دائرة التعليم والمعرفة
DEPARTMENT OF EDUCATION
AND KNOWLEDGE

مدرسة الدهماء للتعليم والثانوي

قسم الرياضيات

math
2020

الوحدة الأولى (الدوال من منظور التفاضل والتكامل)

إعداد المدرس: محمد نعيم النعسان

الصف الثاني عشر العام
2018 - 2019

الفصل الدراسي الأول

1-1

الدوالّ
Functions

استعمال الصفة المميزة واستعمال رمز الفترة

اكتب كل مجموعة مما يأتي باستعمال رمز بناء المجموعات وباستعمال رمز الفترة إن أمكن:

- $x \leq 7$

....

- $x \leq -3$

....

- $-8 \leq x < 16$

....

- $x > 5$ أو $x \leq -16$

....

- $x \geq -42$

....

- المضاعفات الموجبة للعدد 5

....

- $\{-5, -4, -3, -2, \dots \dots\}$

....

- $-2 < x \leq 19$

....

- $x \geq 11$ أو $x < 4$

....

تحديد العلاقات التي تمثّل دوالّ

في كل علاقة مما يلي ، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا :

- قيمة المدخل x هو رقم تعريف هوية الطالب . وقيمت المخرج y هي درجة الطالب في اختبار الفيزياء .

- قيمة المدخل x هي رمز المنطقة ز وقيمة المخرج y هي رقم الهاتف لنفس رمز المنطقة.

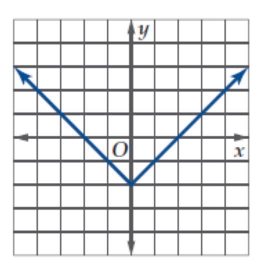
-

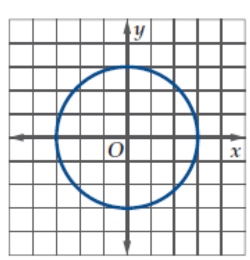
x	0.01	0.04	0.04	0.07	0.08	0.09
y	423	449	451	466	478	482

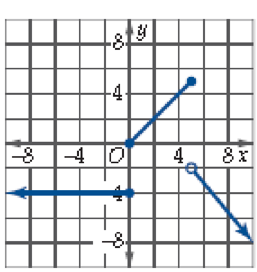
-

x	y
−8	−5
−5	−4
0	−3
3	−2
6	−3

-







في كل علاقة مما يلي ، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا :

- $3y + 6x = 18$

- $y^2 - 2x = 5$

- $x^2 = y + 2$

- $\frac{1}{x} = y$

- $\frac{x}{y} = y - 6$

- $\sqrt{48y} = x$

إيجاد قيم الدالة

أوجد قيم كل دالة من الدوال الآتية:

- $g(x) = 2x^2 + 18x - 14$

a) $g(9)$

b) $g(3x)$

c) $g(1 + 5m)$

- $f(t) = \dfrac{4t + 11}{3t^2 + 5t + 1}$

a) $f(-6)$

b) $f(4t)$

c) $f(3 - 2a)$

- $g(m) = 3 + \sqrt{m^2 - 4}$

$g(-2)$ (a

$g(3m)$ (b

$g(4m - 2)$ (c

- $t(x) = 5\sqrt{6x^2}$

$t(-4)$ (a

$t(2x)$ (b

$t(7 + n)$ (c

تحديد مجال الدالة جبريًّا

حدِّد مجال كلٍّ من الدوال الآتية:

1) $f(x) = \dfrac{8x + 12}{x^2 + 5x + 4}$

....

....

2) $g(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 3x - 40}$

....

....

3) $h(x) = \sqrt{6 - x^2}$

....

....

4) $g(a) = \sqrt{1 + a^2}$

....

....

5) $f(a) = \dfrac{5a}{\sqrt{4a - 1}}$

....

....

6) $f(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x + 1}$

....

....

إيجاد قيم الدالة متعددة التعريف

أوجد $f(-5)$ وَ $f(12)$ لكل من الدالتين الآتيتين:

$$f(x)=\begin{cases} -4x+3 & , \quad x<3 \\ -x^3 & , \quad 3\le x\le 8 \\ 3x^2+1 & , \quad x>8 \end{cases}$$

- $f(-5)$

....

- $f(12)$

....

$$f(x)=\begin{cases} -15 , & x<-5 \\ \sqrt{x+6} & , \quad -5\le x\le 10 \\ \frac{2}{x}+8 & , \quad x>10 \end{cases}$$

- $f(-5)$

....

- $f(12)$

....

عمل: تمثل الدالة $T(x)$ أدناه المبلغ (بالريال) الذي تتقاضاه شركة توزيع لأجهزة هاتف محمول:

$$T(x)=\begin{cases} 2.1x & , \quad 0\le x\le 7000 \\ 5000+2.4x & , \quad 7000<x\le 20000 \\ 8000+3x & , \quad 20000<x\le 80000 \end{cases}$$

حيث x تمثل عدد الأجهزة الموزَّعة، فأوجد: $T(7000)$, $T(10000)$, $T(50000)$.

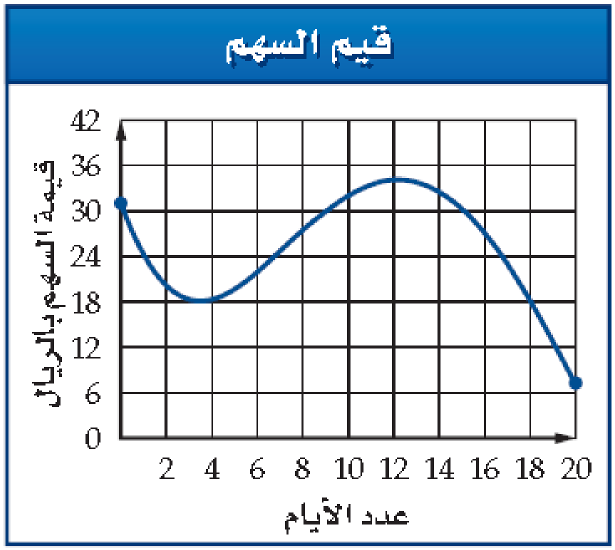
....

....

....

1-2 تحليل التمثيلات البيانية للدوال والعلاقات

1) **أسهم:** تابع مستثمر قيمة سهم خلال عشرين يومًا، فوجد أنه يمكن تقدير قيمة السهم بالدالة: $v(d) = 0.002d^4 - 0.11d^3 + 1.77d^2 - 8.6d + 31, 0 \leq d \leq 20$، حيث $v(d)$ قيمة السهم بالريال في اليوم d.



1A) استعمل التمثيل البياني لتقدير قيمة السهم في اليوم العاشر. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

....

....

....

....

1B) استعمل التمثيل البياني لتحديد الأيام التي بلغت فيها قيمة السهم 30 ريالًا. ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا.

....

....

....

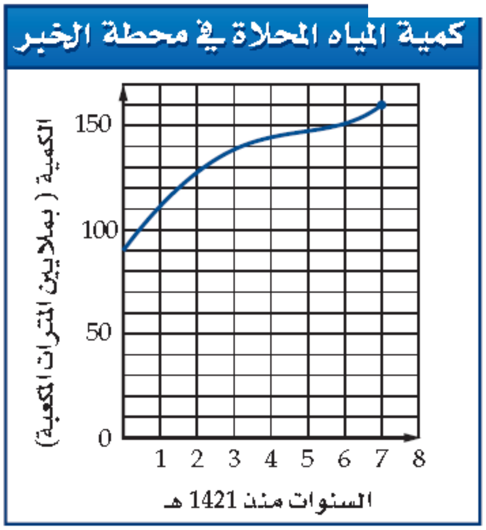
....

....

2) **مياه:** إذا كانت كمية المياه المحلاة في محطة الخبر (بملايين المترات المكعبة) في الفترة (1421هـ إلى 1428هـ) معطاة بالدالة

$$f(x) = 0.0509x^4 - 0.3395x^3 - 2.28x^2 + 25.35x + 88.27$$

حيث x رقم السنة منذ 1421 هـ .



a) قدّر كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ باستعمال التمثيل البياني.

....

....

b) أوجد كمية المياه المحلاة في سنة 1425 هـ جبريًا مقرّبًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة.

....

....

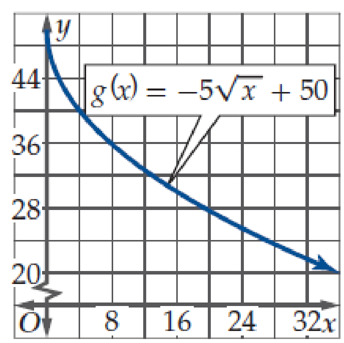
....

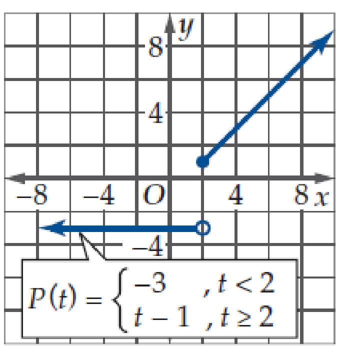
c) قدّر السنة التي كانت كمية المياه المحلاة فيها 130 مليون متر مكعب باستعمال التمثيل البياني، وتحقق من إجابتك جبريًا.

....

....

3) استعمل التمثيل البياني لكل دالة مما يأتي؛ لتقدير قيمها المطلوبة، ثم تحقّق من إجابتك جبريًّا. وقرِّب الناتج إلى أقرب جزء من مئة إذا لزم ذلك:





a) $g(6)$　b) $g(12)$　c) $g(19)$

a) $P(-6)$　b) $P(2)$　c) $P(9)$

....

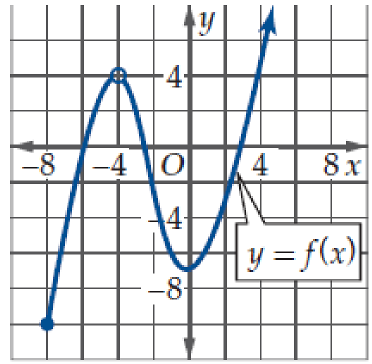
....

....

....

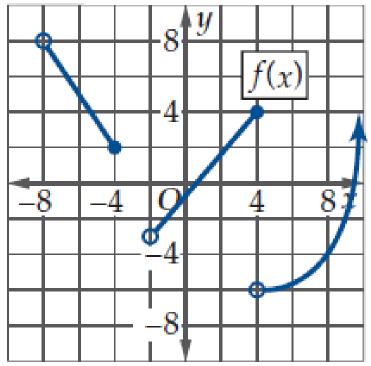
إيجاد المجال والمدى

a) أوجد مجال الدالة f ومداها باستعمال التمثيل البياني



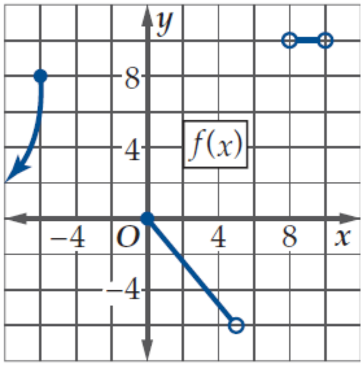
المجال : ....

المدى : ....



المجال : ....

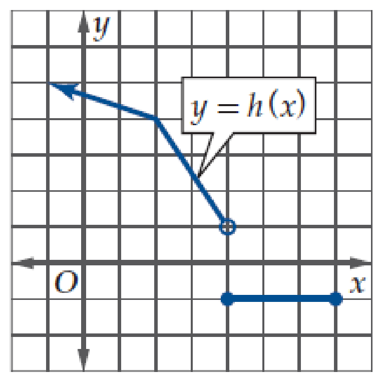
المدى: ....



المجال : ....

