الوحدة الثالثة

1) نظرية القيمة الوسيطية :

نظرية القيمة المتوسطة للمشتقات :

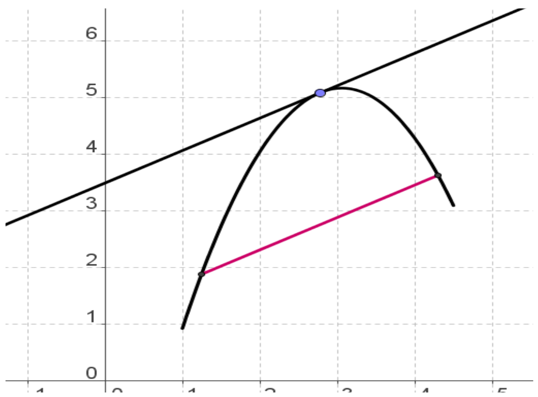
إذا كانت $y=f(x)$ تحقق الشروط

1) متصلة عند كل نقطة في الفترة المغلقة $[a,b]$.
2) قابلة للإشتقاق عند كل نقطة تنتمي لداخلها (a,b)

فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل c في (a,b) يكون عندها $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

تربط النظرية بين متوسط التغير لدالة ما على فترة ما ، ومعدل التغير اللحظي للدالة عند نقطة تنتمي إلى الفترة .

التفسير الهندسي : يوجد مماس عند نقطة داخل الفترة يوازي القاطع على نفس الفترة



التفسير الفيزيائي :

فرق ناتج القسمة $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو متوسط التغير (السرعة المتوسطة) ، $f'(c)$ هو التغير اللحظي (السرعة اللحظية) فإن النظرية تقول بأن التغير اللحظي عند نقطة داخلية ينبغي أن يساوي متوسط التغير على الفترة بكاملها .

مثال : إذا تسارعت سيارة من الصفر مستغرقة 8s لتقطع مسافة 352ft . فإن سرعتها المتوسطة في فترة الثواني الثمانية هي $\dfrac{352}{8}=44\,ft/s$. عند نقطة ما أثناء التسارع (تقول النظرية) بأن عداد السرعة يجب أن يقرأ 44ft/s بالضبط عند لحظة معينة داخل الفترة .

تمرين 1): الدالة $y= f(x) = x^2$

أ) اثبت أن f تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[a,b] = [0,2]$

ب) أوجدي قيمة أو قيم c في (a,b) حيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ت) اكتب معادلة للوتر AB حيث $A=(a,f(a))$ ، $B=(b,f(b))$.

ث) اكتب معادلة المماس الموازي للوتر AB عند قيم c .

تمارين :

1) $f(x)=x^2+1$...............$[-3,1]$

2) $f(x)=x^3-2x^2+x$..............$[0,2]$

3) $f(x)=x^3-3x^2+5$..............$[2,3]$

4) $f(x)=x+\frac{1}{x}$............$0.5\le x\le 2$

5) $f(x)=\sqrt{x-1}$............$1\le x\le 3$

6) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$..............$[0,1]$

للدوال السابقة أوجدي كل مما يأتي :

أ) اثبت أن f تحقق فروض نظرية القيمة المتوسطة في الفترة [a,b] .

ب) أوجدي قيمة أو قيم c في (a,b) حيث $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ت) اكتب معادلة للوتر AB حيث A=(a,f(a)) ، B=(b,f(b)) .

ث) اكتب معادلة المماس الموازي للوتر AB عند قيم c .

تمرين 2):

لتكن $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ، A = (-1 , f(-1)) ، B = (1 , f(1)) اوجد مماسا للدالة f في الفترة (-1,1) ويكون موازيا للقاطع AB .

تمرين 3) : لكل من الدوال الأتية :

1) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$........,$[-1,1]$

2) $f(x)=|x-1|$........,$[0,3]$

3) $f(x)=1-|x|$........,$[-1,1]$

4) $f(x)=\begin{cases}\cos x & -\pi\le x\le 0\\ 1+\sin x & 0<x\le\pi\end{cases}$..............,$[-\pi,\pi]$

أوجدي :

1) اثبت أن الدالة f لا تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة [a,b]

2) اوجد أي قيم لـ c في الفترة (a,b) التي تحقق $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

