الدوال الاسية وواللوغاريتمية

مراجعة درس بدرس

2-1 الدوال الأسية

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرفي، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

11. $f(x) = 3^x$
12. $f(x) = 0.4^x$
13. $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$
14. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

استخدم رسم f(x) البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ g(x). ثم مثّل التمثيلين البيانيين لكل من f(x) وg(x).

15. $f(x) = 4^x;\ g(x) = 4^x + 2$
16. $f(x) = 0.1^x;\ g(x) = 0.1^{x-3}$
17. $f(x) = 3^x;\ g(x) = 2 \times 3^x - 5$
18. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x;\ g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+4} + 2$

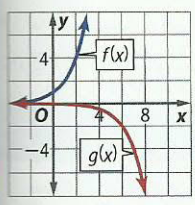
انسخ الجدول أدناه واستكمله لتصل إلى قيمة الاستثمار A لرأس المال P والمعدل r والزمن t إذا تمت إضافة الفائدة المركبة n مرات سنويًا.

n	1	4	12	365	باستمرار
A					

19. $P = 250$ AED, $r = 7\%$, $t = 6$ أعوام
20. $P = 1000$ AED, $r = 4.5\%$, $t = 3$ أعوام

مثال 1

استخدم رسم $f(x) = 2^x$ البياني لوصف التحول الذي ينتج عن التمثيل البياني لـ $g(x) = -2^{x-5}$. ثم مثّل بيانيًا g وf.



تأخذ هذه الدالة الصيغة $g(x) = -f(x-5)$.
وهكذا، فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x) = 2^x$ مزاحًا 5 وحدات إلى اليمين وينعكس على المحور الأفقي x.

مثال 2

ما قيمة 2000 AED بعد استثمارها بمعدل 6.5% لمدة 12 عامًا إذا كانت الفائدة مركبة بمعدل ربع سنوي؟ أو بشكل مستمر؟

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ قاعدة الفائدة المركبة

$= 2000\left(1 + \frac{0.065}{4}\right)^{4(12)}$ $P = 2000,\ r = 0.065,\ n = 4,\ t = 12$

$= 4335.68$ AED حول لأبسط صورة.

$A = Pe^{rt}$ قاعدة الفائدة المستمرة

$= 2000e^{0.065(12)}$ $P = 2000,\ r = 0.065,\ t = 12$

$= 4362.94$ AED حوّل لأبسط صورة.

2-2 الدوال اللوغاريتمية

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

21. $\log_2 32$
22. $\log_3 \frac{1}{81}$
23. $\log_{25} 5$
24. $\log_{13} 1$
25. $\ln e^{11}$
26. $3^{\log_3 9}$
27. $\log 80$
28. $e^{\ln 12}$

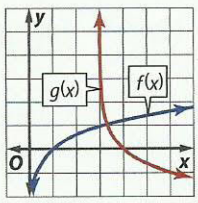
استخدم تمثيل f(x) البياني لوصف التحول الناتج في تمثيل g(x) البياني. ثم ارسم تمثيلي f(x) وg(x) البيانيين.

29. $f(x) = \log x;\ g(x) = -\log(x+4)$
30. $f(x) = \log_2 x;\ g(x) = \log_2 x + 3$
31. $f(x) = \ln x;\ g(x) = \frac{1}{4}\ln x - 2$

مثال 3

استخدم تمثيل $f(x) = \ln x$ البياني لوصف التحول الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x) = -\ln(x-3)$. ثم مثّل التمثيل البياني لكل من $f(x)$ و $g(x)$.

تأخذ هذه الدالة الصيغة $g(x) = -f(x-3)$. وهكذا، فإن $g(x)$ هو التمثيل البياني لـ $f(x)$ منعكسًا على المحور الأفقي x ومزاحًا 3 وحدات إلى اليمين.



3-2 خصائص اللوغاريتمات

قم بتوسيع كل تعبير.

32. $\log_3 9x^3y^3z^6$
33. $\log_5 x^2a^7\sqrt{b}$
34. $\ln \frac{e}{x^2y^3z}$
35. $\log \frac{\sqrt{gj^5k}}{100}$

قم بتبسيط كل تعبير.

