الوحدة 5 المحتوى الرياضي

الترابط الرأسي

ما قبل الوحدة 5

- تقدير النهايات؛ لدراسة اتصال دالة وسلوك طرفي تمثيلها البياني.
- إيجاد متوسط معدل التغيّر باستعمال القاطع.
- إيجاد متوسط معدل تغيّر دالة.

الوحدة 5

- تقدير نهايات الدوال عند قيم محددة، أو عند المالانهاية.
- إيجاد نهايات دوال كثيرات الحدود، والدوال النسبية عند قيم محددة وعند المالانهاية.
- إيجاد معدل التغيّر اللحظي لدالة غير خطية عند نقطة بإيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند تلك النقطة.
- إيجاد ميل منحنى دالة غير خطية عند نقطة باستعمال المشتقات.
- استعمال قانوني الضرب والقسمة في إيجاد المشتقات.
- تقريب المساحة تحت منحنى دالة باستعمال مستطيلات.
- إيجاد المساحة تحت منحنى دالة باستعمال التكامل المحدد.
- إيجاد الدوال الأصلية.
- استعمال النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل؛ في إيجاد التكامل المحدد.

ما بعد الوحدة 5

- استعمال قواعد الاشتقاق؛ في حساب مشتقات دوال مختلفة.
- استعمال التكامل؛ في حساب المساحة بين منحنيي دالتين.
- إيجاد حجوم الأجسام الدورانية.

نظرة على الدروس

5-1 تقدير النهايات بيانيًا

- يمكن تقدير نهايات كثير من الدوال من خلال تكوين جداول لقيمها، أو من خلال تمثيلها بيانيًّا، فإذا اقتربت نهاية الدالة من اليسار ونهايتها من اليمين من القيمة نفسها للدالة، فإن النهاية موجودة عند قيمة المتغير المناظرة.
- وإذا كان للدالة خط تقارب رأسي عند نقطة ما، فإن نهاية هذه الدالة غير معرّفة عند تلك النقطة، ويمكن وصف سلوك الدالة عند تلك النقطة بغير المحدود أو اللانهائي أو $\pm\infty$.

5-2 حساب النهايات جبريًّا

- تستعمل الطرائق الجبرية أيضًا لحساب النهايات، والخطوة الأولى لإيجاد النهاية هي محاولة تعويض القيمة التي يقترب منها المتغيّر في الدالة، فإذا كان ناتج التعويض صيغة غير محددة مثل $\frac{0}{0}$ ، فإن الطرق الجبرية الأخرى تستعمل لتبسيطها، بحيث يمكننا التعويض مرةً أخرى بشكل مباشر.
- ومن الطرائق الجبرية المستعملة في حساب النهايات، التحليلُ إلى العوامل لتبسيط المقدار بحيث يمكن حساب النهاية بالتعويض المباشر.
- توجد ثلاث حالات عند حساب نهايات الدوال النسبية عندما تقترب x من المالانهاية.

1) إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام، فإن النهاية غير معرّفة، أو ∞ أو $-\infty$ ، بحسب إشارة الحد الرئيس في كل من البسط والمقام.

2) إذا كانت درجة البسط مساوية لدرجة المقام، فإن النهاية مساوية لناتج قسمة معاملي الحدين الرئيسين في البسط والمقام.

3) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، فإن النهاية صفر.

وكحالة خاصة من الدوال النسبية لدوال المقلوب، بحيث تكون $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0$، كما أنه لأي عدد صحيح موجب n فإن:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^n} = 0$$

النهايات والاشتقاق

5-3 المماس والسرعة المتجهة

إن معدل تغيّر الدالة الخطية هو نفسه ميل المستقيم الذي يمثّلها. ومعدل تغيّر دالة غير خطية عند نقطة ما عليها هو ميل مماس منحنى هذه الدالة عند تلك النقطة. وميل المماس هو معدل التغير اللحظي عند هذه النقطة. وتستعمل الصيغة $m = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ في إيجاد معدل التغيّر اللحظي عند النقطة $(x, f(x))$. وتستعمل أيضًا في إيجاد السرعة المتجهة اللحظية عند نقطة، أو في إيجاد معادلة تمكننا من حساب السرعة المتجهة اللحظية عند أي نقطةٍ على منحنى الدالة.

5-4 المشتقة

مشتقة الدالة هي النهاية التي تُستعمل في إيجاد ميل مماس منحنى هذه الدالة عند أي نقطة عليها، والاشتقاق هو الاسم الذي يُطلق على عملية إيجاد المشتقة، والجدول أدناه يلخص بعض قواعد الاشتقاق:

	القاعدة	مثال
مشتقة القوة	$f(x) = x^n$ ، $f'(x) = nx^{n-1}$	إذا كان $f(x) = x^2$ فإن $f'(x) = 2x$
مشتقة الثابت	$f(x) = c$ ، $f'(x) = 0$	إذا كان $f(x) = 6$ فإن $f'(x) = 0$
مشتقة مضاعفات القوى	$f(x) = c\,x^n$ ، $f'(x) = cnx^{n-1}$	إذا كان $f(x) = 3x^2$ فإن $f'(x) = 6x$
مشتقة المجموع أو الفرق	$f(x) = g(x) \pm h(x)$, $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$	إذا كان $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$ فإن $f'(x) = 6x + 2 - 0 = 6x + 2$

5-5 المساحة تحت المنحنى والتكامل

يعرض هذا الدرس طريقتين لحساب المساحة تحت منحنى دالة.

الطريقة الأولى تتم من خلال جمع مساحات مستطيلات صغيرة تشكّل المساحة تحت المنحنى، وتزداد دقة هذه الطريقة كلما زاد عدد المستطيلات المستعملة في الحساب.

أما الطريقة الثانية، فهي من خلال التكامل، والذي يستعمل النهايات بدلًا من المستطيلات. وهذه الطريقة أكثر دقة ولا تحتاج لحساب مساحات عدة مستطيلات.

5-6 النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل

إذا أُعطينا دالة مكتوبة على صورة مشتقة لدالة أخرى، فإن الدالة الأخرى تُسمى الدالة الأصلية للدالة المعطاة. وهناك خيارات كثيرة لها؛ لأن الحد الثابت فيها غير معلوم.

الدالة الأصلية للدالة $f(x) = kx^n$ هي $F(x) = \frac{kx^{n+1}}{n+1} + C$ حيث k و n عددان معلومان $n \neq -1$ ، C أي عدد حقيقي.

وترشدنا النظرية الأساسية في التفاضل والتكامل إلى طريقة إيجاد التكامل دون اللجوء إلى النهايات، وبما أن العدد الثابت ليس ذا أهمية في التكامل المحدد، فإنه إذا كانت $F(x)$ دالة أصلية للدالة المتصلة $f(x)$، فإن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$