاع ذلك المستطيل، أي أن مساحة المستطيل الأول هي $f(x_1)\ \Delta x$، ومساحة المستطيل الثاني هي $f(x_2)\ \Delta x$ ، وهكذا. وتُعطى المساحة الكلية A للمستطيلات بمجموع مساحاتها، ويمكن كتابتها باستعمال رمز المجموع.

$A = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$	اجمع المساحات
$A = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$	أخرج العامل المشترك Δx
$A = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$	استعمل رمز المجموع
$A = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$	خواص رمز المجموع

ولتسهيل الحسابات مستقبلًا، فإنه يمكننا اشتقاق صيغة لإيجاد أي x_i. فبما أن عرض أيٍّ من المستطيلات هو Δx ، ويساوي الفرق بين أي قيمتين متتاليتين من قيم x_i . وبالنظر إلى خط الأعداد أدناه:



يمكننا ملاحظة أن $x_i = a + i\Delta x$. ولهذه العلاقة أهميتها عند إيجاد المساحة تحت منحنى أي دالة لاحقًا.

لاحظ أنه كلما اقترب عرض المستطيل من الصفر، فإن عدد المستطيلات يقترب من المالانهاية، وتُسمَّى هذه النهاية **التكامل المحدد**، ويعبَّر عنها برمزٍ خاص.

قراءة الرياضيات

رمز التكامل المحدد

يقرأ الرمز $\int_a^b f(x)dx$ التكامل من a إلى b للدالة $f(x)$ ، $d(x)$

مفهوم أساسي — التكامل المحدد

يعطى التكامل المحدد للدالة $f(x)$ في الفترة $[a, b]$ بالصيغة:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \,,\ \Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_i = a + i\Delta x$$

حيث a الحد الأدنى للتكامل، و b الحد الأعلى للتكامل، وتُسمَّى هذه الصيغة مجموع ريمان الأيمن.

ويُعبر هذا التكامل عن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x في الفترة $[a, b]$

سُمي مجموع ريمان بهذا الاسم نسبةً للعالم الألماني بيرنارد ريمان (1826 – 1866). والذي يُعزى إليهِ إيجاد صيغة لتقريب المساحة المحصورة باستعمال النهايات. ويمكننا تعديل الصيغة باستعمال الأطراف اليُسرى أو نقاط المنتصف لتحديد ارتفاعات المستطيلات.

تنبيه!

المجموع

إن مجموع عدد ثابت c هو $c\,n$ ، فمثلاً $\sum_{i=1}^{n} 5 = 5\,n$

وتسمى عملية حساب التكامل **تكاملًا**، وستُسهِّل صيغ المجاميع الآتية حساب التكامل المحدد.

$$\sum_{i=1}^{n} c = cn \quad ,\ c \text{ عدد ثابت}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$$

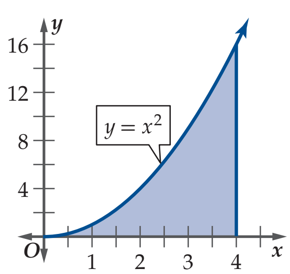
$$\sum_{i=1}^{n} i^5 = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}$$

تُستعمل خاصيتا المجموع الآتيتان لحساب بعض التكاملات:

$$\sum_{i=1}^{n} ci = c\sum_{i=1}^{n} i \ ,\ c \text{ عدد ثابت} \qquad , \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

مثال 3 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = x^2$ والمحور x في الفترة $[0, 4]$ ؛ أي $\int_0^4 x^2\,dx$.



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$= \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ $\quad b = 4 , a = 0$

$x_i = a + i\,\Delta x$ صيغة x_i

$= 0 + i\frac{4}{n} = \frac{4i}{n}$ $\quad a = 0 , \Delta x = \frac{4}{n}$

احسب التكامل المحدد الذي يُعطي المساحة المطلوبة.

تعريف التكامل المحدد	$\int_0^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$
$f(x_i) = x_i^2$	$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\,\Delta x$
$x_i = \frac{4i}{n},\ \Delta x = \frac{4}{n}$	$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \left(\frac{4}{n}\right)$
خصائص المجموع	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i}{n}\right)^2$
وزِّع القوة	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{16i^2}{n^2}$
خصائص المجموع	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2\right)$
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$
اضرب ووزِّع	$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} \left(\frac{16n\,(2n^2+3n+1)}{6n^2}\right)$
اضرب	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64n(2n^2+3n+1)}{6n^3}$
اقسم	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64(2n^2+3n+1)}{6n^2}$
حلِّل	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right)$
اقسم على n^2	$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{6} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$
خصائص النهايات	$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{64}{6}\right)\left[\lim_{n\to\infty} 2 + \left(\lim_{n\to\infty} 3\right)\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\right]$
	$= \frac{64}{6}[2 + 3(0) + 0] = \frac{64}{3} \approx 21.33$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 21.33 وحدة مربعة تقريبًا.

إرشادات للدراسة

النهايات

حلِّل كل مجموع بحيث تتضمن العبارات الباقية إما أعدادًا ثابتة أو i فقط، ثم طبق صيغة المجموع المناسبة.

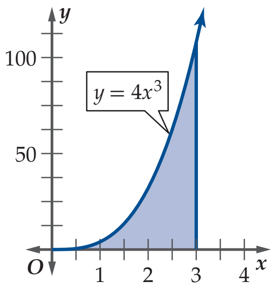
تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(3A $\int_0^1 3x^2\,dx$ **(3B** $\int_0^3 x\,dx$

يمكننا أيضًا حساب مساحات المناطق باستعمال النهايات حال كون نقطة الأصل ليست حدًّا أدنى لها.

مثال 4 المساحة تحت منحنى باستعمال التكامل



استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4x^3$ والمحور x، في الفترة $[1, 3]$ ؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n} \quad b = 3, a = 1$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \quad \text{صيغة } x_i$$

$$= 1 + i\frac{2}{n} = 1 + \frac{2i}{n} \quad a = 1, \Delta x = \frac{2}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_1^3 4x^3\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \quad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4(x_i)^3\Delta x \quad f(x_i) = 4(x_i)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 4\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3\left(\frac{2}{n}\right) \quad x_i = 1 + \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{2i}{n}\right)^3 \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1 + 3\left(\frac{2i}{n}\right) + 3\left(\frac{2i}{n}\right)^2 + \left(\frac{2i}{n}\right)^3\right] \quad \text{مفكوك } \left(1+\frac{2i}{n}\right)^3$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{6i}{n} + \frac{12i^2}{n^2} + \frac{8i^3}{n^3}\right) \quad \text{بسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{6i}{n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{12i^2}{n^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{8i^3}{n^3}\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i + \frac{12}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2 + \frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right) \quad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{n}\left(n + \frac{6}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{8}{n^3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \quad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n}{n} + \frac{48n(n+1)}{2n^2} + \frac{96n(2n^2+3n+1)}{6n^3} + \frac{64n^2(n^2+2n+1)}{4n^4}\right) \quad \text{وزّع واضرب}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(8 + \frac{24(n+1)}{n} + \frac{16(2n^2+3n+1)}{n^2} + \frac{16(n^2+2n+1)}{n^2}\right) \quad \text{بسّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[8 + 24\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + 16\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \quad \text{اقسم}$$

$$= \lim_{n\to\infty}8 + 24\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + 16\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 8 + 24(1+0) + 16(2+0+0) + 16(1+0+0) = 80 \quad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المطلوبة هي 80 وحدة مربعة.

تحقق من فهمك

استعمل النهايات؛ لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطاة بالتكامل المحدد في كلٍّ مما يأتي:

(4A $\int_1^3 x^2\,dx$ **(4B** $\int_2^4 x^3\,dx$

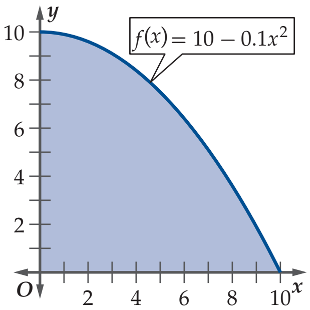
تنبيه!

النهايات

عند تقريب مساحة المنطقة تحت المنحنى باستعمال المجاميع، أوجد مجاميع قيم i قبل توزيع Δx أو أي ثوابت أخرى.

مثال 5 من واقع الحياة — المساحة تحت منحنى

بلاط : يكلِّف تبليط القدم المربعة الواحدة من فناء منزل بالجرانيت 22.4 درهمًا. إذا تم تبليط ممرين متطابقين في فناء المنزل بالجرانيت، وكانت المساحة بالقدم المربعة لأيٍّ من الممرين تُعطى بالتكامل $\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx$ ، فما تكلفة تبليط الممرين؟



ابدأ بإيجاد Δx ، x_i .