2) النقاط الحرجة

تعريف : هي نقطة من مجال الدالة تكون عندها $f'(x)$ تساوي الصفر أو غير موجودة

مثال 1) : أوجدي النقاط الحرجة للدالة

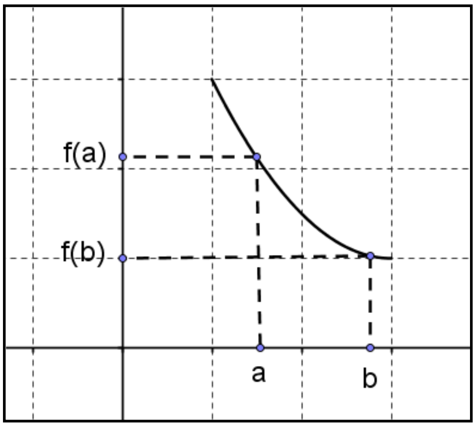
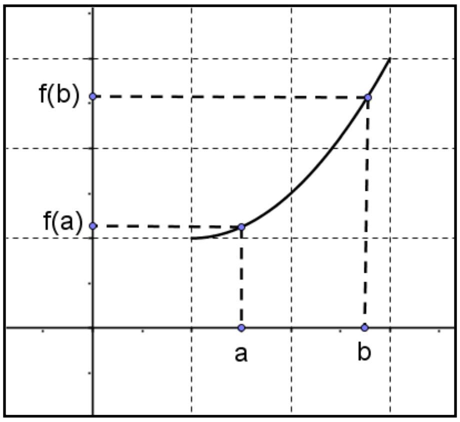
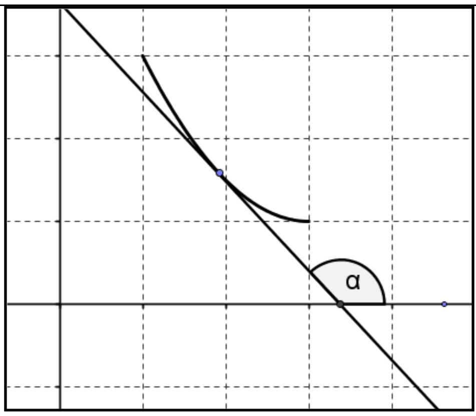
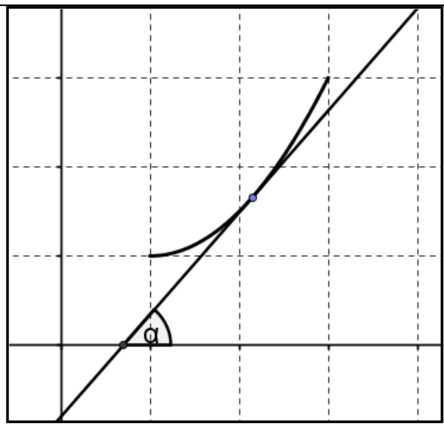
$$y = \sqrt[3]{x^2 - 4x}$$

الحل :

ملاحظات : بعض الحالات

1) الدالة الثابتة :
2) دالة الصحيح :
3) الدالة الخطية :

3) الدوال المتزايدة والمتناقصة :

	
$a < b$ $f(a) < f(b)$ أي أن $f(x)$ متزايدة كلما زادت x زادت y	$a < b$ $f(a) > f(b)$ أي أن $f(x)$ متناقصة كلما زادت x قلت y
	
$f'(x) = \tan\alpha$ $f'(x) > 0$ أي أن $f(x)$ متزايدة	$f'(x) = \tan\alpha$ $f'(x) < 0$ أي أن $f(x)$ متزايدة

لتحديد فترات التزايد والتناقص ندرس إشارة $f'(x)$

أكبر من الصفر (موجبة)

f متزايدة

أصغر من الصفر (سالبة)

f متناقصة

مثال1) : $f(x) = x^3 - 3x + 2$ اوجدي فترات التزايد وفترات التناقص

الحل :

....

....

....

....

x	
$f'(x)$	
$f(x)$	

4) كتابة الفترات :

تمرين1) (للطالب): أين تزايد الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ وأين تناقصها ؟

تمارين : أوجد

1) الفترات التي تكون عليها الدالة متزايدة

2) الفترات التي تكون عليها الدالة متناقصة . لكل من الدوال الأتية

a) $k(x) = \dfrac{1}{x^2}$	e) $f(x) = x - 2\sin x$.........................$0 \le x \le 2\pi$
b) $y = 4 - \sqrt{x+2}$................, $x \ge -2$	f) $k(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$
c) $h(x) = \dfrac{-x}{x^2 + 4}$	g) $y = \begin{cases} 3 - x & x < 0 \\ x^2 + 1 & x \ge 0 \end{cases}$
d) $g(x) = 2x + \cos x$	

تمرين أخير : إذا كانت $f(x) = x|x-2|$ حدد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة

4) القيم القصوى المحلية (النسبية)