36. $3\log_3 x - 2\log_3 y$
37. $\frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 (b+1)$
38. $5\ln(x+3) + 3\ln 2x - 4\ln(x-1)$

مثال 4

قم بتبسيط $3\log_3 x + \log_3 7 - \frac{1}{2}\log_3 x$

$3\log_3 x + \log_3 7 - \frac{1}{2}\log_3 x$

$= \log_3 x^3 + \log_3 7 - \log_3 \sqrt{x}$ خاصية الأس الثابت

$= \log_3 7x^3 - \log_3 \sqrt{x}$ خاصية ناتج الضرب

$= \log_3 \frac{7x^3}{\sqrt{x}}$ خاصية ناتج القسمة

2-4 المعادلات الأسية واللوغاريتمية

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

39. $3^{x+3} = 27^{x-2}$
40. $25^{3x+2} = 125$
41. $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
42. $e^x - 4e^{-x} = 0$
43. $\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 18$
44. $\log_6 x + \log_6 (x-5) = 2$

مثال 5

حل $7\ln 2x = 28$

$7\ln 2x = 28$ المعادلة الأصلية

$\ln 2x = 4$ اقسم كل طرف على 7.

$e^{\ln 2x} = e^4$ ارفع أس كل طرف.

$2x = e^4$ خاصية المعكوس

$x = 0.5e^4$ تقريبًا $= 27.299$ حل وحوّل لأبسط صورة.

2-5 النمذجة باستخدام الانحدار غير الخطي

أكمل كلاً من الخطوات التالية.

a. احسب التقريب الخطي للبيانات حسب النموذج المحدد.
b. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.
c. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية ومثّله بيانيًا.

45. أسي

x	0	1	2	3	4	5	6
y	2	5	17	53	166	517	1614

46. لوغاريتمي

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3—	4	8	10	12	14	15

مثال 6

احسب التقريب الخطي للبيانات الموضحة بافتراض نموذج لوغاريتمي، واحسب معادلة الخط الأفضل تمثيلاً. استخدم هذه المعادلة لإيجاد نموذج لوغاريتمي للبيانات الأصلية.

x	1	3	5	7	9	10
y	12	−7	−15	−21	−25	−27

الخطوة 2 لحساب التقريب الخطي لـ $y = a\ln x + b$؛ ومثّل بيانيًا (ln x, y).

ln x	0	1.1	1.6	1.9	2.2	2.3
y	12	−7	−15	−21	−25	−27

الخطوة 2 الخط الأفضل تمثيلاً هو $y = -16.94x + 11.86$

الخطوة 3 $y = -16.94\ln x + 11.86$ $x = \ln x$

التطبيقات وحل المسائل

47. **التضخم** تزداد أسعار السلع الاستهلاكية عامة كل عام نتيجة التضخم. من عام 2000 إلى 2008، كان متوسط معدل التضخم في الولايات المتحدة 5.4%. في ظل هذا المعدل، يمكن تمثيل سعر اللبن بعد t من الأعوام من يناير 2000 بواسطة $M(t) = 2.75(1.045)^t$. (الدرس 1-2)

a. كم كان سعر اللبن في عام 2005؟ 2000؟

b. إذا استمر التضخم بمعدل 4.5%، فكم سيكون سعر اللبن تقريبًا في 2015؟

c. في أي عام بلغ سعر اللبن 4 دولارات أمريكية؟

48. **السيارات** تنخفض قيمة السيارة الجديدة من لحظة قيادتها خارج معرض التاجر. وتستمر قيمة السيارة في الانخفاض كل عام. قيمة إحدى السيارات بعد t أعوام من شرائها هو $f(x) = 18{,}000(0.8)^t$ (الدرس 1-2)

a. ما معدل استهلاك السيارة؟

b. بعد كم عام من شراء السيارة تنخفض قيمتها الأصلية إلى النصف؟

49. **الكيمياء** عمر النصف لإحدى المواد المشعة هو 16 عامًا. يمكن تحديد عدد الأعوام t التي يستغرقها انحلال الكمية المبدئية N_0 إلى N بواسطة $t = \frac{16 \log \frac{N}{N_0}}{\log \frac{1}{2}}$ (الدرس 2-2)

a. كم تقريبًا عدد الأعوام التي يستغرقها انحلال 100 جرام إلى 30 جرامًا؟

b. ما النسبة المئوية تقريبًا لما سيتبقى من 100 جرام بعد 40 عامًا؟

50. **الزلازل** مقياس ريختر هو نظام عددي لتحديد قوة الزلازل. يعتمد العدد R على كمية الطاقة E التي يطلقها الزلزال بالكيلو وات في الساعة. ويتم تحديد قيمة R بواسطة $R = 0.67 \times \log(0.37E) + 1.46$ (الدرس 2-2)

a. أوجد R لزلزال يطلق 1,000,000 كيلو وات في الساعة.

b. قم بتقدير كمية الطاقة التي يطلقها زلزال يسجل 7.5 على مقياس ريختر.