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \qquad \text{صيغة } \Delta x$$

$$= \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n} \qquad a=0,\ b=10$$

$$x_i = a + i\,\Delta x \qquad \text{صيغة } x_i$$

$$= 0 + i\frac{10}{n} = \frac{10i}{n} \qquad a=0,\ \Delta x = \frac{10}{n}$$

احسب التكامل المحدد والذي يُعطي المساحة المطلوبة.

$$\int_0^{10}(10-0.1x^2)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \qquad \text{تعريف التكامل المحدد}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(10-0.1{x_i}^2)\Delta x \qquad f(x_i) = 10 - 0.1{x_i}^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[10 - 0.1\left(\frac{10i}{n}\right)^2\right]\cdot\frac{10}{n} \qquad x_i = \frac{10i}{n},\ \Delta x = \frac{10}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(10 - \frac{10i^2}{n^2}\right) \qquad \text{استعمل خصائص المجموع وبسِّط}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10 - \sum_{i=1}^{n}\frac{10i^2}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}10 - \frac{10}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right) \qquad \text{خصائص المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{10}{n}\left(10n - \frac{10}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \qquad \text{صيغ المجموع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{100n}{n} - \frac{100n(2n^2+3n+1)}{6n^3}\right) \qquad \text{خاصية التوزيع}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(100 - \frac{50(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right) \qquad \text{اقسم على } n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[100 - \frac{50}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right] \qquad \text{اقسم على } n^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}100 - \frac{50}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{خصائص النهايات}$$

$$= 100 - \frac{50}{3}(2+0+0) = 66\tfrac{2}{3} \approx 66.67 \qquad \text{بسِّط}$$

أي أن مساحة أيٍّ من الممرين تساوي $66.67\ \text{ft}^2$ تقريبًا؛ لذا فإن تكلفة تبليط الممرين هي $22.4 \times (66.67 \times 2)$ درهم أو 2986.8 درهمًا تقريبًا.

تحقق من فهمك

5) **طلاء :** لدى عبد الله كمية من الطلاء تكفي لطلاء $30\ \text{ft}^2$ ، هل تكفي هذه الكمية لطلاء جزأين من جدار مساحة كل منهما بالقدم المربعة تُعطَى بالتكامل $\int_0^5(5-0.2x^2)dx$ ؟ برِّر إجابتك.

الربط مع الحياة

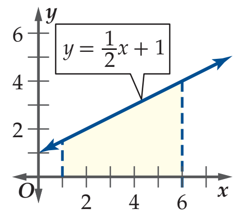
الجرانيت

الجرانيت هو صخر ناري يتميز بنسيج خشن يكسبه مظهرًا فريدًا، وهو مقاوم لعوامل الأكسدة، لذلك يستعمل في تبليط الأرضيات.

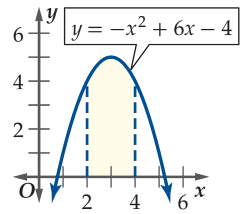
تدرب وحل المسائل

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى الدالة مستعملاً الطرف المعطى لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عددها في كلٍّ من الأشكال أدناه: (مثال 1)

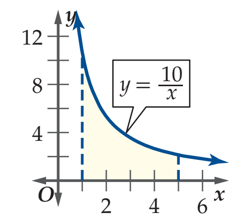
1) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن



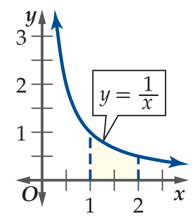
2) 4 مستطيلات
الطرف الأيسر



3) 8 مستطيلات
الطرف الأيمن



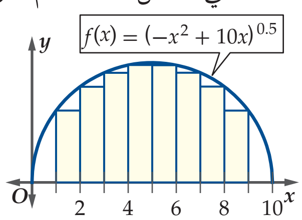
4) 5 مستطيلات
الطرف الأيمن



5) **أرضيات:** يرغب أحمد في تبليط جزء من فناء منزله على شكل نصف دائرة تمثله $f(x) = (-x^2 + 10x)^{0.5}$. (مثال 1)

a) قرِّب مساحة المنطقة نصف الدائرية باستعمال الأطراف اليسرى لمستطيلات عرض كل منها وحدة واحدة.

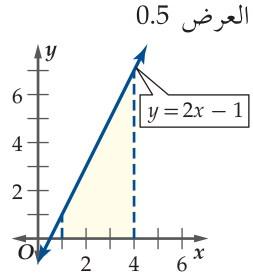
b) إذا قرَّر أحمد تقريب المساحة باستعمال الأطراف اليمنى واليسرى معًا كما في الشكل أدناه، فكم تكون المساحة؟



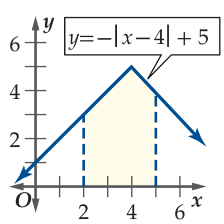
c) أوجد مساحة المنطقة باستعمال صيغة مساحة نصف الدائرة. أي التقريبين أقرب إلى المساحة الحقيقية؟ فسِّر إجابتك.

قرِّب مساحة المنطقة المظلَّلة تحت منحنى الدالة في كلٍّ من الأشكال الآتية مستعملاً الأطراف اليمنى ثم اليسرى؛ لتحديد ارتفاعات المستطيلات المعطى عرض كلٍّ منها، ثم أوجد الوسط للتقريبين: (مثال 2)

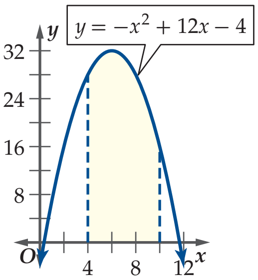
6) العرض 0.5



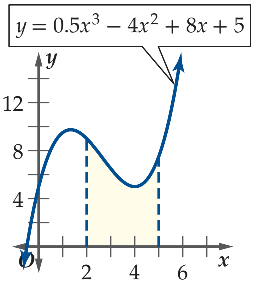
7) العرض 0.5



8) العرض 0.75



9) العرض 0.5



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي: (المثالان 3, 4)

10) $\int_1^4 4x^2\, dx$

11) $\int_0^2 6x\, dx$

12) $\int_1^3 (2x^2 + 3)\, dx$

13) $\int_0^4 (4x - x^2)\, dx$

14) $\int_3^4 (-x^2 + 6x)\, dx$

15) $\int_2^4 (-3x + 15)\, dx$

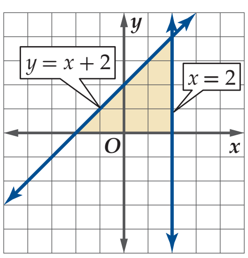
16) $\int_1^5 (x^2 - x + 1)\, dx$

17) $\int_1^3 12x\, dx$

18) **طباعة:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس . إذا زاد عدد الكتب المطبوعة يوميًّا من 1000 كتاب إلى 1500 كتاب، فأوجد قيمة تكلفة الزيادة والمعطاة بالتكامل

$\int_{1000}^{1500} (10 - 0.002x)\, dx$. (مثال 5)

19) يمكن حساب التكاملات المحددة عندما يكون أحد حدي التكامل موجبًا والآخر سالبًا.



a) أوجد طول قاعدة وارتفاع المثلث، ثم مساحته باستعمال قانون مساحة المثلث.

b) أوجد مساحة المثلث بحساب التكامل $\int_{-2}^{2} (x + 2)\, dx$.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

20) $\int_{-1}^{1} x^2\, dx$

21) $\int_{-1}^{0} (x^3 + 2)\, dx$

22) $\int_{-4}^{-2} (-x^2 - 6x)\, dx$

23) $\int_{-3}^{-2} -5x\, dx$

24) $\int_{-2}^{0} (2x + 6)\, dx$

25) $\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x)\, dx$

استعمل النهايات لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمُعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_{-3}^{-1} (-2x^2 - 7x)\, dx$

27) $\int_{-2}^{0} (-x^3)\, dx$

28) $\int_{-4}^{3} 2\, dx$

29) $\int_{-2}^{-1} \left(-\frac{1}{2}x + 3\right) dx$

30) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة عملية إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

a) **بيانيًا:** مَثِّل منحنيي $f(x) = -x^2 + 4, g(x) = x^2$ في المستوى الإحداثي نفسه، وظلِّل المساحتين اللتين يمثِّلهما التكاملان $\int_0^1 (-x^2 + 4)\, dx, \int_0^1 x^2\, dx$

b) **تحليليًا:** احسب $\int_0^1 (-x^2 + 4)\, dx, \int_0^1 x^2\, dx$.

c) **لفظيًا:** وضّح لماذا تكون مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين مساويةً لـ $\int_0^1 (-x^2 + 4)\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$. ثم احسب هذه القيمة باستعمال القيم التي أوجدتها في الفرع **b** .

d) **تحليليًا:** أوجد $f(x) - g(x)$، ثم احسب $\int_0^1 [f(x) - g(x)]\, dx$

e) **لفظيًا:** خمِّن طريقة إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **اكتشف الخطأ:** سُئل ماجد وخالد عن دقة تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات، فأجاب ماجد: إنه عند تقريب المساحة تحت منحنى باستعمال أطراف المستطيلات اليمنى، فإن المساحة الناتجة تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. في حين أجاب خالد: إن المساحة المحسوبة باستعمال أطراف المستطيلات اليسرى تكون أكبر دائمًا من المساحة الحقيقية تحت المنحنى. أيهما كانت إجابته صحيحة ؟ برِّر إجابتك.