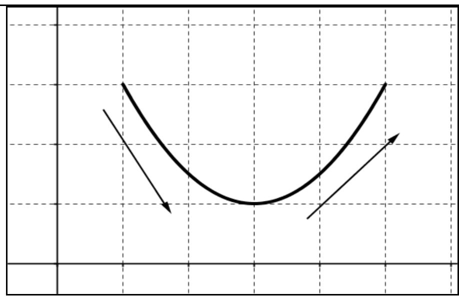
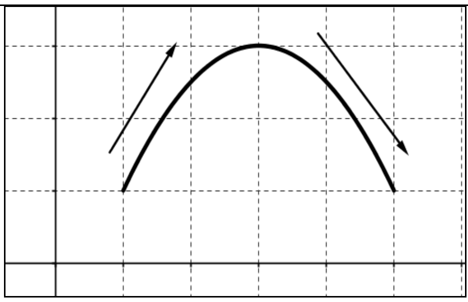
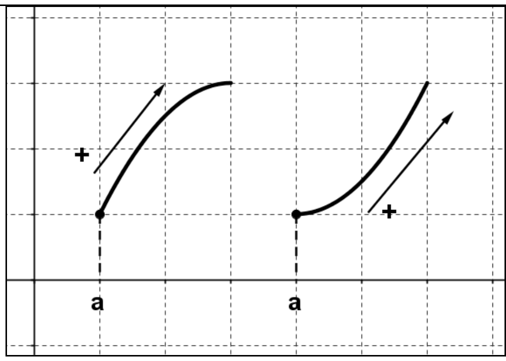
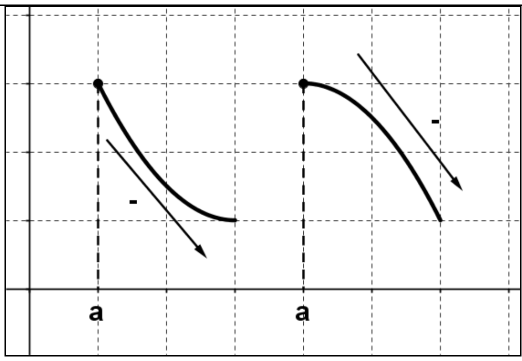
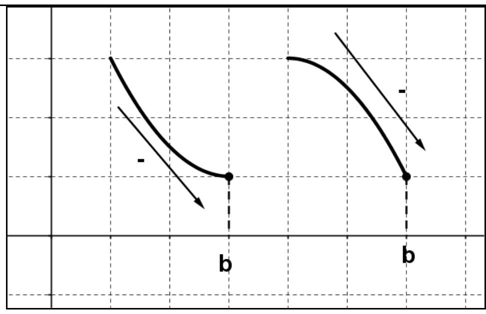
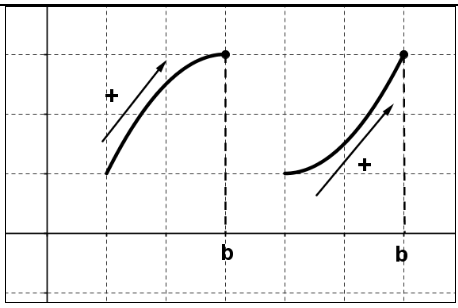
تعريف : إذا كانت c نقطة داخلية في مجال الدالة f ، فإن f(c) تكون

أ) قيمة عظمى محلية عند c $\Longleftrightarrow$ $f(x) \le f(c)$ $\forall x$ في فترة مفتوحة تحتوي c .

ب) قيمة صغرى محلية عند c $\Longleftrightarrow$ $f(x) \ge f(c)$ $\forall x$ في فترة مفتوحة تحتوي c .

ويمكن التوسع في تعريف القيم القصوى المحلية لتشمل النقاط الطرفية .

إيجاد القيم القصوى المحلية :

<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>تحول سلوك الدالة من تناقص إلى تزايد
$f^{/}(x) < 0$ إلى $f^{/}(x) > 0$
– إلى +
$x = c$ نقطة صغرى محلية قيمتها هي f(c) .</td><td>تحول سلوك الدالة من تزايد إلى تناقص
$f^{/}(x) > 0$ إلى $f^{/}(x) < 0$
+ إلى –
$x = c$ نقطة عظمى محلية قيمتها هي f(c) .</td></tr>
<tr><td colspan="2">النقاط الطرفية اليسرى</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f^{/}(x)>0$
x=a صغرى محلية قيمتها هي f(a) .</td><td>$f^{/}(x)<0$
x=a عظمى محلية قيمتها هي f(a) .</td></tr>
<tr><td colspan="2">النقاط الطرفية اليمنى</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$f^{/}(x)<0$
x=b صغرى محلية قيمتها هي f(b) .</td><td>$f^{/}(x)>0$
x=b كبرى محلية قيمتها هي f(b) .</td></tr>
</table>

تمارين :

حدد القيم القصوى المحلية .

1) $y = x^{\frac{2}{3}}(x+2)$

2) $y = x^2\sqrt{3-x}$

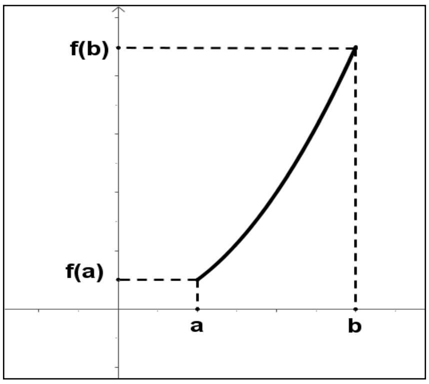
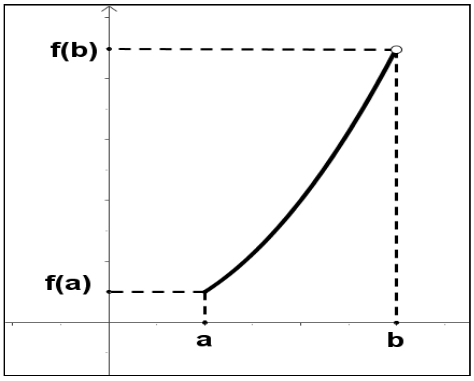
3) $y = \begin{cases} 3-x & x<0 \\ 3+2x-x^2 & x \ge 0 \end{cases}$