51. **علم الأحياء** الوقت الذي يستغرقه تضاعف نوع من الحيوانات يُعرف بأنه مدة الجيل ويتم تمثيله بالمعادلة $G = \frac{t}{2.5 \log_b d}$، حيث يمثل b العدد الأولي للحيوانات ويمثل d العدد النهائي للحيوانات ويمثل t الفترة ويمثل G مدة الجيل. إذا عملت أن مدة الجيل G لأحد الأنواع 6 أعوام، فما الفترة t التي يستغرقها 5 حيوانات للتضاعف إلى 3125 حيوانًا؟ (الدرس 3-2)

52. **الصوت** يمكن تمثيل مستوى شدة الصوت بالديسيبل بالمعادلة $d(w) = 10 \log \frac{w}{w_0}$، حيث يمثل w شدة الصوت بالوات لكل متر مربع، ويمثل w_0 الثابت 1×10^{-12} وات لكل متر مربع. (الدرس 4-2)

a. حدد شدة الصوت لحفلة موسيقية يصل شدة الصوت بها إلى 100 ديسيبل.

b. تقارن هند بين الحفلة وبين الموسيقى التي تعزفها في بيتها. وهي تعزف الموسيقى بمستوى 50 ديسيبل، وهكذا فإن شدة صوت الموسيقى نصف شدة صوت الحفلة. فهل استدلالها صحيح؟ علل إجابتك رياضيًا.

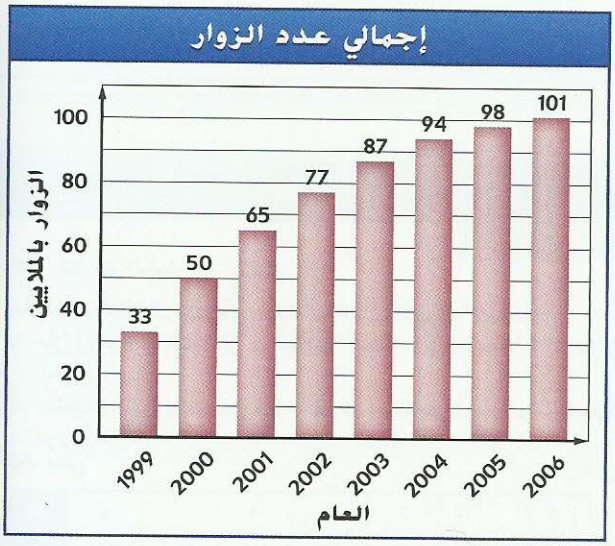
c. يتم عزف الموسيقى الهادئة بشدة 1×10^{-8} وات لكل متر مربع. ما مقدار زيادة الأعداد العشرية إذا تضاعفت الشدة؟

53. **المعرفة المالية** لدى علي 8000 AED ويريد إيداعها في حساب بفائدة مركبة مستمرة. هدفه هو امتلاك 12,000 AED خلال 5 أعوام. (الدرس 4-2)

a. وجد علي بنكًا يقدم 6% على الاستثمارات. فكم يستغرق وصول استثماره إلى 12,000 AED بمعدل 6%؟

b. ما المعدل اللازم لوصول علي إلى 12,000 AED بعد 5 أعوام؟

54. **الإنترنت** عدد زوار موقع إنترنت رائج موضح أدناه. (الدرس 5-2)



a. قم بعمل تمثيل بياني باستخدام مخطط تشتت للبيانات. افترض أن 1990 = 0

b. احسب التقريب الخطي للبيانات باستخدام نموذج لوغاريتمي.

c. مثّل بيانيًا البيانات التي تم تقريبها خطيًا، وأوجد معادلة الانحدار الخطي.

d. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية ومثّله بيانيًا.