32) **تبرير:** افترض أن المقطع الرأسي العرضي لنفق يُعطى بالدالة f . اشرح كيف يمكن حساب حجم النفق باستعمال $\int_0^d f(x)\, dx$ ، حيث d عرض النفق، إذا كان طوله معلومًا. برِّر إجابتك

33) **اكتب:** اكتب ملخصًا للخطوات المتبعة لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x على فترة معطاة.

34) **تحدٍّ:** أوجد $\int_0^t (x^2 + 2)\, dx$.

35) **اكتب:** وضّح إمكانية استعمال المثلثات أو الدوائر في تقريب المساحة تحت المنحنيات. أي الشكلين يعطي تقريبًا أفضل برأيك؟

تدريب على اختبار

36) ما مساحة المنطقة المحصورة بين $y = -x^2 - 3x + 6$ والمحور x ، في الفترة $[2, 6]$ ؟

A 93.33 وحدة مربعة تقريبًا

B 90 وحدة مربعة تقريبًا

C 86.67 وحدة مربعة تقريبًا

D 52 وحدة مربعة تقريبًا

37) أيٌّ مما يأتي يمثِّل مشتقة $n(a) = \frac{4}{a} - \frac{5}{a^2} + \frac{3}{a^4} + 4a$؟

A $n'(a) = 8a - 5a^2 + 3a^4$

B $n'(a) = 4a^2 - 5a^3 + 3a^4 + 4$

C $n'(a) = -\frac{4}{a^2} + \frac{5}{a^3} - \frac{3}{a^5} + 4$

D $n'(a) = -\frac{4}{a^2} + \frac{10}{a^3} - \frac{12}{a^5} + 4$

38) ما قيمة $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 5x + 6}$ ؟

A $\frac{1}{15}$

B $\frac{2}{15}$

C $\frac{3}{15}$

D $\frac{4}{15}$

5-6

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل
The Fundamental Theorem of Calculus

فيما سبق:

درستُ استعمال النهايات لتقريب المساحة تحت منحنى دالة.

والآن:

- أجدُ دوال أصلية.
- أستعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لأجد التكامل المحدد.

المفردات:

الدالة الأصلية antiderivative

التكامل غير المحدد indefinite integral

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل Fundamental Theorem of Calculus

لماذا؟

سقط قلم من جيب علي في أثناء ركوبه منطادًا، فهوى نحو الأرض. إذا كانت سرعة سقوط القلم المتجهة بالقدم لكل ثانية تُعطى بـ $v(t) = -32t$ ، فمن الممكن إيجاد الارتفاع الذي سقط منه القلم.

الدوال الأصلية والتكامل غير المحدد تعلمت في الدرسين 3-5 و4-5، أنّه إذا أُعطيْتَ موقع جسم بـ $f(x) = x^2 + 2x$ ، فإن العبارة التي تمثِّل سرعة الجسم هي مشتقة $f(x)$ أو $f'(x) = 2x + 2$ ، لكن إذا أُعطيت عبارة تمثِّل السرعة، وطُلِب إليك إيجاد صيغة المسافة التي تم إيجاد السرعة منها، فلا بد من وجود طريقة للعمل عكسيًّا والعودة إلى الدالة الأصلية وإلغاء الاشتقاق.

وبمعنى آخر، فإننا نبحث عن $F(x)$ ، بحيث إن $F'(x) = f(x)$. وتُسمَّى $F(x)$ **دالة أصلية** للدالة f .

مثال 1 إيجاد الدوال الأصلية

أوجد دالة أصلية لكل دالة مما يأتي:

a) $f(x) = 3x^2$

لنبحث عن دالة مشتقتها $3x^2$. تذكر أن قوة x في مشتقة دالة القوة أقل بواحد من قوة x في الدالة. وعليه فإن قوة المتغير x في $F(x)$ ستكون 3 ، وبما أن معامل x في مشتقة الدالة يساوي قوة x في الدالة، فإن $F(x) = x^3$ تحقق المطلوب. حيث إن مشتقة x^3 هي $3x^{3-1}$ أو $3x^2$.

إن x^3 ليست الدالة الوحيدة التي تحققُ المطلوب، فمثلًا $G(x) = x^3 + 10$ تحقق المطلوب أيضًا؛ لأن $G'(x) = 3x^{3-1} + 0 = 3x^2$ ، وكذلك $H(x) = x^3 - 37$ تحقق المطلوب.

b) $f(x) = -\frac{8}{x^9}$

أعد كتابة $f(x)$ بقوى سالبة لتحصل على $f(x) = -8x^{-9}$ ، وبما أن قوة x في مشتقة الدالة أقل بواحد من قوة x في الدالة، فإن قوة x في $F(x)$ ستكون -8 ، وعليه تكون $F(x)= x^{-8}$ دالة أصلية للدالة f ، فمشتقة x^{-8} هي $-8x^{-8-1} = -8x^{-9}$. لاحظ أن كلًّا من $G(x) = x^{-8} + 3$ ، $H(x) = x^{-8} - 12$ تمثِّل دالة أصلية للدالة f .

تحقق من فهمك

أوجد دالَّتين أصليتين مختلفتين لكل دالة مما يأتي:

1A) $2x$

1B) $-3x^{-4}$

في المثال 1 لاحظ أن إضافة أو طرح ثابت لدالَّةٍ أصلية ينتج عنه دالة أصلية أخرى، وبشكل عام فإن إضافة أو طرح ثابت C لدالة أصلية يُنتج دالة أصلية أخرى ؛ لأن مشتقة الثابت صفر. وعليه فإن هناك عددًا لانهائيًّا من الدوال الأصلية لأي دالة. والشكل العام للدالة الأصلية هو الشكل الذي يحوي الثابت C .

كما في المشتقات، فإن هناك قواعد لإيجاد الدالة الأصلية.

مفهوم أساسي **قواعد الدالة الأصلية**

قاعدة القوة: إذا كان $f(x) = x^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، فإن: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت: إذا كان $f(x) = kx^n$، حيث n عدد نسبي لا يساوي -1، k عددًا ثابتًا، فإن: $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$.

قاعدة المجموع والفرق: إذا كان لـ $f(x)$، $g(x)$ دالتان أصليتان هما $F(x)$، $G(x)$ على الترتيب، فإن: $F(x) \pm G(x)$ دالة أصلية لـ $f(x) \pm g(x)$.

مثال 2 قواعد الدوال الأصلية

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$f(x) = 4x^7$ (a

$f(x) = 4x^7$ الدالة المعطاة

$F(x) = \frac{4x^{7+1}}{7+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= \frac{1}{2}x^8 + C$ بسّط

$f(x) = \frac{2}{x^4}$ (b

$f(x) = \frac{2}{x^4}$ الدالة المعطاة

$= 2x^{-4}$ أعد كتابة الدالة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{2x^{-4+1}}{-4+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -\frac{2}{3}x^{-3} + C = -\frac{2}{3x^3} + C$ بسّط

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ (c

$f(x) = x^2 - 8x + 5$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 8x^1 + 5x^0$ أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{8x^{1+1}}{1+1} + \frac{5x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x + C$ بسّط

تحقق من فهمك

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

$f(x) = 6x^4$ (2A

$f(x) = \frac{10}{x^3}$ (2B

$f(x) = 8x^7 + 6x + 2$ (2C

إرشادات للدراسة

الدوال الأصلية

$F(x) = kx$ هي دالة أصلية لـ $f(x) = k$، فمثلًا، إذا كان $f(x) = 3$، فإن $F(x) = 3x$.

ربط المفردات

التكامل غير المحدد

سبب تسمية التكامل غير المحدد بهذا الاسم أنه لا يُعبر عن دالة محددة، بل عن عدد لا نهائي من الدوال الأصلية.