الحل :

5) القيم القصوى المطلقة

عظمى — صغرى

(أكبر أو أصغر قيمة في الرسم كله)

	
f(a) قيمة صغرى مطلقة f(b) قيمة عظمى مطلقة	f(a) قيمة صغرى مطلقة لا يوجد قيمة عظمى مطلقة

الخطوات لايجاد القيم القصوى المطلقة :

1) الاتصال :
2) نوجد $f'(x)$
3) نوجد النقاط الحرجة والنقاط الطرفية .
4) نوجد f(للنقاط الحرجة والنقاط الطرفية) .
5) المقارنة : أكبرها (عظمى محلية) – أصغرها (صغرى محلية)

مثال 1) :

أوجدي القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ على الفترة [-2,3] .

الحل :

تمارين : أوجدي القيم القصوى للدالة .

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

في مجال D في الحالات التالية

$D = (-\infty , \infty)$, $D = [-2 , 1]$, $D = [-2 , 1)$, $D = (2 , 3)$

b) $f(x) = 1 + \sin(x)$, $[0 , \pi]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $[1 , 3]$

d) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$, $[1, 3]$

تمرين : أوجدي القيم القصوى للدوال

a) $y = \sin(x + \dfrac{\pi}{4})$..............................$0 \le x \le \dfrac{7\pi}{4}$

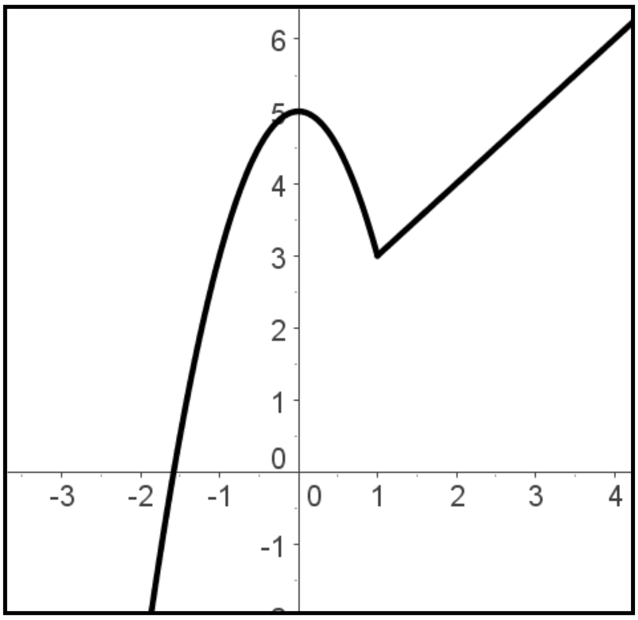
b) $y = x^{\frac{2}{3}}$..................................$-2 < x \le 3$

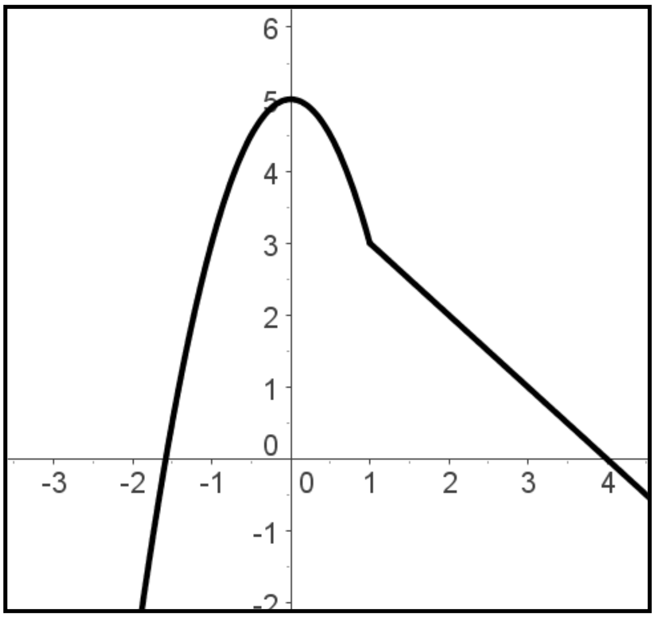
تمرين : أوجدي القيم القصوى للدوال

1) $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x^2 & x \le 1 \\ -x + 4 & x > 1 \end{cases}$	2) $f(x) = \begin{cases} 5 - 2x^2 & x \le 1 \\ x + 2 & x > 1 \end{cases}$

3)

$$f(x)=\begin{cases}3x^2-6x+11 & x\le 3\\ x^2-8x+17 & x>3\end{cases}$$





6) اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية

خطوات الحل :

1) الاتصال
2) المشتقة الأولى
3) النقاط الحرجة (ماعدا الأطراف)
4) نوجد المشتقة الثانية
5) نوجد f'' (للنقاط الحرجة) .