الوحدة 3

تمرين على الاختبار

مثّل كل دالة بيانيًا وحللها. ووضح المجال والمدى ونقاط التقاطع والمستقيمات المقاربة والسلوك الطرفي، ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

1. $f(x) = -e^{x+7}$

2. $f(x) = 2\left(\frac{3}{5}\right)^{-x} - 4$

استخدم تمثيل $f(x)$ البياني لتوضيح التحويل الناتج في التمثيل البياني لـ $g(x)$. ثم مثّل التمثيل البياني لكل من $f(x)$ و$g(x)$.

3. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} + 4$

4. $f(x) = 5^{x}$ $g(x) = -5^{-x} - 2$

5. **اختيار من متعدد** لأي دالة تنتمي $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ ؟

A $f(x) = -2 \cdot 3^{-x}$
C $f(x) = -\log_8 (x - 5)$
B $f(x) = -\left(\frac{1}{10}\right)^{x}$
D $f(x) = \log_3 (-x) - 6$

أوجد قيمة كل تعبير مما يلي.

6. $\log_3 \frac{1}{81}$

7. $\log_{32} 2$

8. $\log 10^{12}$

9. $9^{\log_9 5.3}$

مثّل كل دالة بيانيًا.

10. $f(x) = -\log_4 (x + 3)$

11. $g(x) = \log (-x) + 5$

12. **المعرفة المالية** تستثمر AED 1500 في حساب بمعدل فائدة 8% لمدة 12 عامًا دون إجراء أية عمليات إيداع أو سحب أخرى.

a. كم سيكون رصيد حسابك إذا كانت الفائدة مركبة شهريًا؟

b. كم سيكون رصيد حسابك إذا كانت الفائدة مركبة مستمرة؟

c. إذا كان الاستثمار مركبًا يوميًا، فكم تقريبًا يستغرق تضاعف المبلغ المبدئي؟

قم بتوسيع كل تعبير.

13. $\log_6 36xy^2$

14. $\log_3 \frac{a\sqrt{b}}{12}$

15. **جيولوجيا** يمكن حساب قوة زلزال على مقياس ريختر بواسطة المعادلة $R = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$. حيث يمثل E الطاقة الناتجة وE_0 الثابت.

a. ضرب زلزال بقوة 7.1 سان فرانسيسكو عام 1989. أوجد مقياس زلزال ينتج 10 أضعاف طاقة زلزال 1989.

b. في عام 1906، ضرب سان فرانسيسكو زلزال سجل 8.25. كم ضعفًا من الطاقة أنتجها زلزال 1906 بالنسبة إلى زلزال 1989؟

قم بتبسيط كل تعبير.

16. $2 \log_4 m + 6 \log_4 n - 3(\log_4 3 + \log_4 j)$

17. $1 + \ln 3 - 4 \ln x$

أوجد حل كل من المعادلات التالية.

18. $3^{x+8} = 9^{2x}$

19. $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

20. $\log x + \log (x - 3) = 1$

21. $\log_2 (x - 1) + 1 = \log_2 (x + 3)$

22. **اختيار من متعدد** أي المعادلات ليس لها حلول؟

F $e^{x} = e^{-x}$
H $\log_5 x = \log_9 x$
G $2^{x-1} = 3^{x+1}$
J $\log_2 (x + 1) = \log_2 x$

بالنسبة إلى التمرينين 23 و24، أكمل كل خطوة.

a. أوجد دالة أسية أو لوغاريتمية لتمثيل البيانات.

b. أوجد قيمة كل نموذج عند $x = 20$.

23.

x	1	3	5	7	9	11	13
y	8	3	0	−2	−3	−4	−5

24.

x	1	3	5	7	9	11	13
y	3	4	5	6	7	9	10

25. **التعداد السكاني** يوضح الجدول تعداد سكان الولايات المتحدة بين عامي 1790 و1940. افترض أن 1780 = 0.

العام	السكان (بالمليون)
1790	4
1820	10
1850	23
1880	50
1910	92
1940	132

a. احسب التقريب الخطي للبيانات بافتراض نموذج تربيعي. مثّل البيانات بيانيًا، واكتب معادلة للخط الأفضل تمثيلًا.

b. استخدم النموذج الخطي لإيجاد نموذج البيانات الأصلية. هل النموذج التربيعي جيد التمثيل للنمو السكاني؟ اشرح.

McGraw-Hill Education حقوق الطبع والتأليف © محفوظة لصالح