يُعطى الشكل العام للدّالة الأصلية باسم ورمز خاصّين.

مفهوم أساسي **التكامل غير المحدد**

يُعطى التكامل غير المحدد للدالة f بالصيغة $\int f(x)\,dx = F(x) + C$، حيث $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$، و C ثابت.

مثال 3 من واقع الحياة التكامل غير المحدد

فيزياء: أجرى طلاب الصف الثالث الثانوي في إحدى المدارس الثانوية تجربة فيزيائية تتضمن إسقاط كرة من نافذة الفصل التي ترتفع عن سطح الأرض بـ 30 ft ، وتمثِّل $v(t) = -32t$ سرعةَ الكرة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

a) أوجد دالَّة موقع الكرة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها .

لإيجاد دالة الموقع، أوجد الدالة الأصلية لـ $v(t)$.

$$s(t) = \int v(t)\,dt$$ العلاقة بين الموقع والسرعة المتجهة

$$= \int -32t\,dt$$ $v(t) = -32t$

$$= -\frac{32t^{1+1}}{1+1} + C$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$$= -16t^2 + C$$ بسِّط

أوجد C بتعويض 30 ft للارتفاع الابتدائي ، 0 s للزمن الابتدائي.

$$s(t) = -16t^2 + C$$ الدالة الأصلية لـ $v(t)$

$$30 = -16(0)^2 + C$$ $s(t) = 30 , t = 0$

$$30 = C$$ بسِّط

أي أن دالة موقع الكرة هي $s(t) = -16t^2 + 30$.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الكرة حتى تصل إلى سطح الأرض.

حُلّ المعادلة $s(t) = 0$.

$$s(t) = -16t^2 + 30$$ دالة موقع الكرة

$$0 = -16t^2 + 30$$ $s(t) = 0$

$$-30 = -16t^2$$ اطرح 30 من كلا الطرفين

$$1.875 \approx t^2$$ اقسم كلا الطرفين على -16

$$1.369 \approx t$$ خُذ الجذر التربيعي الموجب لكلا الطرفين

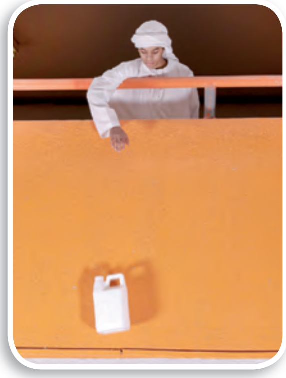
أي أن الكرة ستستغرق 1.369 s تقريبًا حتى تصل إلى سطح الأرض.

تحقق من فهمك

3) **سقوط حُر:** عند قيام فنِّي بإصلاح نافذة برج على ارتفاع 120 ft سقطت محفظتُه نحو الأرض، وتمثّل $v(t) = -32t$ سرعة المحفظة المتجهة اللحظية بالأقدام بعد t ثانية من سقوطها.

A) أوجد دالة موقع المحفظة $s(t)$ بعد t ثانية من سقوطها.

B) أوجد الزمن الذي تستغرقُهُ المحفظة حتى تصل إلى سطح الأرض.



الربط مع الحياة

السقوط الحر قبل أربعمائة عام تقريبًا، استنتج جاليليو جاليلي أن لجميع الأجسام التي تسقط سقوطًا حرًّا التسارع نفسه ، باهمال تأثير الهواء، وأن هذا التسارع لا يتأثر بأي من مادة الجسم الساقط أو وزنه أو الارتفاع الذي سقط منه.

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لاحظ أن الرمز المُستعمل للتكامل غير المحدد يبدو شبيهًا بالرمز الذي استُعمل للتكامل المحدد في الدرس 5-5 ، إذ إن الفرق الوحيد هو عدم ظهور حدَّي التكامل الأعلى والأدنى في رمز التكامل غير المحدد. إن إيجاد الدالة الأصلية لدالة ما: هو طريقة مختصرة لحساب التكامل المحدد للدالة نفسها باستعمال مجموع ريمان. وهذه العلاقة بين التكاملات المحددة والدوال الأصلية ذات أهمية كبيرة، وتُسمى **النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل**.

مفهوم أساسي النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$ ، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

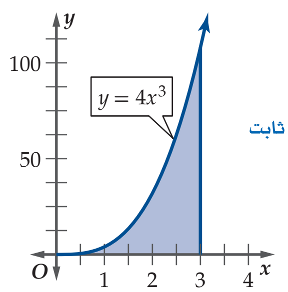
ويمكن التعبير عن الطرف الأيمن من هذه العبارة بالرمز $F(x)\Big|_a^b$.

من نتائج النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل أنها ربطت بين التكاملات والمشتقات، فالتكامل هو عملية إيجاد دوال أصلية، في حين أن الاشتقاق هو عملية إيجاد مشتقات. لذا فإن عمليتي التكامل والاشتقاق هما عمليتان عكسيتان، ويمكننا استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب التكاملات المحددة دون الحاجة إلى استعمال النهايات.

مثال 4 المساحة تحت منحنى

استعمل النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل لحساب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى كل دالة مما يأتي والمحور x على الفترة المعطاة:

a) $y = 4x^3$ على الفترة $[1, 3]$؛ أي $\int_1^3 4x^3\,dx$.



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int 4x^3\,dx = \frac{4x^{3+1}}{3+1} + C \qquad \text{قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت}$$

$$= x^4 + C \qquad \text{بسّط}$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، ثم أوجد الفرق.

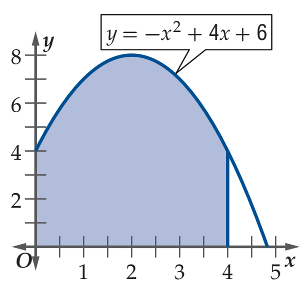
$$\int_1^3 4x^3\,dx = x^4 + C\Big|_1^3 \qquad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= ((3)^4 + C) - ((1)^4 + C) \qquad a = 1 , b = 3$$

$$= 81 - 1 = 80 \qquad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 4\,x^3$ والمحور x على الفترة $[1, 3]$ هي 80 وحدة مربعة.

b) $y = -x^2 + 4x + 6$ على الفترة $[0, 4]$؛ أي $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 6)\,dx$



أولًا: أوجد الدالة الأصلية.

$$\int (-x^2 + 4x + 6)\,dx$$

$$= -\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{4x^{1+1}}{1+1} + \frac{6x^{0+1}}{0+1} + C \qquad \text{قواعد الدالة الأصلية}$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C \qquad \text{بسّط}$$

الآن: احسب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل، ثم أوجد الفرق.

$$\int_0^4 (-\,x^2 + 4x + 6)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 6x + C\Big|_0^4 \qquad \text{النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل}$$

$$= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 + 6(4) + C\right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 + 6(0) + C\right) \qquad a = 0 , b = 4$$

$$\approx 34.67 - 0 \approx 34.67 \qquad \text{بسّط}$$

أي أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = -\,x^2 + 4\,x + 6$ والمحور x على الفترة $[0 , 4]$ هي 34.67 وحدة مربعة تقريبًا.

✓ تحقق من فهمك

احسب كل تكامل محدد مما يأتي:

4A) $\int_2^5 3x^2\,dx$

4B) $\int_1^2 (16x^3 - 6x^2)\,dx$

لاحظ أنه عند حساب قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى للتكامل ، وحساب الفرق بين القيمتين ، فإن C لن تظهر في الناتج؛ وذلك لأن C موجودة في كلتا الدالتين الأصليتين، فإن الفرق بين قيمتي C يساوي صفرًا. لذا فإنه لحساب تكامل محدد باستعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل يمكنك إهمال الثابت C، وعدم كتابته في الدالة الأصلية.

قبل حساب التكامل حدِّد ما إذا كان محددًا أو غير محدد.

تنبيه!

التكاملات

صحيح أنه يمكن تجاهل الثابت C عند حساب التكامل المحدد، إلا أنه يجب أخذه بعين الاعتبار عند حساب التكامل غير المحدد؛ لأنه جزء من الدالة الأصلية.