موجب (أكبر من الصفر)	سالب (أصغر من الصفر)	يساوي الصفر
توجد قيمة صغرى محلية	توجد قيمة عظمى محلية	يفشل الاختبار

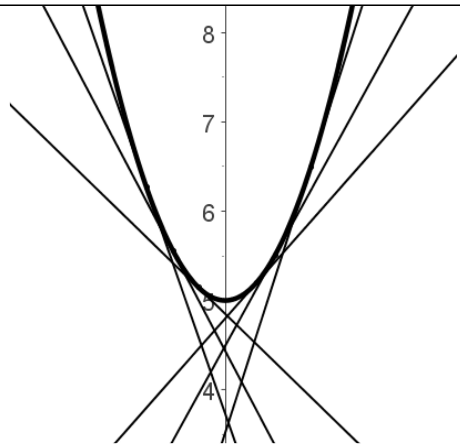
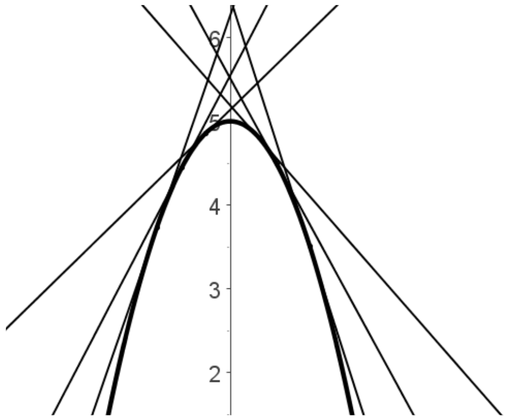
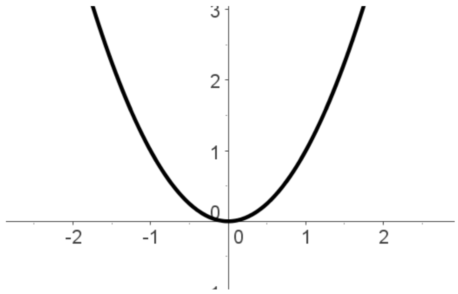
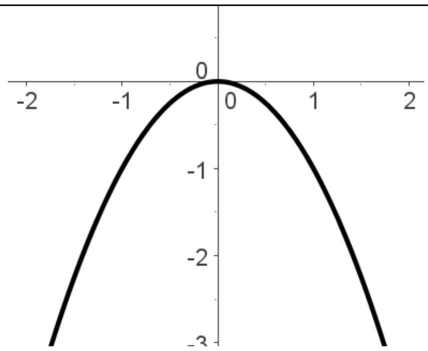
يفشل الاختبار ولابد العودة لاختبار المشتقة الاولى في حالتين :

1) f'' (للنقاط الحرجة) تساوي صفر .
2) عند الاطراف .

تمرين :

1) أوجدي القيم المتطرفة للدالة : $f(x)= x^3 - 12x - 5$
2) باستخدام اختبار المشتقة الثانية حدد القيم القصوى المحلية للدالة $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 3$

7) التقعر

لأعلى	لأسفل
	
جميع نقاط المنحنى أعلى المماسات	جميع نقاط المنحنى أسفل المماسات
	
$f(x) = x^2$ $f^{/}(x) = 2x$ $f^{//}(x) = 2 > 0$ منحنى $f(x)$ تقعره لأعلى	$f(x) = - x^2$ $f^{/}(x) = - 2x$ $f^{//}(x) = - 2 < 0$ منحنى $f(x)$ تقعره لأسفل

لتحديد فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل يجب دراسة إشارة $f^{//}(x)$

مثال : أوجدي فترات التقعر لأعلى ولأسفل للدالة $f(x)= x^3 - 6x - 3$

الحل :

نقطة الانعطاف : هي نقطة تنتمي لمجال الدالة تكون عندها $f''(x)$ تساوي الصفر أو غير موجودة

ملاحظة : يجب أن يحدث عندها تغير في تقعر المنحنى وتكتب على شكل زوج مرتب $(x,f(x))$.

x		x_1		x_2		x_3	
$f''(x)$	+	0	−	#	−		+
$f(x)$		$f(x_1)$		$f(x_2)$		$f(x_3)$	
		$(x_1,f(x_1))$		$(x_2,f(x_2))$		$(x_3,f(x_3))$	
		نقطة انعطاف		ليست نقطة انعطاف		ليست نقطة انعطاف	
		لأنها		لأنها		لأنها	

تمارين :

1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ اوجدي فترات التقعر لأعلى ولأسفل ونقاط الانعطاف إن وجدت .