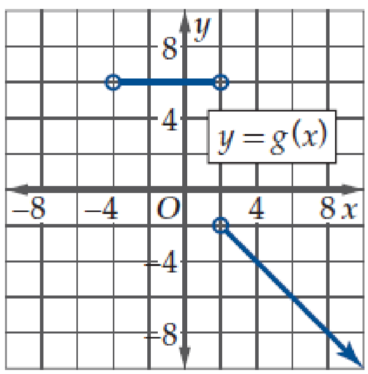
المدى: ....

b) استعمل التمثيل البياني للدالة في كلٍّ مما يأتي لإيجاد كل من مجال الدالة ومداها.



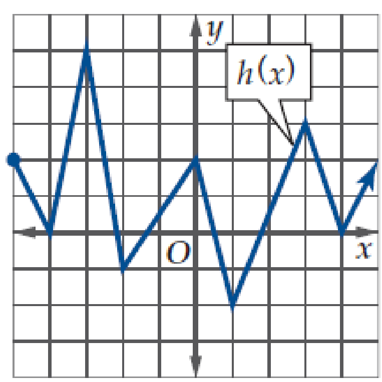
المجال : ....

المدى : ....



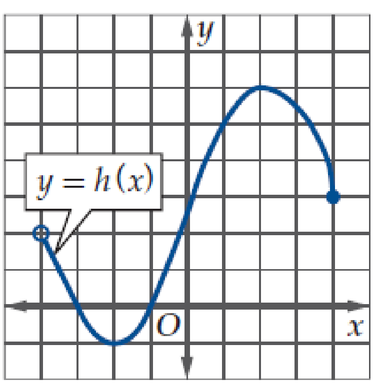
المجال : ....

المدى: ....



المجال : ....

المدى : ....

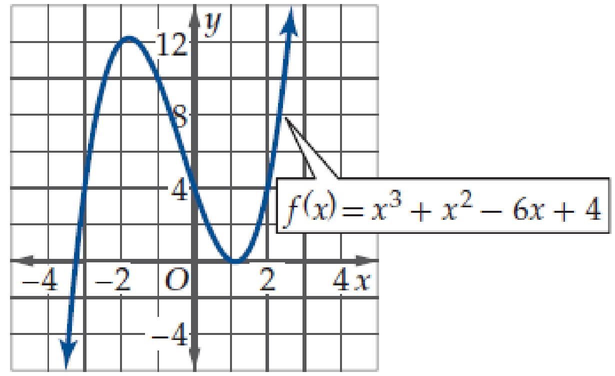


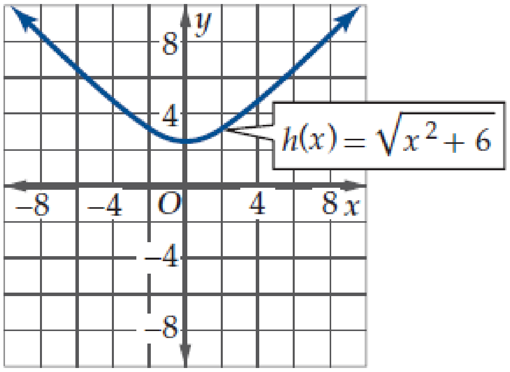
المجال : ....

المدى: ....

إيجاد المقطع y

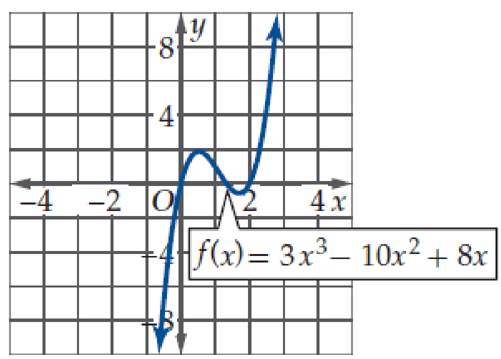
استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين أدناه، لإيجاد قيمة تقريبية للمقطع y، ثم أوجده جبريًّا:

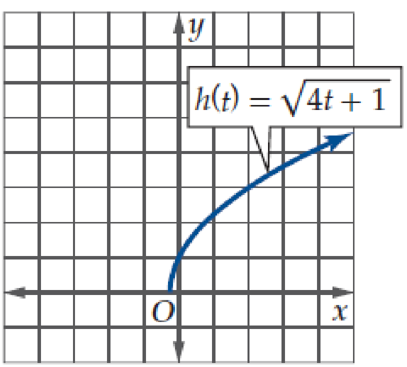




إيجاد الأصفار

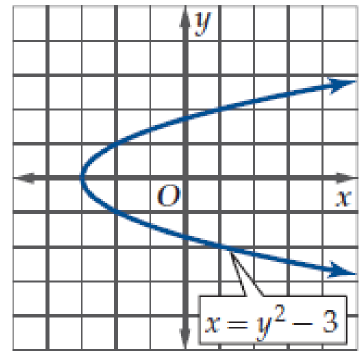
استعمل التمثيل البياني للدالة لإيجاد قيم تقريبيّة لأصفارها، ثم أوجد هذه الأصفار جبريًّا.





اختبار التماثل

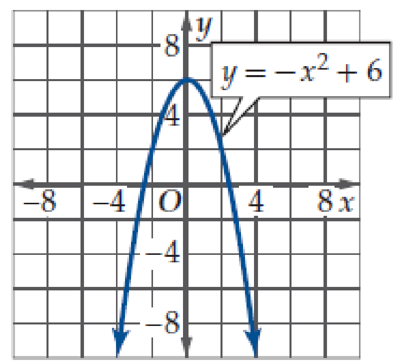
استعمل التمثيل البياني لكل معادلة مما يأتي لاختبار التماثل حول المحور x ، والمحور y ، ونقطة الأصل.
عزّز إجابتك عدديًا، ثم تحقّق منها جبريًّا:



التحليل بيانيًا :

التعزيز عدديًا :

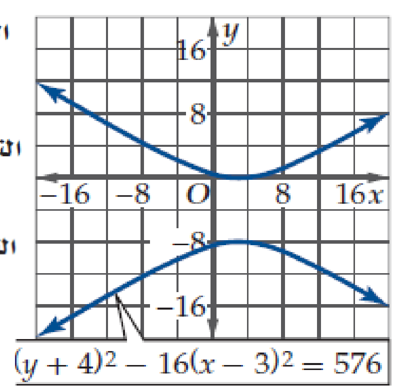
التحقق جبريًا :



التحليل بيانيًا :

التعزيز عدديًا :

التحقق جبريًا :



التحليل بيانيًا :

التعزيز عدديًا :

التحقق جبريًا :

تحديد الدوال الزوجية والدوال الفردية

حدّد إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غير ذلك.

7) $f(x) = x^3 - 2x$

....

....

....

....

8) $g(x) = x^4 + 2$

....

....

....

....

9) $h(x) = x^5 - 2x^3 + x$

....

....

....

....

10) $g(x) = 4\sqrt{x}$

....

....

....

....

11) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

....

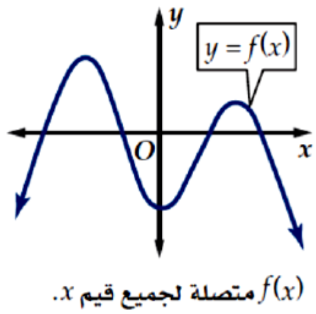
....

....

....

1-3 الاتصال وسلوك طرفي التمثيل البياني والنهايات

Continuity, End Behavior, and Limits



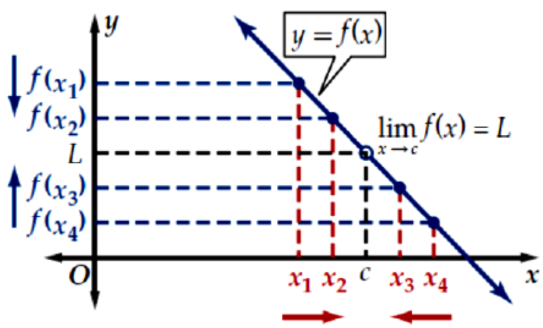
الاتصال: تكون **الدالة متصلة** إذا لم يكن في تمثيلها البياني أيُّ انقطاع أو قفزة. وعليه يمكنك تتبع مسار المنحنى دون أن ترفع القلم عنه.

إن أحد شروط اتصال دالة مثل $f(x)$ عند $x = c$ هو أن تقترب قيم الدالة من قيمة واحدة عندما تقترب قيم x من c من جهتي اليمين واليسار. إن مفهوم اقتراب قيم الدالة من قيمة دون الحاجة إلى الوصول إلى تلك القيمة يُسمى **النهاية**.

مفهوم أساسي — النهايات

التعبير اللفظي: إذا كانت قيمة الدالة $f(x)$ تقترب من قيمة واحدة L عندما تقترب x من c من الجهتين، فإن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.

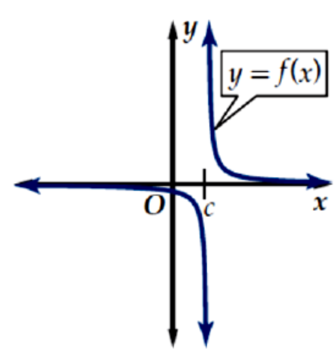
الرموز: نقول إن $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$، وتُقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من c هي L.



مفهوم أساسي — أنواع عدم الاتصال

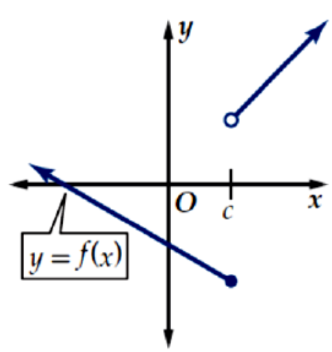
للدالة **عدم اتصال لانهائي** عند $x = c$ إذا تزايدت قيم الدالة أو تناقصت بلا حدود عندما تقترب x من c من اليمين أو اليسار.

مثال:



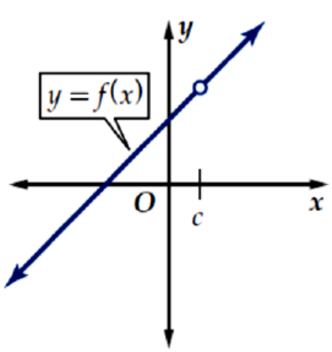
للدالة **عدم اتصال قفزي** عند $x = c$ إذا كانت نهايتا الدالة عندما تقترب x من c من اليمين ومن اليسار موجودتين ولكنهما غير متساويتين.

مثال:



للدالة **عدم اتصال نُقطي** عند $x = c$ إذا كانت الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء النقطة $x = c$، ويشار إليها بدائرة صغيرة (o).

مثال:



ملخص المفهوم — اختبار الاتصال

يقال إن الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = c$ إذا حقّقت الشروط الآتية:

- $f(x)$ معرّفة عند c، أي إن $f(c)$ موجودة.
- $f(x)$ تقترب من القيمة نفسها عندما تقترب x من c من الجهتين. أي أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة.
- $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

1- حدد ما إذا كانت الدالة $f(x) = 2x^2 - 3x - 1$ الدالة متصلة عند $x = 2$. برّر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال.

تحقّق من شروط الاتصال الثلاثة.

x	1.9	1.99	1.999	2.0	2.001	2.01	2.1
$f(x)$							

....

....

....

....

....

....

2- حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلتين عند $x = 0$. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال:

$f(x) = x^3$

x							
$f(x)$							

....

....

....

....

....

....

-3

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x<0 \\ x & , \quad x\geq 0 \end{cases}$$

x							
$f(x)$							

تحديد نوع عدم الاتصال عند نقطة

-1 حدد ما إذا كانت كل من الدالتين الآتيتين متصلة عند قيم x المعطاة. برر إجابتك باستعمال اختبار الاتصال، و إذا كانت الدالة غير متصلة فحدّد نوع عدم الاتصال: لانهائي ، قفزي ، قابل للإزالة.

$$f(x)=\begin{cases} 3x-2 & , \quad x>-3 \\ 2-x & , \quad x\leq -3 \end{cases}$$ عند $x=-3$

x							
$f(x)$							

-2 $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-9}$ عند $x=-3$

x							
$f(x)$							

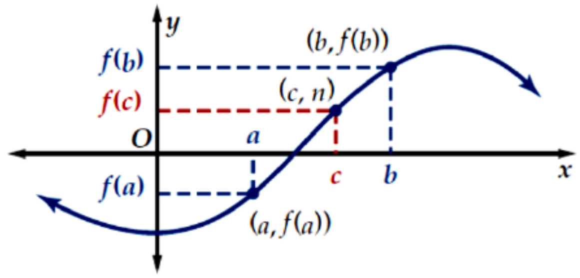
-3 $f(x)=\frac{1}{x^2}$، عند $x=0$.

x							
$f(x)$							

تستعمل نظرية القيمة المتوسطة ونتيجتها لتقريب أصفار الدوال المتصلة.