مثال 5 التكاملات المحددة وغير المحددة

احسب كل تكامل مما يأتي:

a) $\int (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل غير محدد. استعمل قواعد الدالة الأصلية لحسابه.

$$\int (9x - x^3)\, dx = \frac{9x^{1+1}}{1+1} - \frac{x^{3+1}}{3+1} + C$$ قواعد الدالة الأصلية

$$= \frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4} + C$$ بسّط

b) $\int_2^3 (9x - x^3)\, dx$

هذا تكامل محدد. احسب قيمة التكامل باستعمال قيمة الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى.

$$\int_2^3 (9x - x^3)\, dx = \left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^3$$ النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= \left(\frac{9}{2}(3)^2 - \frac{(3)^4}{4}\right) - \left[\frac{9}{2}(2)^2 - \frac{(2)^4}{4}\right]$$ $a = 2 , b = 3$

$$= 20.25 - 14 = 6.25$$ بسّط

تحقق من فهمك

احسب كل تكامل مما يأتي:

5A) $\int (6x^2 + 8x - 3)\, dx$

5B) $\int_1^3 (-x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 30x - 4)\, dx$

لاحظ أن التكامل غير المحدد يُعطي الدالّة الأصلية، في حين لا يُعطي التكامل المحدد الدالة الأصلية بصورة صريحة، بل هو الفرق بين قيمتي الدالة الأصلية عند الحدين الأعلى والأدنى. أي أن التكامل غير المحدد يعطي دالة، وهي الدالة الأصلية، ويمكن استعمالها لإيجاد مساحة المنطقة تحت منحنى الدالة بين أي حدين أعلى وأدنى؛ ليصبح التكامل عندها محددًا.

مثال 6 التكاملات المحددة

يُعطى الشغل اللازم لشد نابض ما مسافة 0.5 m من موضعه الطبيعي بالتكامل $\int_0^{0.5} 360x\, dx$. ما قيمة الشغل اللازم لشد النابض مقيسًا بوحدة الجول؟

احسب قيمة التكامل المحدد.

$$\int_0^{0.5} 360x\, dx = 180x^2 \Big|_0^{0.5}$$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت ، والنظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

$$= 180(0.5)^2 - 180(0)^2$$ $a = 0 , b = 0.5$

$$= 45 - 0 = 45$$ بسّط

أي أن الشغل اللازم هو 45J .

تحقق من فهمك

أوجد الشغل اللازم لشد نابض مسافة ما والمعطى بالتكامل في كل مما يأتي:

6A) $\int_0^{0.7} 476x\, dx$

6B) $\int_0^{1.4} 512x\, dx$

تدرب وحل المسائل

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي: (المثالان 1, 2)

(1 $f(x) = x^5$

(2 $f(z) = \sqrt[3]{z}$

(3 $q(r) = \frac{3}{4} r^{\frac{2}{5}} + \frac{5}{8} r^{\frac{1}{3}} + r^{\frac{1}{2}}$

(4 $w(u) = \frac{2}{3} u^5 + \frac{1}{6} u^3 - \frac{2}{5} u$

(5 $u(d) = \frac{12}{d^5} + \frac{5}{d^3} - 6\, d^2 + 3.5$

(6 $m(t) = 16\, t^3 - 12\, t^2 + 20\, t - 11$

(7 سقوط حر: ارجع إلى فقرة "لماذا؟" في بداية الدرس. افترض أن القلم قد استغرق 2s حتى الوصول إلى سطح الأرض. (مثال 3)

(a أوجد دالة الموقع $s(t) = \int -32t\, dt$.

(b احسب قيمة C عندما $t = 2\text{s}$ ، $s(t) = 0$.

(c ما ارتفاع القلم عن سطح الأرض بعد 1.5s من سقوطه؟

احسب كل تكامل مما يأتي: (المثالان 4, 5)

(8 $\int (6m + 12m^3)\, dm$

(9 $\int_1^4 2\, x^3\, dx$

(10 $\int_2^5 (a^2 - a + 6)\, da$

(11 $\int_1^3 \left(\frac{1}{2} h^2 + \frac{2}{3} h^3 - \frac{1}{5} h^4\right) dh$

(12 $\int (\, 3.4\, t^4 - 1.2\, t^3 + 2.3\, t - 5.7\,)\, dt$

(13 $\int (14.2\, w^{6.1} - 20.1\, w^{5.7} + 13.2\, w^{2.3} + 3\,)\, dw$

(14 حشرات: تُعطى سرعة قفز حشرة بـ $v(t) = -32t + 34$ ، حيث t الزمن بالثواني، و $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية. (مثال 6)

(a أوجد دالة الموقع $s(t)$ للحشرة، ثم احسب قيمة الثابت C بفرض أنه عندما $t = 0$ ، فإن $s(t) = 0$.

(b أوجد الزمن من لحظة قفز الحشرة حتى هبوطها على سطح الأرض؟

(15 هندسة: صمَّم مهندس مدخل بناية على شكل قوس يمكن وصفه بـ $y = -\frac{x^2}{157.5} + 4x$ ، حيث x بالأقدام. احسب مساحة المنطقة تحت القوس. (مثال 6)

احسب كل تكامل مما يأتي:

(16 $\int_{-3}^{1} 3\, dx$

(17 $\int_{-1}^{2} (-\, x^2 + 10)\, dx$

(18 $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{4}\right) dx$

(19 $\int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^3 - 4x + 8)\, dx$

(20 $\int_{-6}^{-3} (-x^2 - 9x - 10)\, dx$

(21 مقذوفات: تُعطى سرعة مقذوف بـ $v(t) = -\,32t + 120$ ، حيث $v(t)$ السرعة المتجهة بالأقدام لكل ثانية بعد t ثانية ، ويبلغ ارتفاعه 228 ft بعد 3 s .

(a أوجد أقصى ارتفاع يصله المقذوف.

(b أوجد سرعة المقذوف عندما يصل إلى سطح الأرض.

احسب كل تكامل مما يأتي:

(22 $\int_x^2 (3t^2 + 8t)\, dt$

(23 $\int_5^x (10t^4 - 12t^2 + 5)\, dt$

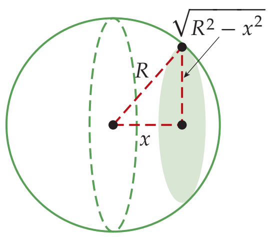
(24 $\int_3^2 (4t^3 + 10t + 2)\, dt$

(25 $\int_{-x}^{6} (-9t^2 + 4t)\, dt$

(26 $\int_x^{x^2} (16t^3 - 15t^2 + 7)\, dt$

(27 $\int_{2x}^{x+3} (3t^2 + 6t + 1)\, dt$

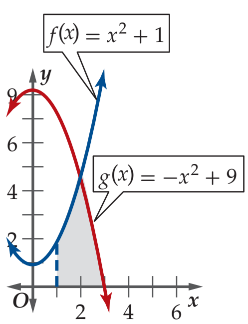
(28 حجم الكرة: يمكن إيجاد حجم كرة طول نصف قطرها R بقصها إلى حلقات دائرية من خلال مستويات رأسية متوازية ثم إجراء تكامل لحساب مساحات الحلقات الدائرية.



يبلغ طول نصف قطر كل حلقة $\sqrt{R^2 - x^2}$ ، أي أن مساحة كل حلقة هي $\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\,\right)^2$.

أوجد $\int_{-R}^{R} (\pi R^2 - \pi x^2)\, dx$ لحساب حجم الكرة .

(29 مساحات: احسب مساحة المنطقة المظلّلة في الرسم والمحصورة بين منحنيي $f(x)$، $g(x)$ والمحور x ، في الفترة $1 \le x \le 3$.



30) **تمثيلات متعددة:** ستستكشف في هذه المسألة العلاقة بين قيمة تكامل دالة على فترة، ومساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، وتأثير موقع الدالة بالنسبة لمحور x على إشارة التكامل.

a) **هندسيًا:** مَثِّل الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ بيانيًا، وظلِّل المنطقة المحصورة بين $f(x)$ والمحور x، في الفترة $0 \leq x \leq 4$.

b) **تحليليًا:** احسب كلًّا من:

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx\,,\ \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx$$

c) **لفظيًا:** أعطِ تخمينًا حول مساحة المنطقة الواقعة فوق أو تحت المحور x .

d) **تحليليًا** أوجد التكامل على الفترة كاملة من خلال حساب $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx$ ، ثم أوجد المساحة الكلية من خلال حساب

$$\left|\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx\right| + \left|\int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx\right|$$

e) **لفظيًا:** أعطِ تخمينًا حول الفرق بين قيمة التكامل على الفترة كاملة والمساحة الكلية.

مسائل مهارات التفكير العليا

31) **تحدٍّ:** احسب قيمة $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$. حيث r عدد ثابت.

تبرير: حَدِّد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة أبدًا. برِّر إجابتك:

32) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_b^a f(x)\, dx$

33) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\, dx$

34) $\int_a^b f(x)\, dx = \int_{|b|}^{|a|} f(x)\, dx$

35) **برهان:** أثبت أنه لأي عددين ثابتين m ، n ، فإن $\int_a^b (n + m)\, dx = \int_a^b n\, dx + \int_a^b m\, dx$.