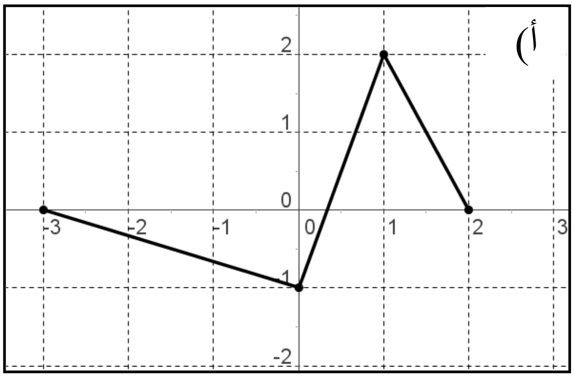
2) لتكن $f(x)=x^3-3x^2+5$

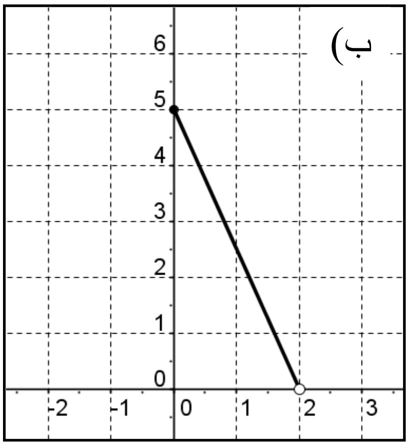
أ) أوجدي نقطة الانقلاب لمنحنى الدالة $f(x)$

ب) أوجدي معادلة خط المماس عند نقطة الانقلاب .

3) يتحرك جسيم على خط مستقيم افقي حيث دالة موقعه $s(t)=2t^3-14t^2+22t-5$ ، $t\geq 0$ أوجد السرعة اللحظية والعجلة ثم صف حركته .

8) الرسم





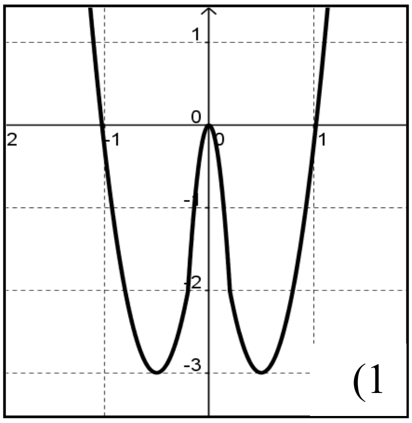
1) : أوجدي النقاط التي يوجد عندها قيم قصوى للسؤالين (1 ، 2) .

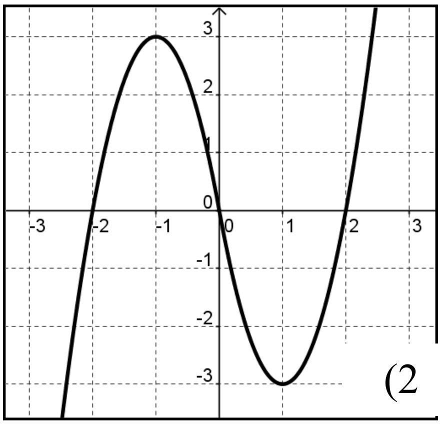
مهم : كراسة التمارين ص40 ، 41 ، 42 (الرسم)

2) استخدم الرسوم البيانية للدالة f لتقدير أين تكون :

أ) f' : 0 ، موجبة ، سالبة

ب) f'' : 0 ، موجبة ، سالبة





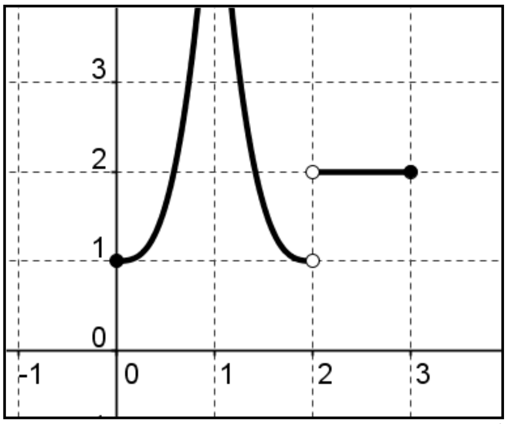
(1	(2

3) استخدم الرسم البياني للمشتقة f' لتقدير الفترات التي تكون فيها الدالة المتصلة f .