نظرية: نظرية القيمة المتوسطة

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة، وكانت $a < b$ ووجدت قيمة n بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد عدد c بين a وَ b، بحيث $f(c) = n$.



نتيجة (موقع صفر الدالة): إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة وكان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة، فإنه يوجد عدد واحد على الأقل c بين a و b، بحيث $f(c) = 0$. أي يوجد صفر للدالة بين a و b.

تقريب الأصفار عند تغيير الإشارة

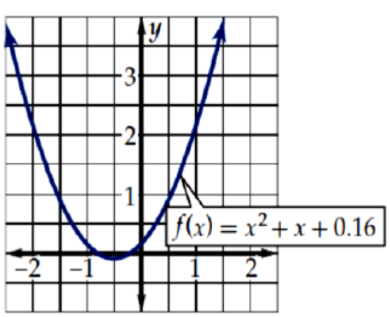
- **حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^3 - 4x + 2$ في الفترة $[-4, 4]$.**

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

تقريب الأصفار دون تغير الإشارة

- **حدّد الأعداد الصحيحة المتتالية التي تنحصر بينها الأصفار الحقيقية للدالة $f(x) = x^2 + x + 0.16$ في الفترة $[-3, 3]$.**

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							



سلوك طرفي التمثيل البياني: يصف **سلوك طرفي التمثيل البياني** شكل الدالة عند طرفي منحناها، أي أنه يصف قيم $f(x)$ عندما تزداد قيم x أو تنقص بلا حدود، أي عندما تقترب x من ∞ أو $-\infty$. ولوصف سلوك طرفي التمثيل البياني يمكنك استعمال مفهوم النهاية.

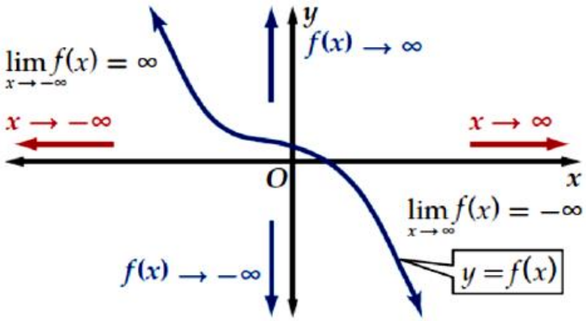
سلوك طرف التمثيل البياني من اليسار

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

سلوك طرف التمثيل البياني من اليمين

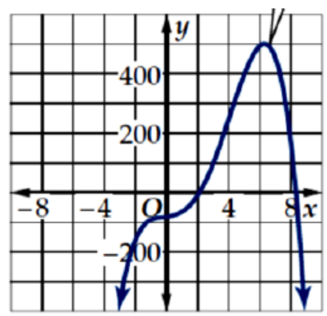
$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

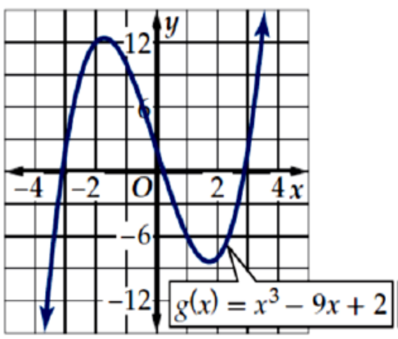
أحد إمكانات سلوك طرفي التمثيل البياني هو زيادة قيم $f(x)$ أو نقصانها دون حدود. ويمكن وصف هذا السلوك بأن $f(x)$ تقترب من موجب ما لانهاية أو من سالب ما لانهاية على الترتيب.

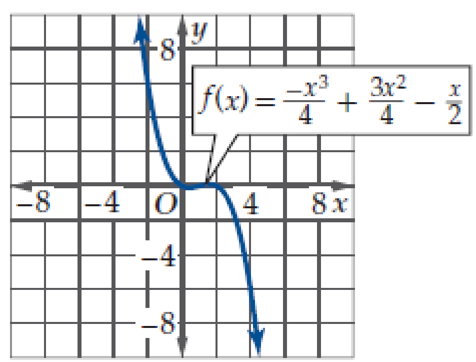


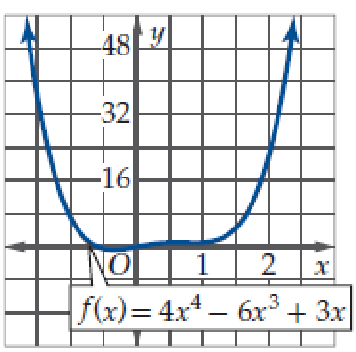
المنحنيات التي تقترب من ما لانهاية

استعمل التمثيل البياني للدوال التالية لوصف السلوك الطرفي



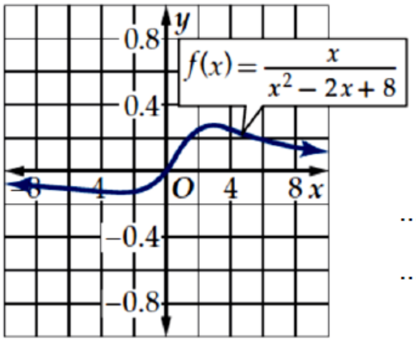






منحنيات دوال تقترب من قيمة محددة

1- استعمل التمثيل البياني للدالة $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 8}$ لوصف سلوك طرفي تمثيلها البياني. ثم عزز إجابتك عدديًّا.



التحليل بيانيًّا:

....

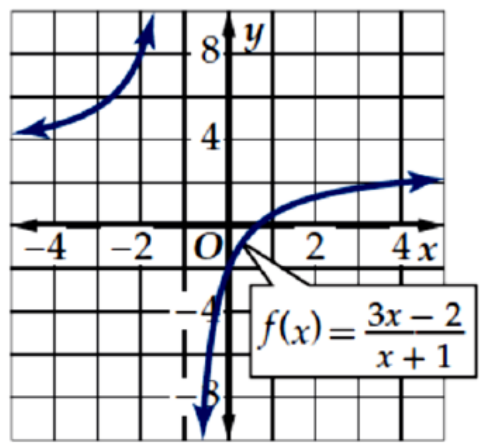
....

التعزيز عدديًّا:

x	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000
$f(x)$							

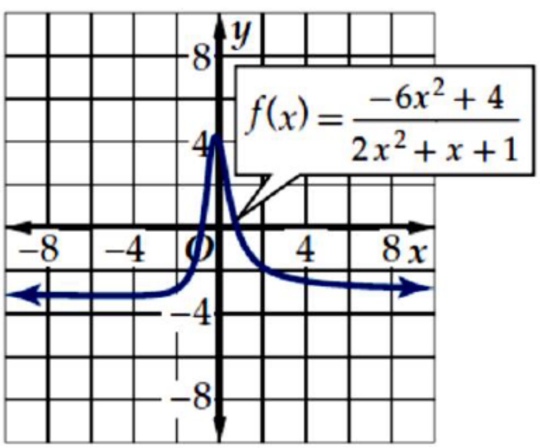
....

2-



التحليل بيانيًّا:

3-

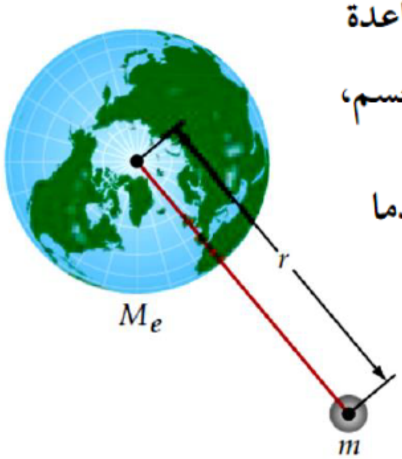


التحليل بيانيًّا:

....

....

تطبيقات سلوك طرفي التمثيل البياني



فيزياء: تعطى قيمة طاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم بالقاعدة $U(r) = -\frac{GmM_e}{r}$ ، حيث G ثابت نيوتن للجذب الكوني، و m كتلة الجسم، و M_e كتلة الأرض، و r المسافة بين الجسم ومركز الأرض كما في الشكل المجاور. ماذا يحدث لطاقة الوضع الناتجة عن الجاذبية الأرضية لجسم عندما يتحرك مبتعدًا عن الأرض مسافة كبيرة جدًا؟

....

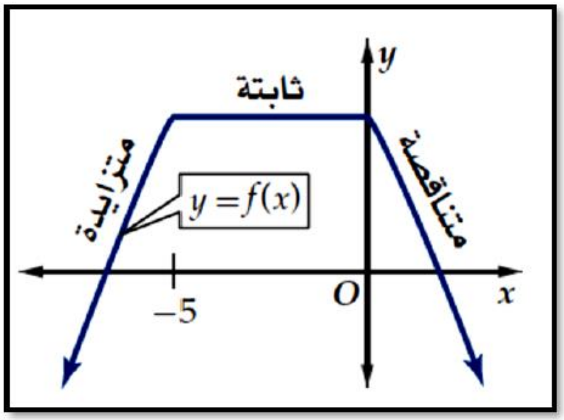
....

....

....

فيزياء: الضغط الديناميكي هو قياس الضغط الناتج عن حركة جزيئات الغاز ويعطى بالقاعدة $q(v) = \frac{\rho v^2}{2}$، حيث ρ (ويقرأ روه) كثافة الغاز، و v السرعة التي يتحرك بها الجزيء. ماذا يحدث للضغط الديناميكي لجزيئات الغاز عندما تستمر سرعة الجزيئات في التزايد؟

1-4 القيم القصوى ومتوسط معدل التغير
Extrema and Average Rates of Change

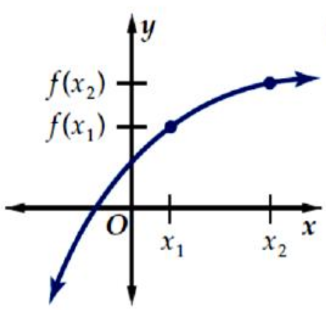


مفهوم أساسي — الدوال المتزايدة، المتناقصة ، الثابتة

التعبير اللفظي: تكون الدالة f متزايدة على فترة ما إذا وفقط إذا زادت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

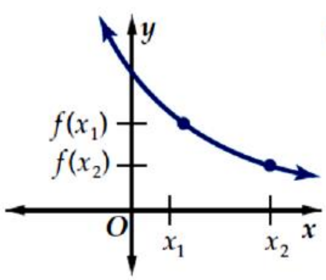
النموذج



التعبير اللفظي: تكون الدالة f متناقصة على فترة ما إذا وفقط إذا تناقصت قيم $f(x)$ كلما زادت قيم x في الفترة .

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) > f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$.

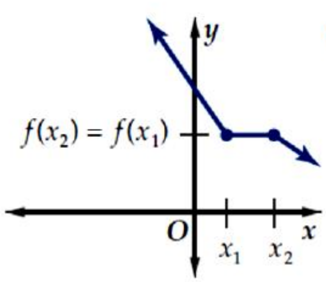
النموذج



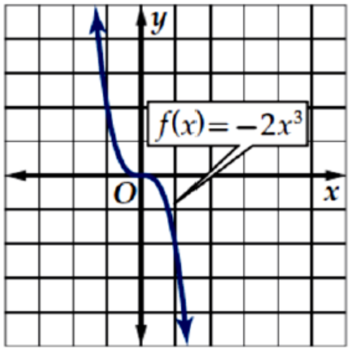
التعبير اللفظي: تكون الدالة f ثابتة على فترة ما إذا وفقط إذا لم تتغير قيم $f(x)$ لأي قيم x في الفترة.