36) **تبرير:** صف قيم $\int_a^b f(x)\, dx$ ، $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ، $f(x)$ ، عندما يقع التمثيل البياني للدالة f تحت المحور x في الفترة $a \leq x \leq b$.

37) **اكتب:** بيِّن لماذا يمكننا إهمال الحد الثابت C في الدالة الأصلية عند حساب التكامل المحدد.

تدريب على اختبار

38) إذا كان $\int_0^2 \mathrm{k}\, x\, dx = 6$ ، فما قيمة k ؟

A 1

B 2

C 3

D 4

الوحدة 5

دليل الدراسة والمراجعة

ملخص الوحدة

مفاهيم أساسية

تقدير النهايات بيانيًا (الدرس 1-5)

- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c موجودة، إذا وفقط إذا كانت النهايتان من اليمين واليسار موجودتين ومتساويتين.
- تكون نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c غير موجودة إذا اقتربت $f(x)$ من قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار ومن اليمين، أو عندما تزداد قيم $f(x)$ أو تتناقص بشكل غير محدود عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار أو اليمين أو كليهما، أو عندما تتذبذب قيم $f(x)$ بين قيمتين مختلفتين عند اقتراب قيم x من c.

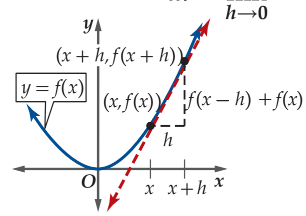
حساب النهايات جبريًا (الدرس 2-5)

- يمكن إيجاد نهايات كثيرات الحدود والدوال النسبية عادةً من خلال التعويض المباشر.
- إذا توصلت إلى الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ عند حساب نهاية دالة نسبية، فبَسّط العبارة جبريًا من خلال تحليل كل من البسط والمقام أو إنطاق البسط أو المقام، ثم اختصار العوامل المشتركة.

المماس والسرعة المتجهة (الدرس 3-5)

- مُعدّل التغيّر اللحظي للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ هو ميل المماس m عند النقطة $(x, f(x))$، ويُعطى بالصيغة

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



المشتقة (الدرس 4-5)

- يُرمز لمشتقة $f(x) = x^n$ بالرمز $f'(x)$، وتُعطى بالصيغة $f'(x) = nx^{n-1}$، حيث n عدد حقيقي.

المساحة تحت المنحنى والتكامل (الدرس 5-5)

- تُعطى مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة $f(x)$ والمحور x بالصيغة

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

، حيث a ، b هما الحدان الأعلى والأدنى للتكامل،

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الدرس 6-5)

- الدالة الأصلية لـ $f(x) = x^n$ هي $F(x)$ وتُعطى بالصيغة $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ، حيث C عدد ثابت
- إذا كانت $F(x)$ دالةً أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

المفردات

- النهاية من جهة واحدة ص 162
- النهاية من جهتين ص 162
- التعويض المباشر ص 171
- الصيغة غير المحددة ص 172
- المماس ص 181
- مُعدل التغيّر اللحظي ص 181
- قسمة الفرق ص 181
- السرعة المتجهة اللحظية ص 183
- المشتقة ص 188
- الاشتقاق ص 188
- المعادلة التفاضلية ص 188
- المؤثر التفاضلي ص 188
- التجزيء المنتظم ص 198
- التكامل المحدد ص 199
- الحد الأدنى ص 199
- الحد الأعلى ص 199
- مجموع ريمان الأيمن ص 199
- التكامل ص 199
- الدالة الأصلية ص 205
- التكامل غير المحدد ص 206
- النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل ص 207

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة لكل عبارة مما يأتي:

1) ميل المنحنى غير الخطي عند نقطة عليه هو ــــــــــــ ، والذي يمكن تمثيله بميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.

2) يمكن إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى دالة والمحور x باستعمال ــــــــــــ .

3) يمكن إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود والدوال النسبية باستعمال ــــــــــــ ، وذلك إذا كان مقام الدالة النسبية لا يساوي صفرًا عند النقطة التي تُحسب عندها النهاية .

4) إذا كان $F'(x) = f(x)$ ، فإن $F(x)$ تُسمى ــــــــــــ لـ $f(x)$.

5) يُسمى ناتج التعويض في النهايات على الصورة $\frac{0}{0}$ بـ ــــــــــــ .

6) تُسمى عملية إيجاد المشتقة بـ ــــــــــــ .

7) إذا سُبقت دالة بـ ــــــــــــ $\frac{d}{dx}$ ، فإن ذلك يعني إيجاد مشتقة الدالة.

8) يطلق على السرعة المتجهة عند لحظة زمنية محددة ــــــــــــ .

مراجعة الدروس

5-1 تقدير النهايات بيانيًا (الصفحات 160 - 168)

قدّر كل نهاية مما يأتي باستعمال التمثيل البياني، ثم عزّز إجابتك باستعمال جدول قيم:

9) $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 7)$

10) $\lim\limits_{x \to 1} (0.5x^4 + 3x^2 - 5)$

قدِّر كل نهاية مما يأتي:

11) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + x + 20}{x - 4}$

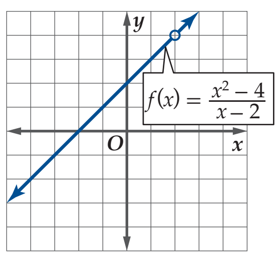
13) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{9}{x^2 - 8x + 16}$

14) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x - 10}{x - 2}$

مثال 1

قدّر $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ باستعمال التمثيل البياني، ثم عزِّز إجابتك باستعمال جدول قيم.

التحليل بيانيًا : يُبيّن التمثيل البياني للدالة $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ أدناه أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 ، فإن قيم $f(x)$ المقابلة تقترب من 4 ؛ لذا فإن بإمكاننا تقدير $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ بالعدد 4 .



التعزيز عدديًا : كوّن جدول قيم باختيار قيم x القريبة من العدد 2 من كلا الجهتين.

x تقترب من 2 ← | → x تقترب من 2

x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

يبيِّن نمط قيم $f(x)$، أنه كلما اقتربت قيم x من العدد 2 من اليسار ومن اليمين، فإن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 .

5-2 حساب النهايات جبريًا (الصفحات 169-178)

استعمل خصائص النهايات لحساب كل نهاية مما يأتي:

15) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + 2x + 10}{x}$

16) $\lim\limits_{x \to -1} (5x^2 - 2x + 12)$

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

17) $\lim\limits_{x \to 25} \dfrac{x^2 + 1}{\sqrt{x} - 5}$

18) $\lim\limits_{x \to 2} (-3x^3 - 2x^2 + 15)$

احسب كل نهاية مما يأتي:

19) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 2x - 8}$

20) $\lim\limits_{x \to \infty} (2 - 4x^3 + x^2)$

مثال 2

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ذلك ممكنًا، وإلا فاذكر السبب.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1)$

بما أن هذه نهاية كثيرة حدود؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 - x^2 + 4x + 1) = 2(2)^3 - 2^2 + 4(2) + 1$$
$$= 16 - 4 + 8 + 1 = 21$$

b) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x - 7}{2 - x^2}$

بما أن هذه نهاية دالة نسبية مقامها ليس صفرًا عندما $x = -4$ ؛ لذا يمكننا حسابها باستعمال التعويض المباشر.

$$\lim_{x \to -4} \frac{2x - 7}{2 - x^2} = \frac{2(-4) - 7}{2 - (-4)^2} = \frac{-8 - 7}{2 - 16} = \frac{15}{14}$$

دليل الدراسة والمراجعة

5-3 المماس والسرعة المتجهة (الصفحات 186-181)

أوجد ميل مماس منحنى كل دالة مما يأتي عند النقاط المعطاة :

21) $y = 6 - x$, $(-1, 7)$, $(3, 3)$

22) $y = x^2 + 2$, $(0, 2)$, $(-1, 3)$

أوجد معادلة ميل منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند أي نقطة عليه:

23) $y = -x^2 + 3x$

24) $y = x^3 + 4x$

تمثِّل $s(t)$ في كل مما يأتي موقع جسم بالأقدام بعد t ثانية . أوجد سرعة الجسم المتجهة اللحظية عند الزمن المعطى:

25) $s(t) = 15t - 16t^2$, $t = 0.5$

26) $s(t) = -16t^2 - 35t + 400$, $t = 3.5$

تمثِّل $h(t)$ في كل مما يأتي مسار جسم متحرك . أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للجسم عند أي زمن:

27) $h(t) = 12t^2 - 5$

28) $h(t) = 8 - 2t^2 + 3t$

مثال 3

أوجد ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$.