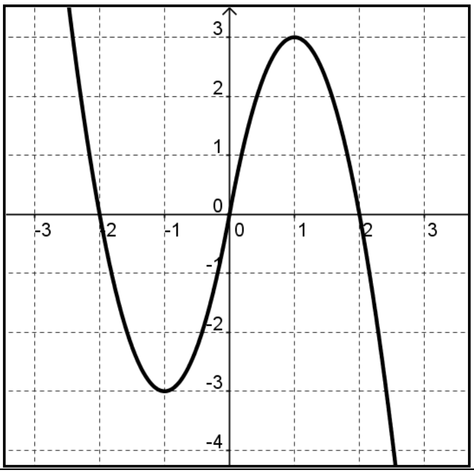
أ) متزايدة

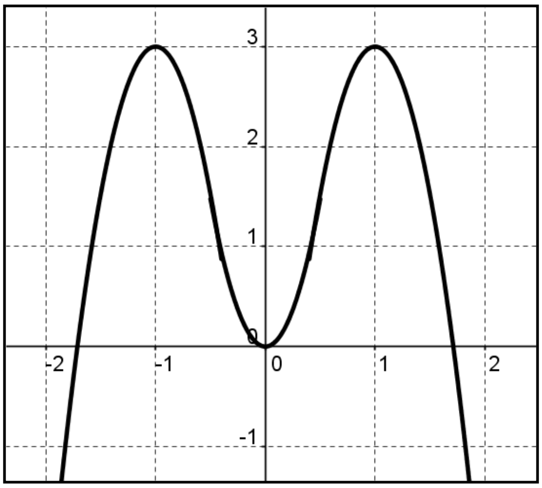
ب) متناقصة

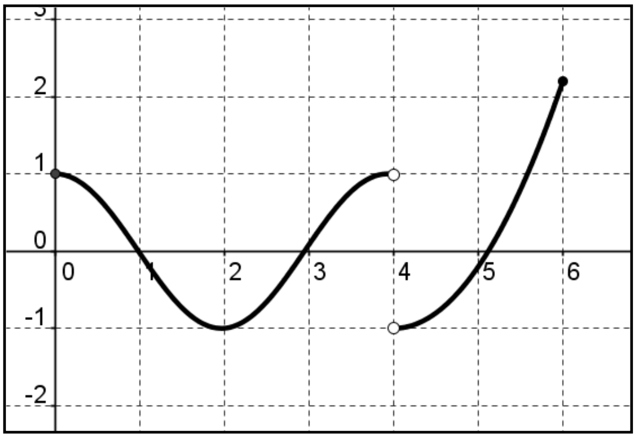
جـ) قدر تقريبا أن يكون للدالة f قيم قصوى محلية .



مجال f' هو $[0,1)\cup(1,2)\cup(2,3]$

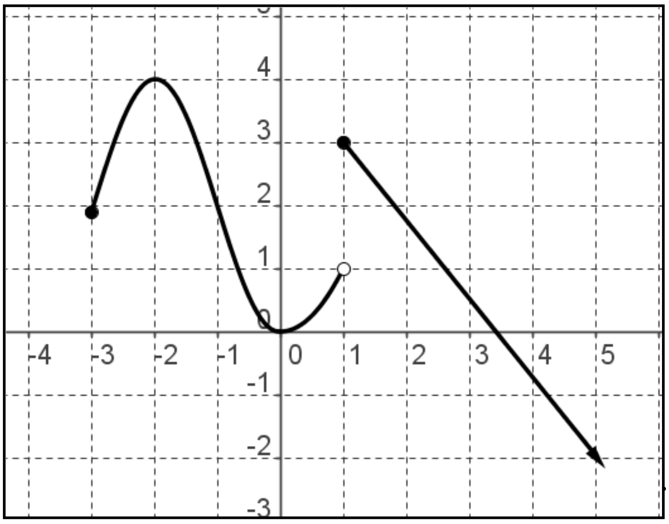






مجال f' هو $[0,4]\cup[4,6]$

<u>4)</u> : الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f على مجالها : أكملي :



1) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) =$ ....

2) مجموعة النقاط الحرجة للدالة f هي ....

3) لمنحنى الدالة مماس أفقي عند: ....=x

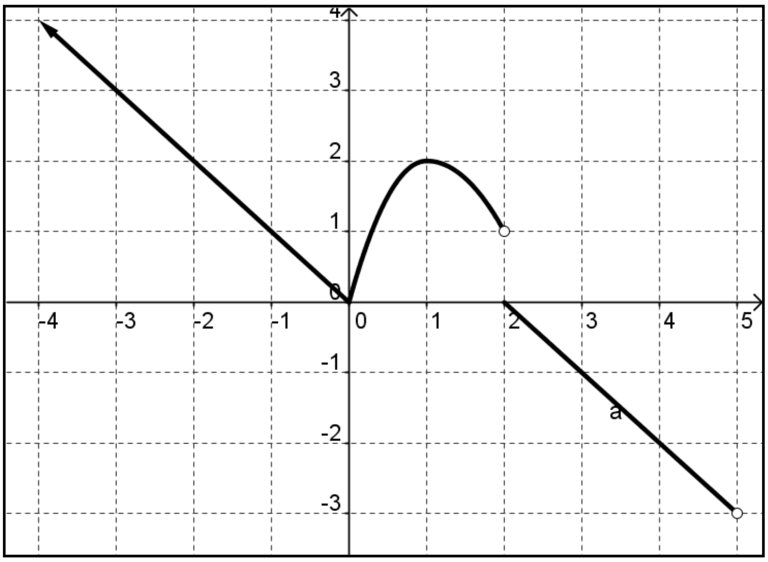
4) مجموعة قيم x التي يوجد عند كل منها قيم قصوى محلية للدالة f هي ....