الرموز: لكل x_1 و x_2 في الفترة، فإن $f(x_1) = f(x_2)$. عندما تكون $x_1 < x_2$.

النموذج



1- استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة مقربةً إلى أقرب 0.5 وحدة، ثم عزز إجابتك عدديًا.



a) $f(x) = -2x^3$

التحليل بيانيًا:

....

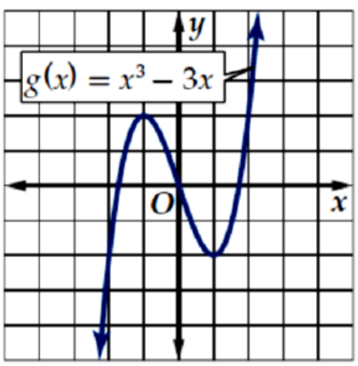
التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في الفترة.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$									

....

....



b) $g(x) = x^3 - 3x$

التحليل بيانيًا:

....

....

التعزيز عدديًا:

كوّن جدولًا يتضمن قيمًا للمتغير x في كل فترة من الفترات الثلاث السابقة.

x	-11	-9	-7	-5	-3	-1
$f(x)$						

x	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x)$					

x	1	3	5	7	9	11
$f(x)$						

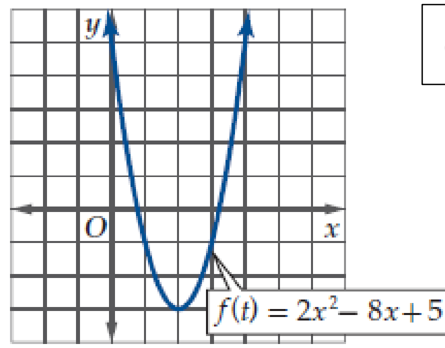
....

....

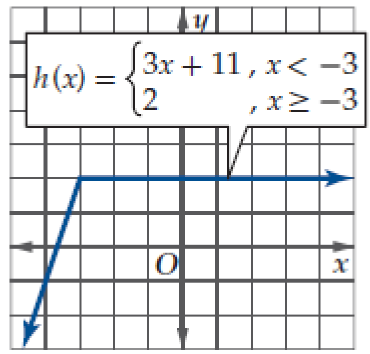
....

2- استعمل التمثيل البياني لكل من الدالتين الآتيتين لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة متزايدة، أو متناقصة، أو ثابتة

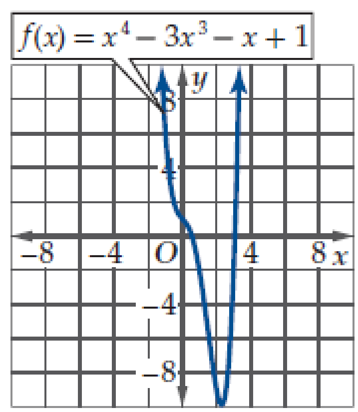
(a



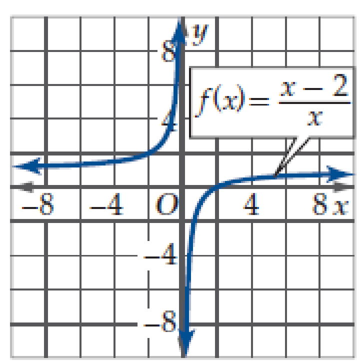
(b



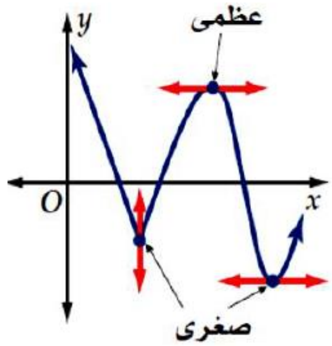
(c



(d



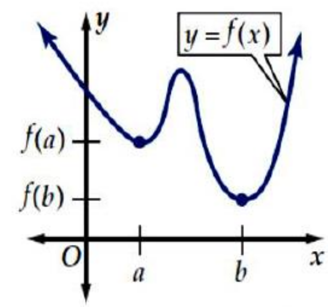
القيم القصوى المحلية والمطلقة



لاحظ أن النقاط التي تغير الدالة عندها سلوك تزايدها أو تناقصها تكوّن قمة أو قاعًا في منحنى الدالة وتُسمّى نقاطًا حرجة. ويكون المماس المرسوم لمنحنى الدالة عند هذه النقاط إما أفقيًا أو عموديًا (أي أن ميله صفر أو غير معرف)، ويدل على وجود قيمة **عظمى** أو **صغرى** للدالة.

يمكن أن يكون للدالة أشكال مختلفة من القيم العظمى والقيم الصغرى (**القيم القصوى**).

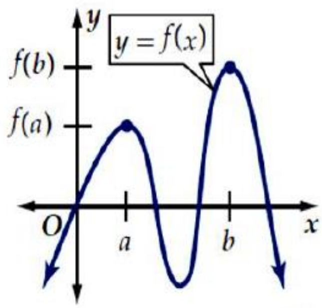
النموذج



$f(a)$ قيمة صغرى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة صغرى مطلقة للدالة f

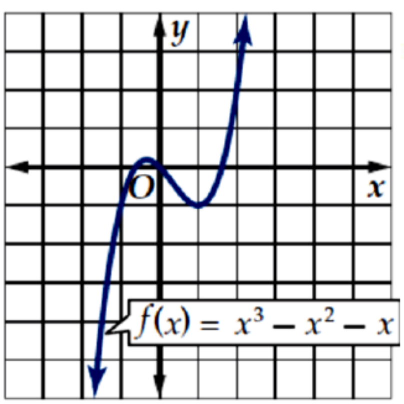
النموذج



$f(a)$ قيمة عظمى محلية للدالة f

$f(b)$ قيمة عظمى مطلقة للدالة f

1) قدّر قيم x التي يكون للدالة $f(x)$ عندها قيم قصوى مقربة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبين نوع القيم القصوى، ثم عزز إجابتك عدديًا.



التحليل بيانيًا :

....

....

التعزيز عدديًا :

x	-100	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	100
$f(x)$								

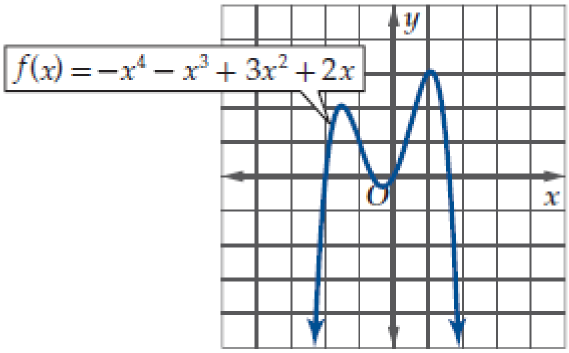
....

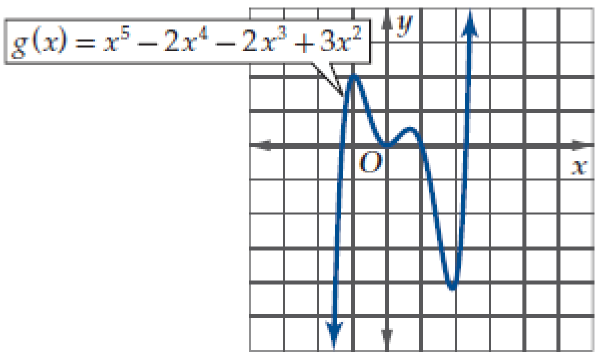
....

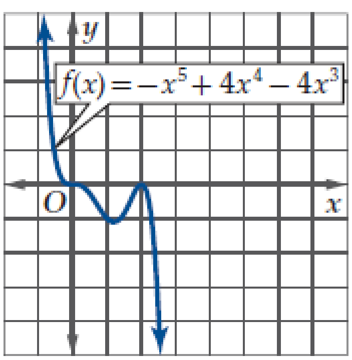
....

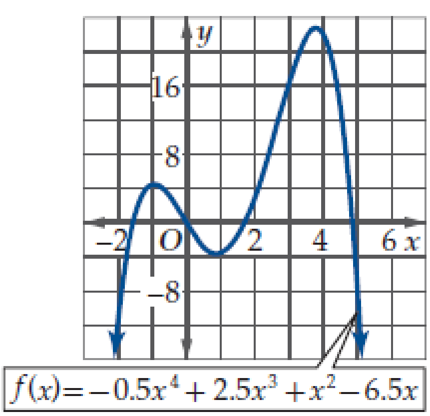
....

2) قدِّر قيم x التي يكون لكل من الدالتين الآتيتين عندها قيم قصوى مقرَّبة إلى أقرب 0.5 وحدة، وأوجد قيم الدالة عندها، وبيّن نوع القيم القصوى



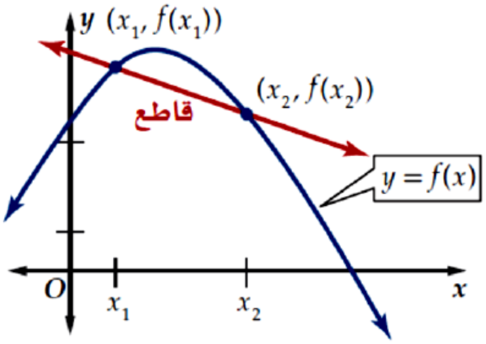






متوسط معدل التغير

مفهوم أساسي — متوسط معدل التغير



التعبير اللفظي: متوسط معدل التغير بين أي نقطتين على منحنى الدالة f هو ميل المستقيم المار بَين هاتين النقطتين.

هندسيًا: يُسمَى المستقيم المار بنقطتين على منحنى الدالة **قاطعًا**، و يرمز لميل القاطع بالرمز m_{sec} .

الرموز: متوسط معدل تغير الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_1, x_2]$ هو

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

1) أوجد متوسط معدل التغير للدالة $f(x) = -x^3 + 3x$ الممثلة في الشكل (1.4.1) في كلٍّ من الفترتين الآتيتين:

a) $[-2, -1]$

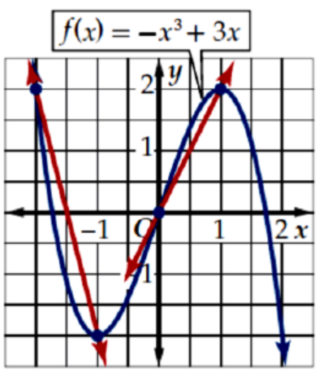
....

....

b) $[0, 1]$

....

....



الشكل 1.4

2) أوجد متوسط معدل التغير للدالة :

$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 2$, $[2, 3]$

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 4x$, $[-5, -3]$

....

....

....

....

إيجاد السرعة المتوسطة

فيزياء: إذا كانت المسافة التي يقطعها جسم ساقط من مكان مرتفع تعطى بالدالة $d(t) = 16t^2$، حيث t الزمن بالثواني بعد سقوط الجسم، $d(t)$ المسافة المقطوعة بالأقدام. إذا أهملت مقاومة الهواء، فأوجد السرعة المتوسطة في كل من الفترتين الآتيتين.

a) من 0 إلى 2 ثانية

....

....

....

....

b) من 2 إلى 4 ثواني

....

....

....

....

فيزياء: قُذِفَ جسم إلى أعلى من ارتفاع 4 أقدام عن سطح الأرض، فإذا كان ارتفاع الجسم عن سطح الأرض يُعطى بالدالة $d(t) = -16t^2 + 20t + 4$، حيث t الزمن بالثواني بعد قذف الجسم و $d(t)$ المسافة التي يقطعها الجسم، فأوجد سرعة الجسم المتوسطة في الفترة من 0.5 إلى 1 ثانية على فرض إهمال مقاومة الهواء. وبرر إجابتك.

....

....

....

....