$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ — صيغة مُعدّل التغيّر اللحظي

$= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ — $x = 2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$ — $f(2+h) = (2+h)^2$, $f(2) = 2^2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h}$ — فُك الأقواس

$= \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h}$ — بسِّط، ثم حلّل

$= \lim_{h \to 0} (4 + h)$ — اقسم على h

$= 4 + 0 = 4$ — عوِّض

أي أن ميل مماس منحنى $y = x^2$ عند النقطة $(2, 4)$ هو 4 .

5-4 المشتقات (الصفحات 195-188)

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي باستعمال النهايات ، ثم احسب قيمة المشتقة عند النقاط المعطاة.

29) $g(t) = -t^2 + 5t + 11$, $t = -4$, 1

30) $m(j) = 10j - 3$, $j = 5$, -3

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

31) $p(v) = -9v + 14$

32) $z(n) = 4n^2 + 9n$

33) $t(x) = -3\sqrt[5]{x^6}$

34) $g(h) = 4h^{\frac{3}{4}} - 8h^{\frac{1}{2}} + 5$

استعمل قاعدة مشتقة القسمة؛ لإيجاد مشتقة كل دالة مما يأتي:

35) $f(m) = \frac{5 - 3m}{5 + 2m}$

36) $m(q) = \frac{2q^4 - q^2 + 9}{q^2 - 12}$

مثال 4

أوجد مشتقة $h(x) = \frac{x^2 - 5}{x^3 + 2}$.

افترض أن $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = x^3 + 2$. لذا، $h(x) = f(x)/g(x)$. أوجد مشتقة كل من $f(x)$, $g(x)$

$f(x) = x^2 - 5$ — من الفرض

$f'(x) = 2x$ — قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

$g(x) = x^3 + 2$ — من الفرض

$g'(x) = 3x^2$ — قواعد مشتقات القوة والدالة الثابتة

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ — قاعدة مشتقة القسمة

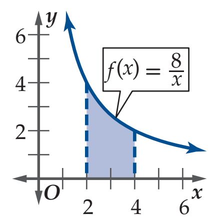
$= \frac{2x(x^3 + 2) - (x^2 - 5)3x^2}{(x^3 + 2)^2}$ — عوِّض

$= \frac{-x^4 + 15x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$ — بسِّط

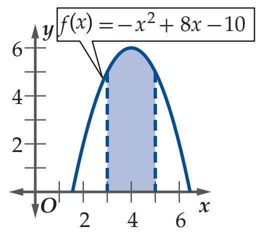
5-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل (الصفحات 196-204)

قرِّب مساحة المنطقة المظللة تحت منحنى كل دالة مما يأتي باستعمال الأطراف اليمنى و 5 مستطيلات:

(37



(38



استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x، والمعطى بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

(39 $\int_1^2 2x^2\,dx$

(40 $\int_0^3 (2x^3 - 1)\,dx$

(41 $\int_0^2 (x^2 + x)\,dx$

(42 $\int_1^4 (3x^2 - x)\,dx$

مثال 5

استعمل النهايات لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = 2x^2$ والمحور x، في الفترة $[0, 2]$ أو $\int_0^2 2x^2\,dx$.

ابدأ بإيجاد Δx، x_i.

$\Delta x = \frac{b-a}{n}$ صيغة Δx

$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ $b = 2, a = 0$

$x_i = 0 + i\frac{2}{n} = \frac{2i}{n}$ $a = 0, \Delta x = \frac{2}{n}$

$\int_0^2 2x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\left(\frac{2i}{n}\right)^2\left(\frac{2}{n}\right)$ $x_i = \frac{2i}{n}, \Delta x = \frac{2}{n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{4i^2}{n^2}\right)$ بسِّط

$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left(\frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$ صيغ المجموع

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8(2n^2+3n+1)}{3n^2}\right)$ بسِّط

$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{3}\cdot\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right]$ أخرج عاملًا مشتركًا، ثم اقسم على n^2

$= \frac{16}{3} \approx 5.33$ خصائص النهايات

5-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل (الصفحات 205-211)

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(43 $g(n) = 5n - 2$

(44 $r(q) = -3q^2 + 9q - 2$

(45 $m(t) = 6t^3 - 12t^2 + 2t - 11$

(46 $p(h) = 7h^6 + 4h^5 - 12h^3 - 4$

احسب كل تكامل مما يأتي:

(47 $\int 8x^2\,dx$

(48 $\int (2x^2 - 4)\,dx$

(49 $\int_3^5 (2x^2 - 4 + 5x^3 + 3x^4)\,dx$

(50 $\int_1^4 (-x^2 + 4x - 2x^3 + 5x^5)\,dx$

مثال 6

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالة مما يأتي:

(a $f(x) = \frac{4}{x^5}$

$f(x) = 4x^{-5}$ أعد كتابة الدالة المعطاة بقوة سالبة

$F(x) = \frac{4x^{-5+1}}{-5+1} + C$ قاعدة ضرب دالة القوة في عدد ثابت

$= -x^{-4} + C = -\frac{1}{x^4} + C$ بسِّط

(b $f(x) = x^2 - 7$

$f(x) = x^2 - 7$ الدالة المعطاة

$= x^2 - 7x^0$ أعد كتابة الدالة بدلالة قوى x

$F(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{7x^{0+1}}{0+1} + C$ قواعد الدالة الأصلية

$= \frac{1}{3}x^3 - 7x + C$ بسِّط

دليل الدراسة والمراجعة

تطبيقات ومسائل

51) حيوانات: يُعطى عدد الحيوانات P في محميَّة طبيعية بالمئات بعد t سنة بالدالة $P(t) = \frac{40t^3 + 48t + 100}{5t^3 - 70t - 95}$ ، حيث $t \geq 5$. (الدرس 5-1)

a) أوجد العدد التقريبي للحيوانات في المحميَّة بعد 5 سنوات.

b) أوجد $\lim\limits_{t \to \infty} P(t)$ ؟

52) تحف فنية: لدى سلمان تحفة فنية يزداد سعرها كل سنة. افترض أن الدالة $v(t) = \frac{800t}{4t + 19}$ تمثِّل سعر التحفة بعد t سنة بمئات الدراهم. (الدرس 5-1)

a) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

b) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لتقريب سعر التحفة عندما $t = 3 , 6 , 10$.

c) استعمل التمثيل البياني في الفرع **a** لحساب $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$.

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر التحفة.

e) بعد 10 سنوات، قدَّم أحد المعارض الفنية عرضًا لشراء التحفة من سلمان بسعر 30000 درهم، هل من الأفضل بيعها بهذا السعر؟ برِّر إجابتك.

53) مبيعات: افترض أن الدالة $v(t) = \frac{450}{5 + 25(0.4)^t}$ تمثِّل سعر سلعة ما بالريالات بعد t سنة. (الدرس 5-2)

a) أكمل الجدول أدناه:

السنة	0	1	2	3
السعر				

b) استعمل الآلة البيانية لتمثيل الدالة في الفترة $0 \leq t \leq 10$.

c) استعمل التمثيل البياني لتقدير $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ إذا كانت موجودة.

d) وضِّح العلاقة بين نهاية الدالة وسعر السلعة.

54) صواريخ: أُطلق صاروخ رأسيًّا إلى أعلى بسرعة 150 ft/s. افترض أن ارتفاع الصاروخ $h(t)$ بالأقدام بعد t ثانية يُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 150t + 8.2$. (الدرس 5-3)

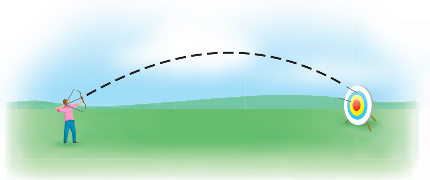
a) أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للصاروخ.

b) ما سرعة الصاروخ بعد 1.5 s من إطلاقه؟

c) متى يصل الصاروخ إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه الصاروخ؟

55) رماية: أطلق محمد سهمًا بسرعة 35 ft/s باتجاه هدف. افترض أن ارتفاع السهم h بالأقدام بعد t ثانية من إطلاقه مُعطى بالدالة $h(t) = -16t^2 + 35t + 1.5$. (الدرس 5-3)



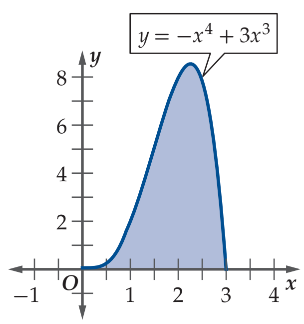
a) اكتب معادلة السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ للسهم .