5) القيم القصوى المطلقة للدالة f هي ....

6) $f'(x)>0$ لكل x تنتمي ....

7) $f'(3) =$ ....

<u>5)</u> الشكل المجاور يمثل بيان الدالة f المعرفة على] $-\infty,5$ [. أكملي :



1) مجموعة النقط الحرجة للدالة f هي عند x ∋ ....

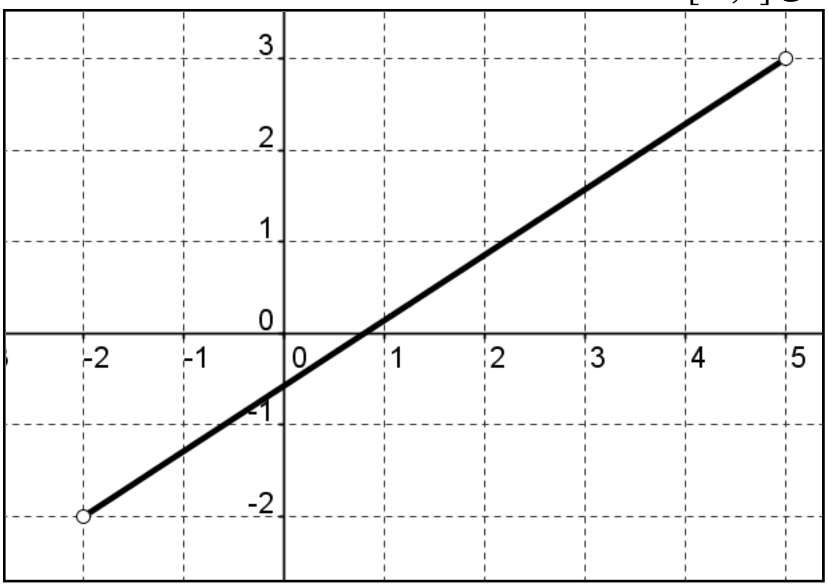
2) الدالة متناقصة على ....

3) الدالة متزايدة على ....

4) منحنى الدالة f مقعر لأسفل في ....

5) $f'(-2) =$ ....

6): الشكل يمثل بيان الدالة $f^{/}$ للدالة ق المتصلة على [2,5-] .



أكملي :

1) f متزايدة على ....

2) f متناقصة على ....

3) للدالة قيمة صغرى محلية عند x = ... هى ....

4) $f^{/}(1)=$……………………

5) $f^{//}(1)=$……………………

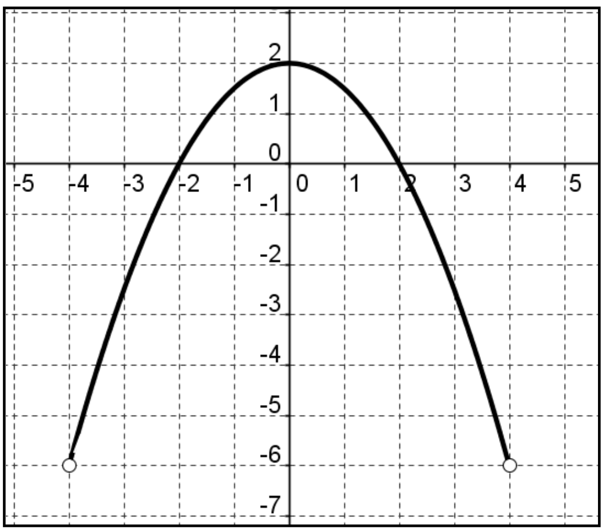
6) معادلة المماس للدالة f عند النقطة (2 ، 3) ....

7) منحنى الدالة f مقعر ....على ....

8) نقاط الانعطاف .... ، عدد نقاط الانعطاف ....، مجموعة نقاط الانعطاف ....

---

7) : الشكل يمثل بيان الدالة $f^{/}$ للدالة f المتصلة على [4 ، 4-] .



أكملي :-

1) f متزايدة على ....

2) f متناقصة على ....

3) يوجد للدالة قيمة عظمى محلية عند x = ... هي ....

4) يوجد للدالة قيمة صغرى محلية هي ....

5) منحنى f مقعرة لأعلى على ....

6) منحنى f مقعرة لأسفل على ....

7) مجموعة نقاط الانعطاف ....

8) مجموعة حل $f^{/}(x)=0$ هى ....

مجموعة حل $f^{//}(x)=0$ هى ....

مجموعة حل $f^{/}(x)=1$ هى ....

9) معادلة العمودي لمنحنى الدالة f عند (2 ، 3)