أوجد متوسط معدل التغير لكل دالة فيما يأتي في الفترة المعطاة.

- $g(x) = 3x^2 - 8x + 2, [4, 8]$

- $f(x) = \frac{x-3}{x}, [5, 12]$

- $f(x) = \sqrt{x+8}, [-4, 4]$

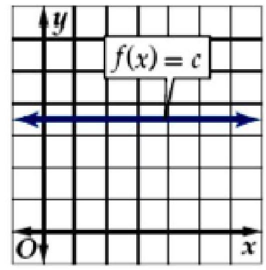
- $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 6x - 1, [5, 9]$

- $f(x) = -2x^4 - 5x^3 + 4x - 6, [-1, 5]$

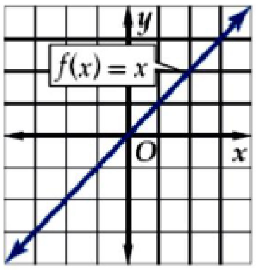
1-5 الدوال الرئيسة (الأم) والتحويلات الهندسية
Parent Functions and Transformations

مفهوم أساسي: الدوال الرئيسة (الأم) للدوال الخطية و دوال كثيرات الحدود

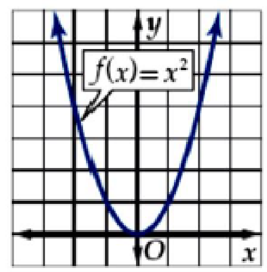
تكتب **الدالة الثابتة** على الصورة $f(x) = c$ حيث c عدد حقيقي وتُمثَّل بمستقيم أفقي.



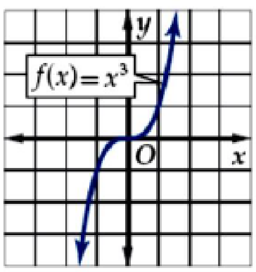
تمر **الدالة المحايدة** $f(x) = x$ بجميع النقاط التي إحداثياتها (a, a).



يأخذ منحنى **الدالة التربيعية** $f(x) = x^2$ شكل الحرف U.

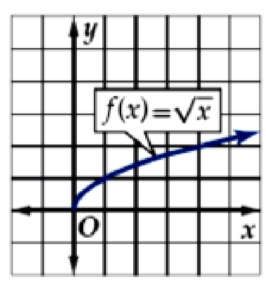


الدالة التكعيبية $f(x) = x^3$ متماثلة بالنسبة لنقطة الأصل.

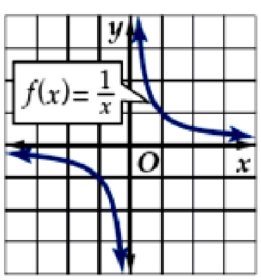


مفهوم أساسي: الدالة الرئيسة (الأم) لكلٍ من: دالتي الجذر التربيعي والمقلوب

تكتب **دالة الجذر التربيعي** على الصورة $f(x) = \sqrt{x}$.



تكتب **دالة المقلوب** على الصورة $f(x) = \frac{1}{x}$.



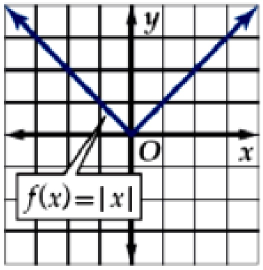
مفهوم أساسي **دالة القيمة المطلقة الرئيسة (الأم)**

التعبير اللفظي: يُرمز لدالة القيمة المطلقة، بالرمز $f(x) = |x|$،
ويأخذ منحناها شكل الحرف V ، وتعرَّف على النحو الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , \quad x < 0 \\ x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

أمثلة: $|-5| = 5, |0| = 0, |4| = 4$

النموذج

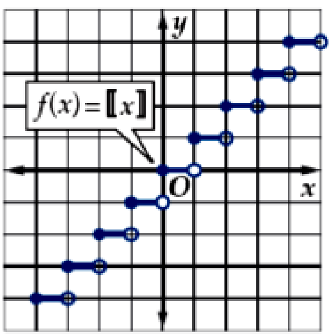


مفهوم أساسي **دالة أكبر عدد صحيح**

التعبير اللفظي: يرمز لدالة أكبر عدد صحيح بالرمز $f(x) = [\![x]\!]$،
وتعرف بأنها أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x .

أمثلة: $[\![-4]\!] = -4, [\![-1.5]\!] = -2, \left[\!\!\left[\frac{1}{3}\right]\!\!\right] = 0$

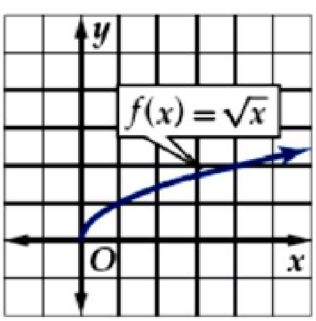
النموذج



صف خصائص منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = \sqrt{x}$ (في الشكل 1.5.1): المجال، والمدى، والمقطع x، والمقطع y، والتماثل، والاتصال، وسلوك طرفي التمثيل البياني، و فترات التزايد والتناقص.

خصائص منحنى دالة الجذر التربيعي (الشكل 1.5.1) هي:

- مجال الدالة $[0, \infty)$، ومداها $[0, \infty)$.
- للمنحنى مقطع واحد عند $(0, 0)$.
- المنحنى غير متماثل؛ لذا فإن الدالة ليست زوجية ولا فردية.
- المنحنى متصل عند جميع قيم المجال.
- يبدأ المنحنى عند $x = 0$ وتكون $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
- المنحنى متزايد في الفترة $(0, \infty)$.



الشكل 1.5.1

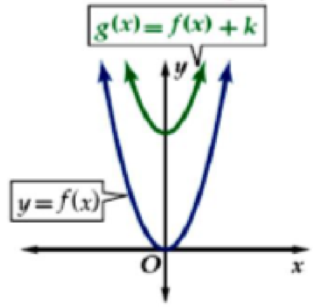
التحويلات الهندسية : تؤثر **التحويلات الهندسية** في شكل منحنى الدالة الرئيسة (الأم). فبعضُ التحويلات تغيّر موقع المنحنى فقط ولا تغير أبعاده أو شكله وتسمى تحويلات قياسية. وبعضها الآخر يغير شكل المنحنى وتسمى تحويلات غير قياسية .

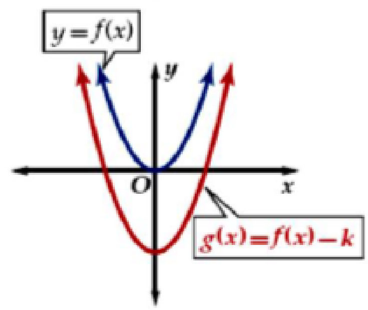
مفهوم أساسي — الانسحاب الرأسي والانسحاب الأفقي

الانسحاب الرأسي

منحنى $g(x) = f(x) + k$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

- k وحدة إلى الأعلى عندما $k > 0$.
- $|k|$ من الوحدات إلى أسفل عندما $k < 0$.

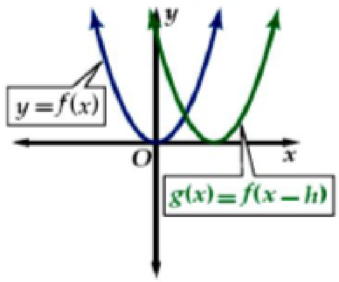


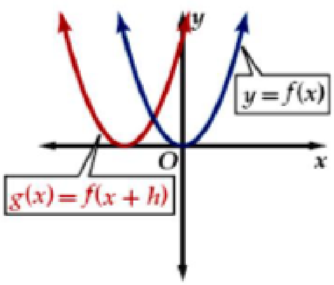


الانسحاب الأفقي

منحنى $g(x) = f(x - h)$ هو منحنى $f(x)$ مزاحًا:

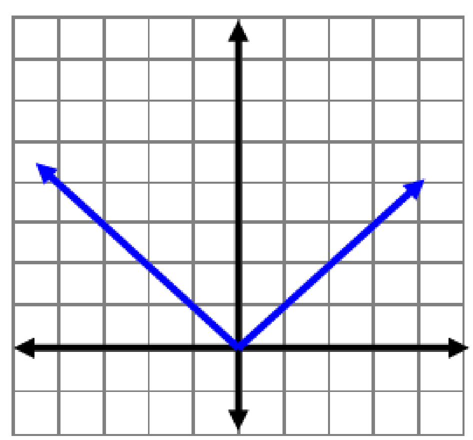
- h من الوحدات إلى اليمين عندما $h > 0$.
- $|h|$ من الوحدات إلى اليسار عندما $h < 0$.



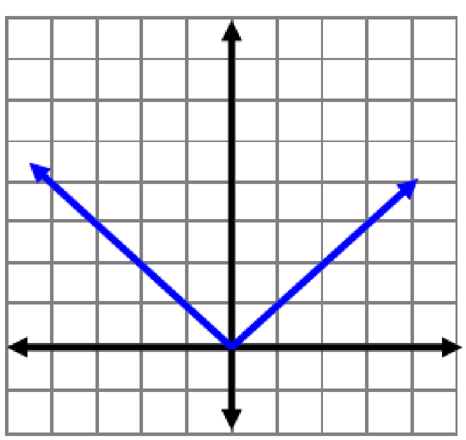


1 استعمل منحنى الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = |x|$ لتمثيل كلّ دالة من الدوال الآتية بيانيًا:

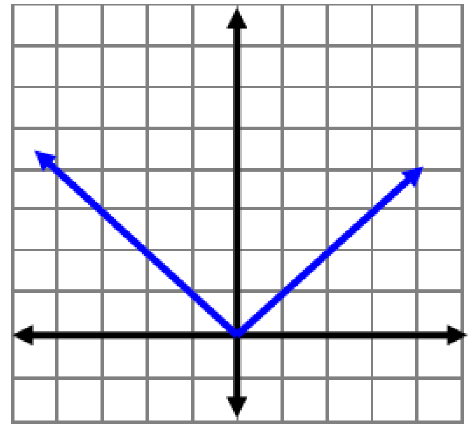
f(x) = |x|



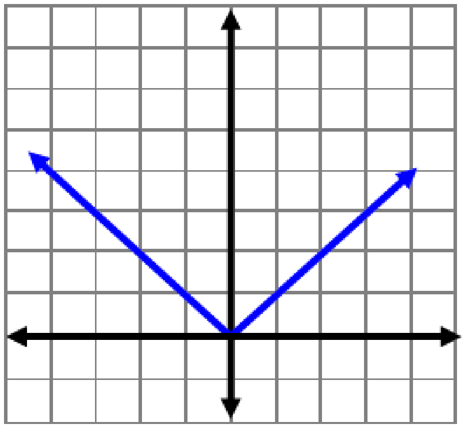
$g(x) = |x| + 4$ (a



b) $g(x) = |x + 3|$



c) $g(x) = |x - 2| - 1$



2 استعمل منحنى الدالة الرئيسية (الأم) $f(x) = x^3$ لوصف التحويلات الاتية

$h(x) = x^3 - 5$

....

$h(x) = 8 + x^3$

....

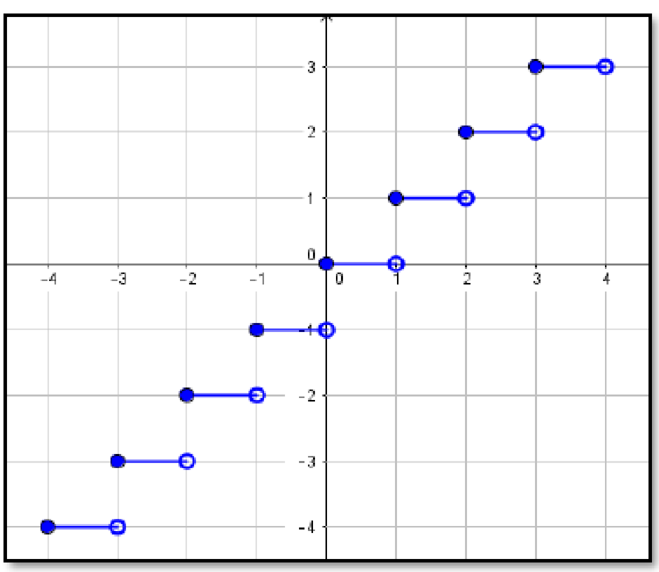
$h(x) = (x + 2)^3 + 4$

....