b) ما سرعة السهم بعد 0.5/s من إطلاقه؟

c) متى يصل السهم إلى أقصى ارتفاع؟

d) ما أقصى ارتفاع يصل إليه السهم؟

56) تصميم: يقوم مصمم ألبسة رياضية بعمل شعار جديد يشبه المنطقة المظللة تحت المنحنى أدناه؛ حيث سيقوم بخياطة هذا الشعار على قمصان لاعبي فريق رياضي ، ما مقدار القماش الذي يحتاج إليه لعمل 50 شعارًا إذا كانت x بالبوصات؟ (الدرس 5-6)



57) ضفادع: تمثِّل الدالة $v(t) = -32t + 26$ سرعة قفز ضفدع بالأقدام لكل ثانية ، حيث t الزمن بالثواني. (الدرس 5-6)

a) أوجد موقع الضفدع $s(t)$ ، على فرض أن $s(t) = 0$ عندما $t = 0$.

b) ما الزمن الذي يستغرقه الضفدع في الهواء عند قفزه؟

58) طيور: سقطت حبة قمح من منقار حمامة تطير على ارتفاع 20 ft ، وتُعطى سرعة سقوط الحبة بالدالة $v(t) = -32t$ ، حيث t الزمن بالثواني، $v(t)$ بالأقدام لكل ثانية. (الدرس 5-6)

a) أوجد موقع الحبة $s(t)$ عند أي زمن.

b) أوجد الزمن الذي تستغرقه الحبة حتى تصل إلى سطح الأرض.

الوحدة 5

اختبار الوحدة

قدّر كل نهاية مما يأتي:

1) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x+4} - 8$

2) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

3) $\lim_{x \to 7} \frac{6}{x - 7}$

4) $\lim_{x \to \infty} x^3 + 5x^2 - 2x + 21$

5) **إلكترونيات:** يُعطى متوسط تكلفة إنتاج جهاز إلكتروني بالدرهم عند إنتاج x جهاز بالدالة $C(x) = \frac{100x + 7105}{x}$.

a) احسب نهاية الدالة عندما تقترب x من المالانهاية.

b) فَسِّر الناتج في الفرع a.

احسب كل نهاية مما يأتي باستعمال التعويض المباشر إذا كان ممكنًا، وإلا فاذكر السبب:

6) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2}{\sqrt{x-4} - 2}$

7) $\lim_{x \to 9} (2x^3 - 12x + 3)$

8) **نادٍ رياضي:** تُمثّل الدالة $S(t) = \frac{2000t^2 + 4}{1 + 10t^2}$ عدد المشتركين في نادٍ رياضي بعد t يوم من افتتاحه.

a) ما عدد المشتركين في البداية؟

b) ما أكبر عدد ممكن لمشتركي النادي؟

احسب كل نهاية مما يأتي (إن وجدت):

9) $\lim_{x \to \infty} (x^2 - 7x + 2)$

10) $\lim_{x \to \infty} (2x^3 - 8x^2 - 5)$

11) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x - 1}{-x^4 + 7x^3 + 4}$

12) $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{25 + x} - 4}{x}$

13) **اختيار من متعدد:** ما قيمة $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$ ؟

A) $-\frac{1}{9}$

B) 0

C) $\frac{1}{9}$

D) غير موجودة

أوجد ميل مماس منحنى كل دالةٍ مما يأتي عند النقاط المعطاة:

14) $y = x^2 + 2x - 8$, $(-5, 7)$, $(-2, -8)$

15) $y = \frac{4}{x^3} + 2$, $(-1, -2)$, $\left(2, \frac{5}{2}\right)$

16) $y = (2x + 1)^2$, $(-3, 25)$, $(0, 1)$

أوجد السرعة المتجهة اللحظية $v(t)$ لجسم يُعطى موقعه عند أي زمن بالدالة $h(t)$ في كل مما يأتي:

17) $h(t) = 9t + 3t^2$

18) $h(t) = 10t^2 - 7t^3$

19) $h(t) = 3t^3 - 2 + 4t$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

20) $f(x) = -3x - 7$

21) $b(c) = 4c^{\frac{1}{2}} - 8c^{\frac{2}{3}} + 5c^{\frac{4}{5}}$

22) $w(y) = 3y^{\frac{4}{3}} + 6y^{\frac{1}{2}}$

23) $g(x) = (x^2 - 4)(2x - 5)$

24) $h(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + t}{t^2}$

25) **صناعة:** تُعطى التكلفة الحدّية c بالدرهم لإنتاج x كرة قدم يوميًا بالدالة $c(x) = 15 - 0.005x$.

a) أوجد دالة تمثِّل التكلفة الحقيقية .

b) أوجد تكلفة زيادة الإنتاج اليومي من 1500 كرة إلى 2000 كرة.

استعمل النهايات؛ لتقريب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الدالة والمحور x ، والمعطاة بالتكامل المحدد في كل مما يأتي:

26) $\int_1^4 (x^2 - 3x + 4)\, dx$

27) $\int_3^8 10x^4\, dx$

28) $\int_2^5 (7 - 2x + 4x^2)\, dx$

أوجد جميع الدوال الأصلية لكل دالّة مما يأتي:

29) $d(a) = 4a^3 + 9a^2 - 2a + 8$

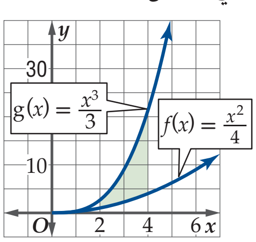
30) $w(z) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{6}z^2 - \frac{2}{5}$

احسب كل تكامل مما يأتي:

31) $\int (5x^3 - 6x^2 + 4x - 3)\, dx$

32) $\int_1^4 (x^2 + 4x - 2)\, dx$

33) **مساحات:** ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي $f(x)$ ، $g(x)$ في الفترة $2 \le x \le 4$ في الشكل أدناه؟



A) $17\frac{5}{12}$ وحدة مساحة

B) $17\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

C) $15\frac{1}{3}$ وحدة مساحة

D) 16 وحدة مساحة

الصيغ

العمليات على الدوال

الجمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	الضرب	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
الطرح	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	القسمة	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\ g(x)\neq 0$

القطوع المخروطية

القطع المكافئ	$(y-k)^2=4p(x-h)$ أو $(x-h)^2=4p(y-k)$	الدائرة	$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ أو $x^2+y^2=r^2$
القطع الناقص	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$	القطع الزائد	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

المتطابقات المثلثية

المتطابقات النسبية		$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$
متطابقات المقلوب	$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$ $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$	$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$ $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$	$\sin\theta=\frac{1}{\csc\theta}$ $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$
متطابقات فيثاغورس	$\cot^2\theta+1=\csc^2\theta$	$\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$	$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
متطابقات الزاويتين المتتامتين	$\sec\theta=\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\csc\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cot\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$	$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ $\cos\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية	$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ $\cot(-\theta)=-\cot\theta$	$\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$
متطابقات المجموع والفرق	$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$		$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
متطابقات ضعف الزاوية	$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$	$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$
متطابقات نصف الزاوية	$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$	$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$	$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

الهندسة الإحداثية

المسافة	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$	نقطة المنتصف	$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
الميل	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_2\neq x_1$		

كثيرات الحدود

القانون العام	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ a\neq 0$	مربع الفرق	$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
مربع المجموع	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	الفرق بين مربعين	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

قيم الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

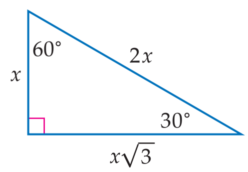
الزاوية	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرّف	0

بعض قيم الدوال المثلثية للزوايا الخاصة

$30°-60°-90°$

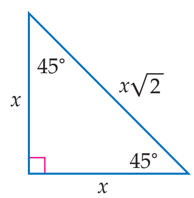
$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \tan 60° = \sqrt{3}$



$45°-45°-90°$

$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \tan 45° = 1$

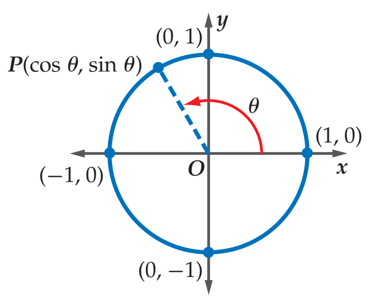


دوال في دائرة الوحدة

إذا قطع ضلع الانتهاء للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي دائرة الوحدة في النقطة $P(x, y)$،

فإن $\cos\theta = x$ ، $\sin\theta = y$ أي أن: $P(x, y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$

مثال: إذا كانت $\theta = 120°$ فإن $P(x, y) = P(\cos 120°, \sin 120°)$



التصويبات

رقم الصفحة	الملاحظة	التعديل