....

3 حدد الدالة الأصلية لـ $g(x) = [[\frac{1}{2}x]] + 1$، وصف التحويلات. ثم ارسم الدالة بيانيًا.

الدالة المتحولة هي $g(x) = [[\frac{1}{2}x]] + 1$



....

....

....

....

....

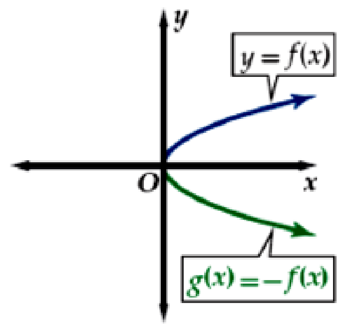
الانعكاس

من التحويلات القياسية الأخرى **الانعكاس** والذي يُكوّن لمنحنى الدالة صورة مرآة بالنسبة لمستقيم محدّد.

مفهوم أساسي — **الانعكاس حول المحورين الإحداثيين**

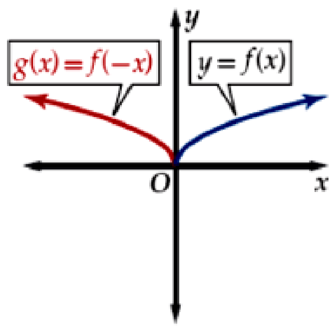
الانعكاس حول المحور x

منحنى الدالة $g(x) = -f(x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور x.

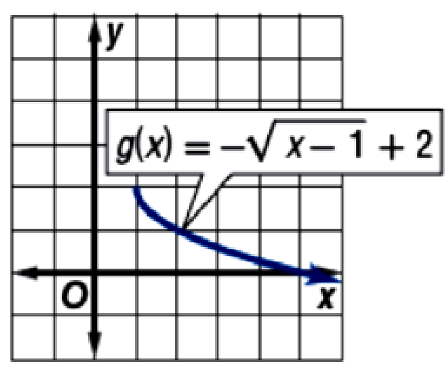


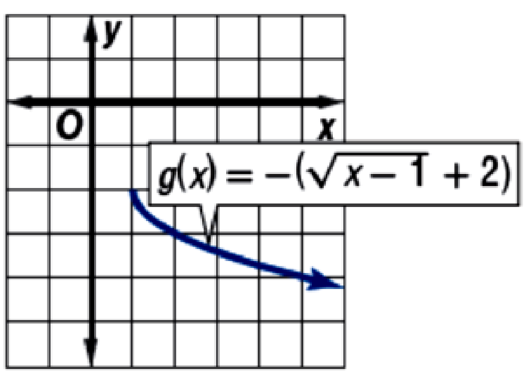
الانعكاس حول المحور y

منحنى الدالة $g(x) = f(-x)$ هو انعكاس لمنحنى الدالة $f(x)$ حول المحور y.



4 كن دقيقًا عند كتابة المعادلة الناتجة عن التحويل الهندسي لدالة، فمثلًا منحنى الدالة $g(x) = -\sqrt{x-1} + 2$ يختلف عن منحنى الدالة $g(x) = -\left(\sqrt{x-1} + 2\right)$.

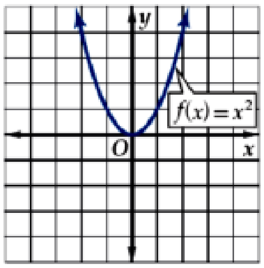




كتابة معادلات التحويل

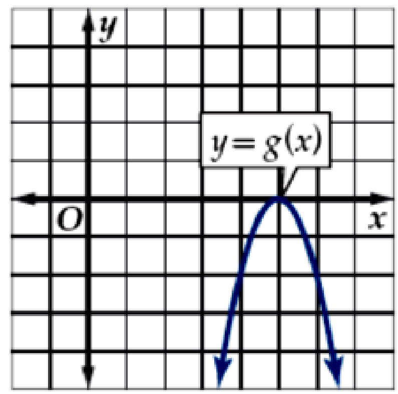
5

صف العلاقة بين منحنى الدالة $f(x) = x^2$ (في الشكل 1.5.5) ومنحنى $g(x)$ في كل مما يأتي،
ثم اكتب معادلة $g(x)$:

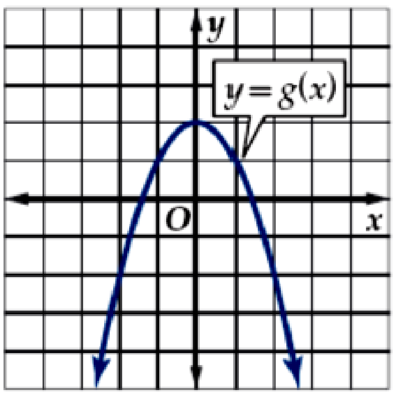


الشكل 1.5.5

(a



(b



....

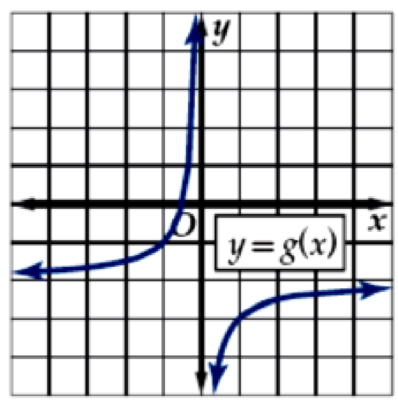
....

....

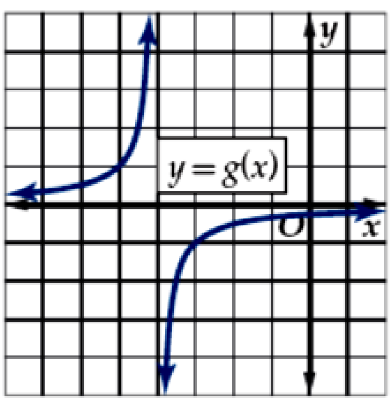
6

صف العلاقة بين منحنيي $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x)$ ثم اكتب معادلة $g(x)$ في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(3A



(3B



....

....

....

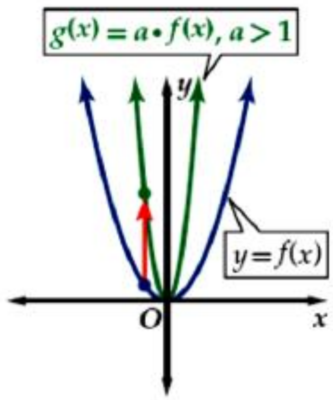
التمدد هو تحويل غير قياسي يؤدي إلى تضيق (ضغط) أو توسعة (مط) منحنى الدالة رأسيًا أو أفقيًا.

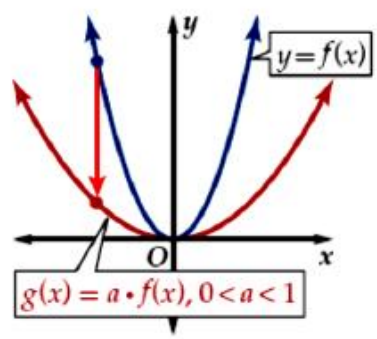
مفهوم أساسي التمدد الرأسي والتمدد الأفقي

التمدد الرأسي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = a\,f(x)$، هو:

- توسع رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- تضيق رأسي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$

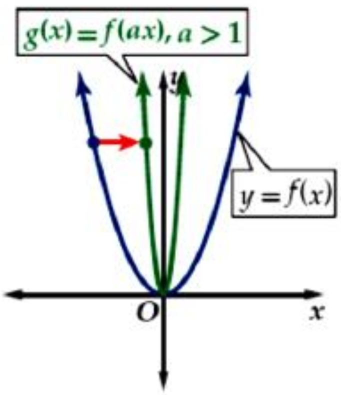


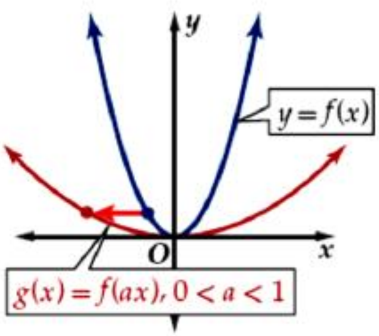


التمدد الأفقي

إذا كان a عددًا حقيقيًا موجبًا، فإن منحنى الدالة $g(x) = f(ax)$، هو:

- تضيق أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $a > 1$.
- توسع أفقي لمنحنى $f(x)$، إذا كانت $0 < a < 1$





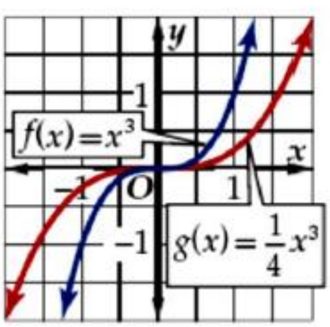
7 عيِّن الدالة الرئيسة (الأم) $f(x)$ للدالة $g(x)$ في كل مما يأتي، ثم صف العلاقة بين المنحنيين ومثلهما بيانيًا في المستوى الإحداثي.

a) $g(x) = \frac{1}{4}x^3$

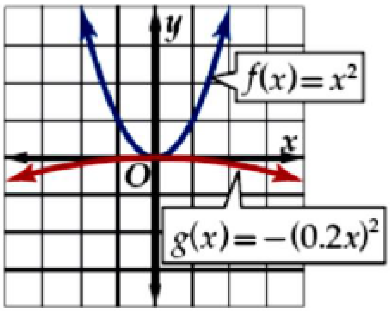
....

....

....



$g(x) = -(0.2x)^2$ (b



$g(x) = [\![x]\!] - 4$ (4A

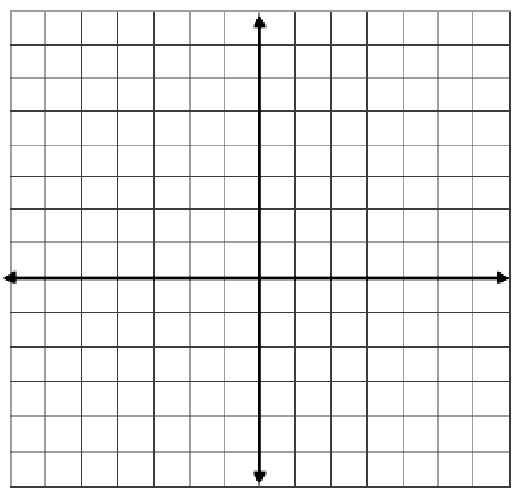
$g(x) = \frac{15}{x} + 3$ (4B

تمثيل الدوال المتعددة التعريف بيانيًا

8

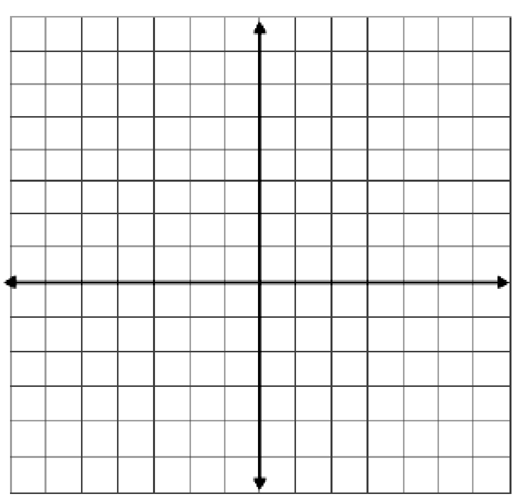
مثّل الدالة بيانيًّا:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \quad -1 \le x < 4 \\ (x-5)^3 + 2 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

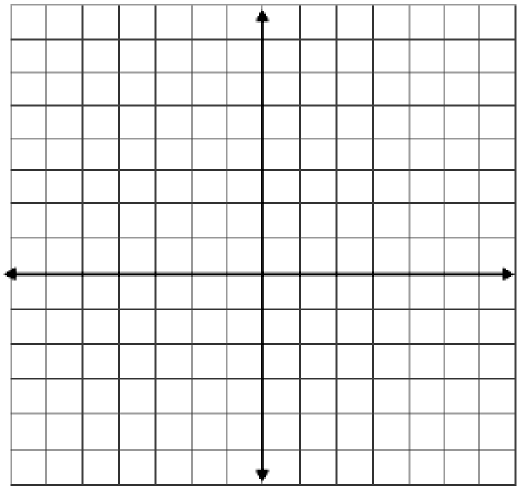


9

$$g(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \le 0 \\ x^3 & , \quad 0 < x \le 2 \\ \frac{2}{x} & , \quad x > 2 \end{cases}$$



10



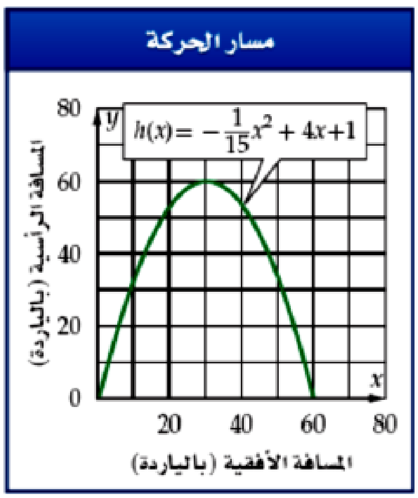
$$h(x)=\begin{cases}(x+6)^2 & , \quad x<-5\\ 7 & , \quad -5\le x\le 2\\ |4-x| & , \quad x>2\end{cases}$$

....

....

....

11 **كرة قدم:** ضرب لاعب كرة قدم، فكان مسارها معطى بالدالة $h(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 4x + 1$ ، حيث $h(x)$ يمثل ارتفاع الكرة بالياردة عن سطح الأرض، وتمثل x المسافة الأفقية بالياردة التي تقطعها الكرة حيث $x = 0$ ترتبط بخط منتصف الملعب. صف التحويلات التي تمت على الدالة الرئيسة (الأم) $f(x) = x^2$ للحصول على $h(x)$.



....

....

....

....

....

....

12 **كهرباء:** إذا كانت شدة التيار $I(x)$ بالأمبير الذي يمر بجهاز DVD تعطى بالدالة $I(x) = \sqrt{\frac{x}{11}}$ ، حيث x القدرة بالواط والعدد 11 هو المعاومة بالأوم.

A) صف التحويلات التي تمت على الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ للحصول على الدالة $I(x)$.

B) اكتب دالة تصف مرور تيار في مصباح مقاومته 15 أوم.

....

....

....

....

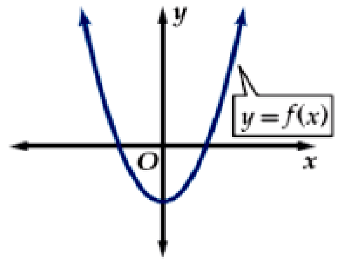
....

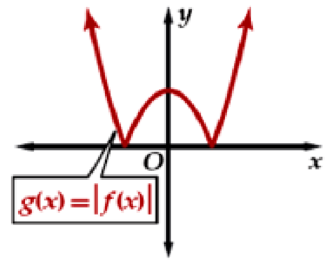
تُستعملُ تحويلات هندسية أخرى غير قياسية تتضمن القيمة المطلقة .

مفهوم أساسي التحويلات الهندسية على دوال القيمة المطلقة

$g(x) = |f(x)|$

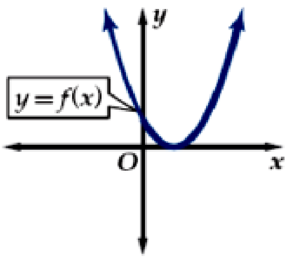
يعكس هذا التحويل الهندسي أي جزء من منحنى الدالة يقع تحت المحور x ليصبح فوقه.

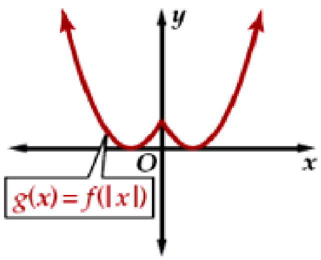




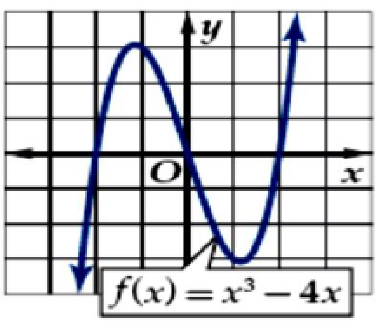
$g(x) = f(|x|)$

يغير هذا التحويل الهندسي جزء منحنى الدالة الموجود إلى يسار المحور y ويضع مكانه صورة جزء المنحنى الواقع إلى يمين المحور y بالانعكاس حول المحور y .



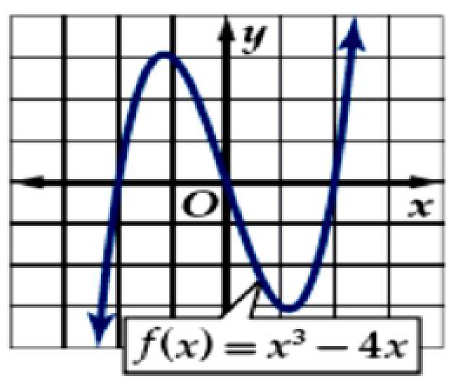


13 استخدم الرسم البياني للدالة $f(x) = x^3 - 4x$ في الشكل 1.5.6 لرسم كل دالة آتية.

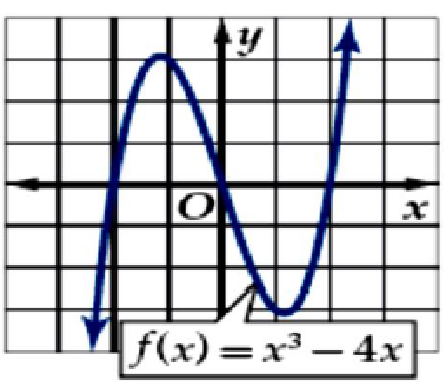


الشكل 1.5.6

a) $g(x) = |f(x)|$



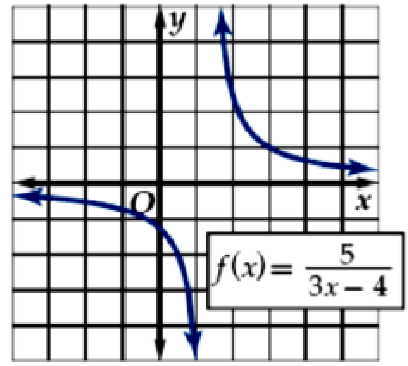
b) $h(x) = f(|x|)$



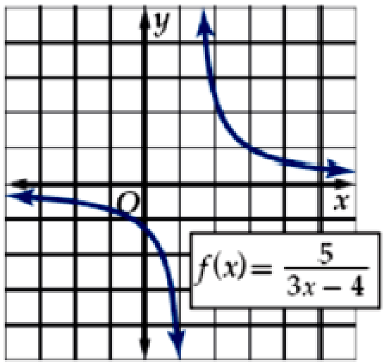
14 استعمل منحنى الدالة $f(x)$ في كلٍّ من الشكلين أدناه لتمثيل كلٍّ من الدالتين $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(|x|)$ بيانيًّا:

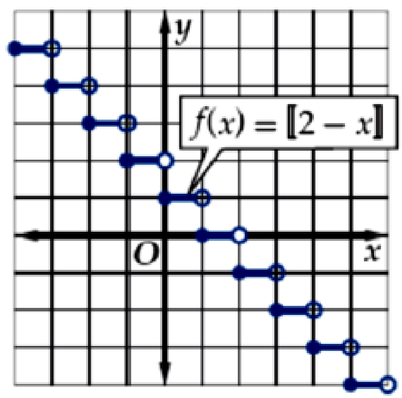
على
نفس
الرسم

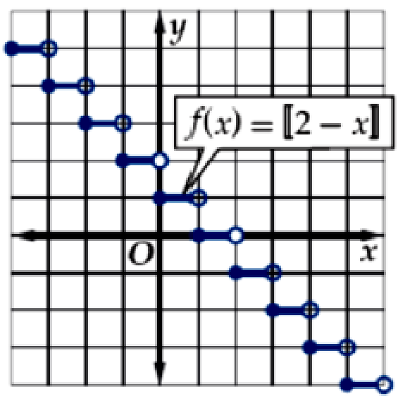
$g(x) = |f(x)|$



$h(x) = f(|x|)$.







15 **اكتشف الخطأ:** وَصَف كل من محمد وعبد الملك التحويلات الهندسية التي تمت للوصول إلى الدالة $g(x) = [\![x+4]\!]$. فقال محمد أنه تم سحب منحنى الدالة الرئيسة (الأم) 4 وحدات إلى اليسار وقال عبد الله إنه تم سحب الدالة 4 وحدات إلى الأعلى. فمن منهما كانت إجابته صحيحة؟ برر إجابتك.

....

....

....

....

....

1-6 العمليات على الدوال وتركيب دالتين
Function Operations and Composition of Functions

العمليات على الدوال: يمكنك إجراء عمليات الجمع، والطرح، والضرب، والقسمة على الأعداد الحقيقية، وفي هذا الدرس ستتعلمُ إجراءَ العمليات نفسها على الدوال.

مفهوم أساسي — العمليات على الدوال

إذا كانت f, g دالتين يتقاطع مجالاهما، فإننا نعرف عمليات الجمع، والضرب، والطرح، والقسمة لجميع قيم x الموجودة في تقاطع المجالين على النحو الآتي:

الجمع: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ **الضرب:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

الطرح: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ **القسمة:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$

1 إذا كانت $h(x) = 3x - 5$، $g(x) = \sqrt{x+2}$، $f(x) = x^2 + 4x$، فأوجد كلًّا من الدوال الآتيةِ، ثم حدد مجالها:

a) $(f+g)(x)$

....

b) $(f-h)(x)$

....

c) $(f \cdot h)(x)$

....

d) $\left(\frac{h}{f}\right)(x)$

....

2 $f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

a) $(f+g)(x)$

....

b) $(f-h)(x)$

....

$(f \cdot h)(x)$ (c

....

....

....

$\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ (d

....

....

....

3 $f(x) = x^2 - 6x - 8,\ g(x) = \sqrt{x}$

$(f + g)(x)$ (a

....

....

....

....

$(f - h)(x)$ (b

....

....

....

....

$(f \cdot h)(x)$ (c

....

....

....

$\left(\frac{h}{f}\right)(x)$ (d

....

....

....

....

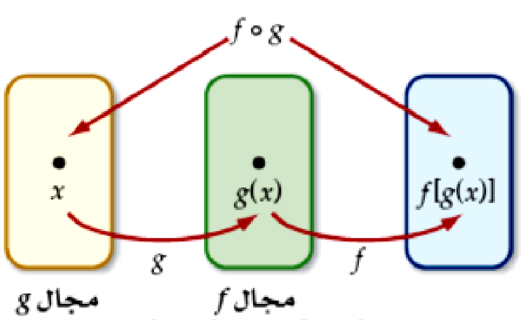
تركيب الدوال: تنتج الدالة $y = (x-3)^2$ من دمج الدالة الخطية $y = x - 3$ والدالة التربيعية $y = x^2$، لاحظ أن هذا الدمج لم يتنج من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة. ويسمى هذا الدمج تركيب الدالتين وملخصه إيجاد قيمة دالة عند قيمة دالة أخرى.

مفهوم أساسي — تركيب دالتين

يعرف **تركيب الدالة** f مع الدالة g على النحو الآتي:

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

ويتكون مجال الدالة $f \circ g$ من جميع قيم x في مجال الدالة g على أن تكون $g(x)$ في مجال f.



$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

تقرأ الدالة $f \circ g$ على النحو f تركيب g أو f بعد g، حيث تُطبَّق الدالة g أولًا ثم الدالة f.

تركيب دالتين

4 إذا كانت $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = x - 4$، فأوجد كلًّا مما يأتي:

a) $[f \circ g](x)$

b) $[g \circ f](x)$

c) $[f \circ g](2)$

5 إذا كانت $f(x) = 3x + 1, g(x) = 5 - x^2$ فأوجد كلاً مما يأتي

a) $[f \circ g](x)$

b) $[g \circ f](x)$

c) $[f \circ g](3)$

6 إذا كانت $f(x) = 6x^2 - 4, g(x) = x + 2$ فأوجد كلاً مما يأتي

a) $[f \circ g](x)$

b) $[g \circ f](x)$

c) $[f \circ g](3)$

إيجاد دالة التركيب بوجود قيود على المجال

7 حدّد مجال الدالة $f \circ g$ متضمنًا القيود الضرورية، ثم أوجد $f \circ g$ في كل من

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, g(x) = x^2 - 9$

$f(x) = x^2 - 2, g(x) = \sqrt{x-3}$ (b

....

....

....

....

....

....

$f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = x^2 - 1$ (c

....

....

....

....

....

....

$f(x) = \frac{5}{x}, g(x) = x^2 + x$ (d

....

....

....

....

....

....

كتابة الدالة كتركيب دالتين

8 أوجد دالتين f و g بحيث يكون $h(x) = [f \circ g](x)$. وعلى ألّا تكون أي منهما الدالة المحايدة $I(x) = x$ في كلٍّ مما يأتي:

a) $h(x) = \sqrt{x^3 - 4}$

....

....

....

....

b) $h(x) = 2x^2 + 20x + 50$

....

....

....

....

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

....

....

....

....

d) $h(x) = \dfrac{1}{x+7}$

....

....

....

....

9 **مؤثرات حركية :** تُصمَّمُ إحدى ألعاب الحاسوب بحيث تبدأ بصورة مستطيلة بعداها 60 بكسل في 20 بكسل ثم يزداد كل بُعد بمقدار 15 بكسل لكل ثانية.

a) أوجد دالتين تعطي إحداهما مساحة المستطيل A كدالة في عرضه L، وتعطي الأخرى عرضه بعد t ثانية.

....

....

....

b) أوجد $A \circ L$. وماذا تمثل هذه الدالة؟

....

....

....

c) كم من الوقت يلزم لتصبح مساحة المستطيل 3 أضعاف مساحته الأصلية؟

....

....

....

10 **أعمال:** أعلن محل تجاري عن خصم مقداره 15% على ثمن أجهزة الحاسوب لطلاب الجامعات، كما وزّع قسائم يستفيد حاملها بخصم مقداره 100 ريال من ثمن الحاسوب.

a) عبّر عن هذه البيانات بدالتين c و d .

....

....

....

b) أوجد $[c \circ d](x)$ و $[d \circ c](x)$. وماذا يعني كلٌّ منهما؟

....

....

....

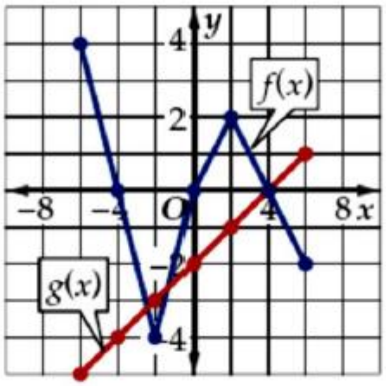
c) أي التركيبين $c \circ d$ أو $d \circ c$ يعطي سعرًا أقل؟ وضح إجابتك.

....

....

....

11 باستعمال منحنيي الدالتين $f(x)$, $g(x)$ الممثلين في الشكل أدناه، أوجد:



$(f+g)(2)$

$(f-g)(-6)$

$(f \cdot g)(4)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

$(f \circ g)(-4)$

$(g \circ f)(6)$

العلاقات العكسية والدوال

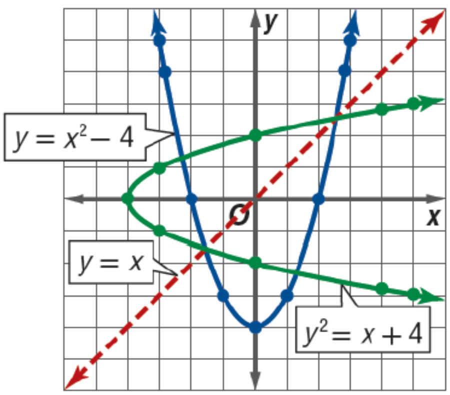
1 الدوال العكسية

العلاقة الموضحة في الجدول A عبارة عن علاقة عكسية للعلاقة الموضحة في الجدول B. توجد **العلاقات العكسية** إذا كانت علاقة واحدة تتضمن (b, a) حينما تتضمن العلاقة الأخرى (a, b). عند التعبير عن دالة في صورة معادلة، يمكن إيجاد العلاقة العكسية لها عن طريق التبادل بين المتغيرات المستقلة والتابعة. لاحظ ما يلي.

علاقة عكسية

$x = y^2 - 4$ أو $y^2 = x + 4$

x	y
−3	5
−2	0
−1	−3
0	−4
1	−3
2	0
3	5



العلاقة

$y = x^2 - 4$

x	y
5	−3
0	−2
−3	−1
−4	0
−3	1
0	2
5	3

س1): أوجد العلاقات العكسية لما يأتي :-

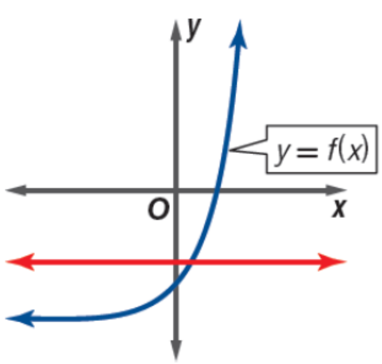
$1)\ \{(1,3),(2,5),(4,3),,(5,2)(2,4)\}$

$2)\ \{(1,3),(2,4),(1,5),(2,-1)\}$

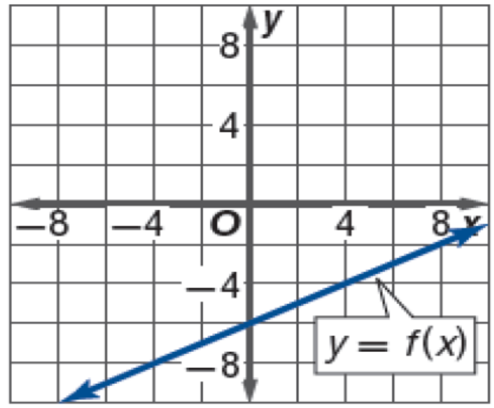
اختبار الخط الأفقي

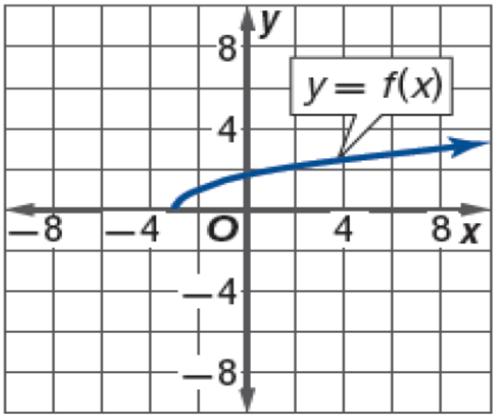
دالة f لها دالة عكسية f^{-1} فقط إذا كان كل خط
فقي يتقاطع مع الرسم البياني للدالة في نقطة
حدة على الأكثر.

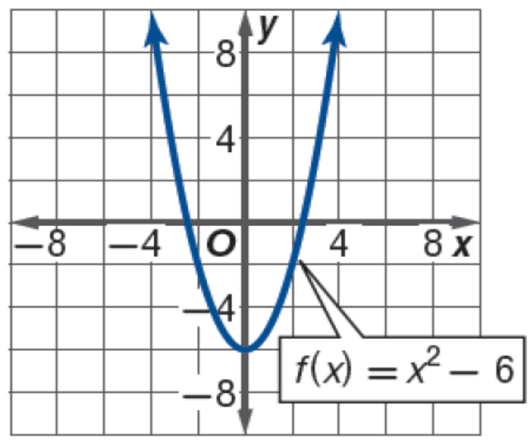
استخدم النماذج

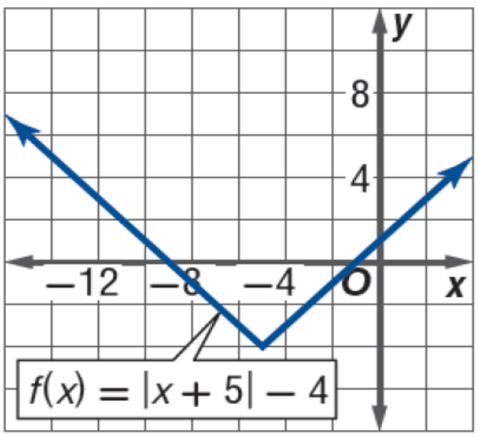


س2) حدد فيما إذا كان للدالة دالة عكسية باستخدام اختيار الخط الأفقي:

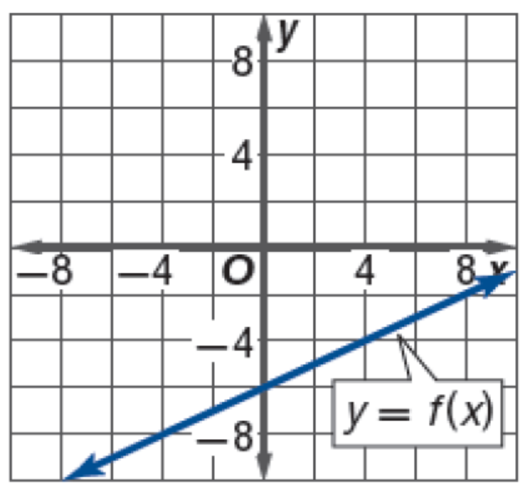


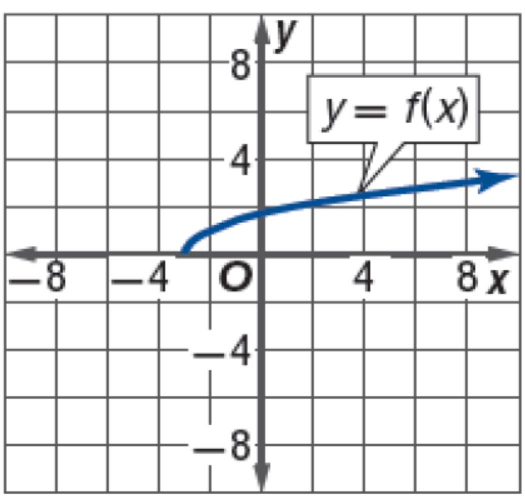






س3): ارسم الدوال أو العلاقة العكسية f^{-1} لكل دالة على نفس الرسم :-





س4): اوجد الدالة العكسية للدوال الآتية :-

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$

c) $f(x) = -16 + x^3$

س5): حدد إذا كانت f^{-1} موجودة . إذا كان الأمر كذلك فأنشئ جدولا للدالة f^{-1}

x	-6	-4	-1	3	6	10
$f(x)$	-4	0	3	5	9	13

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	14	11	8	10	11	16

س6): حدد هل كل دالة هي دالة عكسية للأخرى أم لا ؟ وضح إجابتك ؟

a) $f(x) = 4x + 9 \quad , \quad g(x) = \frac{x-9}{4}$

b) $f(x) = \frac{6}{x-4} \quad , \quad g(x) = \frac{6}{x} + 4$

c) $f(x) = x^2 + 10 \;, x \geq 0 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x-10}$